刘靖贤：概括公理与新弗雷格主义（2013）

弗雷格被称为数理逻辑的创始人和分析哲学的奠基人，但他本人主要从事的工作是逻辑主义，即把算术还原为逻辑，从而通过逻辑的分析性和先天性来保证算术的分析性和先天性；然而，罗素悖论的出现摧毁了逻辑主义方案。罗素悖论根源于二阶逻辑的概括公理与公理V 的不一致性。近年来，新弗雷格主义发现，被弗雷格放弃的休谟原则与概括公理是一致的，并且从休谟原则和二阶逻辑可以推出皮亚诺算术公理，即所谓的弗雷格定理。新弗雷格主义认为，如果放弃不一致的公理V 转而诉诸休谟原则，则可以在某种程度上实现弗雷格的逻辑主义。

本文从根本上反对新弗雷格主义的做法。公理V 在弗雷格的系统中具有不可取代的地位，为了避免悖论而放弃公理V 的做法是不可行的。休谟原则面临来自两个方面的批评，即凯撒问题和良莠不齐反驳。本文的工作主要围绕二阶逻辑的概括公理与新弗雷格主义之间的关系展开。具体包括以下三个方面的工作。

历史性工作。本文详细梳理了在《概念文字》、《算术基础》和《算术基本规律》三部著作中的技术性内容，并且在重视原意的基础上，按照现代逻辑的记法重新表述了这些内容。弗雷格在《概念文字》中给出了二阶逻辑的公理系统，其中概括公理被表述为代入规则。根据代入规则，可以把二阶变元例示为复杂公式，由此可以给出数学归纳法的证明。弗雷格在《算术基础》中提出了数概念的形式定义，即休谟原则。凭借休谟原则给出的数的定义以及依赖于代入规则的数学归纳法，他证明了后继公理。弗雷格在《算术基本规律》中提出了值域概念的形式定义，即公理V。公理V 反映了逻辑主义的实质：把算术还原为逻辑的过程就是把高层概念还原为外延并且把多元关系还原为一元概念的过程。

哲学性工作。弗雷格本人由于凯撒问题而放弃了休谟原则。凯撒问题的焦点在于如何区分抽象对象和具体对象。凯撒问题是一个混合问题，它包含了三个小问题：什么是数的同一性标准？什么是只有数落在其中的概念？如何确定作为对象的数的存在性？虽然从现代逻辑的角度看，凯撒问题并不是弗雷格定理的技术性障碍，但是按照弗雷格的量化观，如果不能确定凯撒是不是一个数，则不能合理地说明数的独立自存性。有人认为，公理V 也面临凯撒问题，即如何确定凯撒是不是一个外延。本文重新考量了弗雷格关于公理和定义论述、关于同一性和自明性的论述以及关于概念和逻辑对象的论述，在此基础上说明，虽然休谟原则不能解决关于数的存在性问题，但是在概括公理的帮助下，公理V 可以解决关于外延的存在性问题。由此说明，相比于休谟原则，公理V 具有不可取代的优越性。

技术性工作。既然公理V 的地位是不可动摇的，并且悖论来源于公理V 和概括公理的不一致性，所以避免悖论的出路就在于限制概括公理。在回顾以往直谓概括公理的利弊得失后，本文提出了正概括公理、模态概括公理和弗协调概括公理。主要证明了以下结论。公理V 与正概括公理是一致的，并

且二者可以解释Robinson 算术。在增加某些公理的前提下，可以从公理V 和正概括公理推出后继公理。模态公理V 和模态概括公理是一致的，并且二者也可以解释Robinson 算术。虽然从模态公理V 和模态概括公理可以推出某种版本的休谟原则，但是无法从这个版本的休谟原则和模态概括公理推出皮亚诺算术公理。弗协调公理V 和弗协调概括公理是足道的。在增加某些公理的前提下，可以从弗协调公理V 推出弗协调休谟原则。为了从弗协调逻辑返回到经典逻辑，本文为上述弗协调理论设计了一个特殊的推理策略。

本文最后讨论了弗雷格关于分析性和先天性的观点。