裘江杰：模态逻辑中的典范问题（2007）

典范问题发源于完全理论。典范框架、模型等概念最早的提出皆为证明逻辑完全性之用。但是典范相关概念一被提出，典范诸问题即入逻辑家视野。其中 Fine 关于初等性与典范性关系的工作奠立了这一研究领域的基石。此后，典范问题成为模态逻辑理论研究不可忽视的一部分。理论研究的一些方面，象完全性问题、有穷模型性问题都与之有密切的联系。例如，通过证明一逻辑是典范的得到它的完全性仍然是解决完全性问题的常规方法；再如，一些有穷模型性问题的探讨也少不了设法改造典范框架。反过来，对典范问题的考察也用到其它理论侧面甚至其它学科研究的成果，比如对偶理论中的一些技术、方法，在 Goldblatt 给出的 Fine 定理证明的代数版本中起了实质性的作用。总之，对典范问题的研究有助于我们更好地理解模态逻辑。

典范框架是典范问题研究最基本的概念，因此对它们的讨论成为典范问题研究的一个方向。对典范框架的研究又可以分为下面几个方面：(1) 研究一个逻辑的典范框架与这个逻辑的框架之间的关系。有两个有意思的结果：(a) 一个逻辑的典范框架的有穷子框架都是该逻辑的框架；(b) 一个逻辑的有穷框架同构嵌入该逻辑的典范框架。(2) 讨论逻辑间的包含关系与它们典范框架之间关系的对偶。有这样的结果：所有每个正规逻辑的典范框架都是极小逻辑 K 的典范框架的生成子框架。(3) Goldblatt 建立了典范框架的拟模态理论。(4) 典范框架的结构。我们基于其中的一些成果上作了进一步的研究。首先推广了(1)中的两个结果。我们证明(a') 一个逻辑的典范框架的子框架，如果它的论域的所有子集在典范模型中可定义，那么它是该逻辑的框架；(b') 一个逻辑的有穷宽框架都同构嵌入该逻辑的典范框架。基于(2)的结果，我们研究了 K 的典范框架的结构，证明了：对任意的正整数 n，CanF(K)中有连续统多个在 n 步通达到死点的世界。(3)中典范框架的拟模态理论的一个结果是每个逻辑的最大典范子逻辑与该逻辑有相同的拟模态理论，据此我们引入了正规逻辑格上 C 算子及逻辑的典范度概念。

对初等性与典范性关系的讨论是典范问题研究的另一个方向。Fine 在上个世纪七十年代中期证明了一个逻辑是初等的蕴涵它是典范的。van Benthem 给出过这一结果的另一个证明。后来 Goldblatt 借助对偶理论中的技术、方法给出了 Fine 定理证明的代数版本。Fine 定理的逆——Fine 问题长期得不到彻底的解决，直到最近 Goldblatt、Venema 及 Hodkinson 使用随机图方法给出了否定解。这方面进一步的问题有：什么样的逻辑类，典范与初等对它们来说是等价的。Fine 证明子框架逻辑类有这样的性状，后来 Zakharyaschev 使用他本人发展出来的 C 公式理论给出了这一结果的另一个证明。我们对这一方向上的研究进行了梳理和综述。

Fine 定理和 Fine 问题的否定解决表明初等逻辑类是典范逻辑类的真子类。因此典范性与初等性是不同的概念，基于这种区分，可以分别讨论这两类逻辑。

一个逻辑如果是初等的，那么有初等的框架类刻画它，但是它本身的框架类未必是初等的，由此导致强初等逻辑的概念。有两组研究者 Goldblatt 与 Hodkinson 以及 Balbiani、Shapirovsky 与 Shetman 分别证明了强初等与初等是不同的概念。因此强初等逻辑类是初等逻辑的真子类。对应理论中的一个概念——初等完全公式与强初等逻辑有密切的联系：以初等

完全公式为额外公理的逻辑都是强初等逻辑。Sahlqvist 在上个世纪七十年代中期找到了这样一类有良好性质的公式，它们被称为 Sahlqvist 公式。称以 Sahlqvist 公式为额外公理的逻辑为 Sahlqvist 逻辑，它们自然都是强初等逻辑。我们发现它们组成一个格，进而发现格中有可数无穷长的链和反链，以及格中的每个逻辑相对格的不完全度是 1，另外我们还研究了 Sahlqvist 逻辑格的子格 E。E 中逻辑的正规扩张形成了一类特别的初等逻辑——Tabular 逻辑，它们都能被一个单独的有穷框架所刻画。

以典范的公式为额外公理得到的逻辑是典范的，这样就有一个自然的问题：反过来，是否对每个典范的逻辑，都可以找到典范的公式公理化？Hodkinson 与 Venema 给出了这个问题的否定解，他们证明逻辑 KM^{∞}是典范的，但是它不可典范公理化。有穷模型性是逻辑的另一重要的性质，典范性与有穷模型性这两者的互动是一个有意思的课题。我们讨论了典范性与有穷模型性四种可能的组合。