赵晓玉：哥德尔不完全性定理的推广形式及其哲学影响（2018）

1930 年，哥德尔证明了关于递归可枚举理论的哥德尔不完全性定理，而本文的第一项工作便是将哥德尔不完全性定理推广到非递归可枚举理论上，得到推广的哥德尔不完全性定理。为此，首先详细回顾哥德尔不完全性定理的整个证明，并证明一些相关的推论。

为便于将哥德尔不完全性定理推广到非递归可枚举理论上，首先将哥德尔不完全性定理涉及的一致性、语法完全性、ω-一致性、相对于 $\mathcal{N}$ 的可靠性、相对于 $\mathcal{N}$ 的完全性、可定义性等元理论性质，分别推广成 Γ-一致性、Γ-决定性、n-一致性、相对于 $\mathcal{N}$ 的 Γ-可靠性、相对于 $\mathcal{N}$ 的 Γ-完全性、Γ-可定义性等更一般的形式，并对其基本性质进行深入研究，然后利用推广的元理论性质对哥德尔不完全性定理进行重述。

关于推广的哥德尔第一不完全性定理，首先回顾萨利希和萨拉杰证明的 4 簇结果：任给 $n > 0$，如果 T 是包含罗宾森算术的、Σ_{n+1}-可定义的（Π_n-可定义的）、Σ_n-可靠的（n-一致的）算术理论，那么 T 不是 Π_{n+1}-决定的；并证明其中的 Σ_n-可靠性或 n-一致性不能被相应地强化为 Σ_{n-1}-可靠性或 $(n-1)$-一致性；期间会就关键定理给出一种更简洁易读的证明。然后额外证明 2 簇结果：任给 $n > 0$，如果 T 是包含罗宾森算术的、Σ_{n+1}-可定义的（Π_n-可定义的）、Π_{n+1}-可靠的算术理论，那么 T 不是 Π_{n+1}-决定的；并证明其中的 Π_{n+1}-可靠性不能被强化为 Π_n-可靠性。

关于推广的哥德尔第二不完全性定理，首先将 Γ-可靠性形式化，然后证明 4 簇结果：任给 $n > 0$，如果 T 是包含皮亚诺算术的、Σ_{n+1}-可定义的（Π_n-可定义的）、Σ_n-可靠的（Π_{n+1}-可靠的）算术理论，那么 T 不能证明自身 Σ_n-可靠性（Π_{n+1}-可靠性）；并且证明其中的 Σ_{n+1}-可靠性或 Π_{n+1}-可靠性不能被相应地强化为 Σ_n-可靠性或 Π_n-可靠性；最后通过引入强可证性关系给出这 4 簇结果的第二种证明方法。

本文的第二项工作是深入讨论非递归可枚举理论与形式化的一致性之间的关系。首先分析非递归可枚举理论与可证性条件的关系，然后据此证明满足一定条件的非递归可枚举理论不能证明自身一致性，即结论涉及一致性的 4 簇推广的哥德尔第二不完全性定理：任给 $n > 0$，如果 T 是包含皮亚诺算术的、一致的、Σ_{n+1}-可定义的（Π_n-可定义的）、Σ_{n+1}-完全的（Π_n-完全的）算术理论，那么 T 不能证明自身一致性；并且将这些结果作为第一项工作中推广的哥德尔第二不完全性定理的推论从而给出第二种证明方法；最后还会给出 2 簇能证明自身一致性的理论从而证明其中的 Σ_{n+1}-完全性或 Π_n-完全性不能被相应地强化为 Σ_n-完全性或 Π_{n-1}-完全性。

本文的第三项工作是基于推广的哥德尔不完全性定理，从对形式化方法局限的反驳、对反机械主义的支持、对数学家地位的辩护等三个方面重新审视哥德尔不完全性定理的哲学影响。

关键词：不完全性，非递归可枚举理论，Γ-可靠性，Γ-可定义性，哲学影响