非标准语言和紧缩主义视角下的塔斯基真定义研究

高珂

北京大学哲学系
PEKING UNIVERSITY PHILOSOPHY DEPARTMENT

2019 年 3 月 12 日

目录

研究概述

1、研究概述

研究课题

选题：以皮亚诺算术为基础理论，从算术模型和真理紧缩主义保守性两个维度对塔斯基的真定义进行研究。

研究课题

选题：以皮亚诺算术为基础理论，从算术模型和真理紧缩主义保守性两个维度对塔斯基的真定义进行研究。

策略：把真谓词作为一个初始谓词引入，并结合塔斯基的语义理论和当前哲学与逻辑研究趋势，给出真谓词的性质刻画，然后从算术模型和真理紧缩主义保守性两方面对这些谓词进行考察。

选题背景

1. 塔斯基的语义理论在真理论发展中占据十分重要的地位，至今仍然是最具影响的真理论框架；
2. 塔斯基的形式化真定义是当前逻辑与数学实践中接受度最高，使用最频繁的真定义；
3. 真理紧缩主义、公理化真理论的发展，要求对塔斯基语义理论更深入的研究；
4. 算术非标准模型研究的推进为研究塔斯基真定义提供了新的视角。

选题意义

1. 对数理逻辑而言:
   a. 有助于更好的理解形式化真定义的强度与极限;
   b. 有助于更深入的认识和理解算术模型的性质;
   c. 有助于更深入的认识皮亚诺算术的证明论性质。
2. 对哲学而言:
   a. 有助于更深入理解塔斯基的语义理论;
   b. 对真理紧缩主义、数学哲学的研究也有重要意义。

塔斯基真定义回顾

2、塔斯基真定义回顾

历史回顾

1. 1930 年 10 月塔斯基在华沙哲学会逻辑组做了题为“同形式演绎系统有关的真值概念”的学术演讲。
2. 1931 年 3 月经卢卡西维兹，塔斯基向华沙科学学会提交《形式化语言中的真概念》的波兰文版本，文章于 2 年后见刊。
3. 1936 年，《形式化语言中的真概念》[1]一文的德文版本在《哲学研究》第一卷发表，其抽印本则早在 1935 年已经面世。。
4. 1944 年塔斯基发表了《真的语义概念和语义学基础》[2]一文，用较为通俗的语言对 1933 年文章进行了说明。

---

[1]参考文本见 [Tarski 1956]。
[2]参考文本见 [Tarski 1944]。

塔斯基与哥德尔

有学者认为哥德尔在 1931 年的文章[3]是某种真的不可定义性的证明，在当时他先于塔斯基认识到真的形式不可定义，所以这一重大结果的发现应该归于哥德尔。

[3]详见 [Gödel 1931]。

塔斯基与哥德尔

有学者认为哥德尔在 1931 年的文章[3]是某种真的不可定义性的证明，在当时他先于塔斯基认识到真的形式不可定义，所以这一重大结果的发现应该归于哥德尔。

这种观点是不恰当的，理由如下

1. 哥德尔并没有给出真概念的形式化定义，更遑论严格的不可定义性证明。
2. 由于担心当时占统治地位的希尔伯特主义者的反对，在 1931 年的论文中哥德尔没有讨论真相关的问题，甚至避免使用“真理”、“真”这样的字眼。
3. 塔斯基通过对真的严格形式化定义，进一步独立推广了不可定义性的结果。

[3]详见 [Gödel 1931]。

实质充分

1 “我们的定义与亚里士多德真理概念所包含的直觉尽应该可能的相似——即在亚里士多德《形而上学》一书中这段著名的话所表达的直觉：‘说是者为非，或者说非者为是，是假的；说是者为是，或者说非者为非，是真的。’”[4]

[4] 详见 [Tarski 1956]。

实质充分

1. “我们的定义与亚里士多德真理概念所包含的直觉尽应该可能的相似——即在亚里士多德《形而上学》一书中这段著名的话所表达的直觉：‘说是者为非，或者说非者为是，是假的；说是者为是，或者说非者为非，是真的。’” [4]
2. 对于定义真的非语义概念的语义解释要能穷尽一切真的可能性。这样的真定义将包含所有从形式上和逻辑语义上可以判定其为真的语句，并且只包含这样的语句。

[4] 详见 [Tarski 1956]。

T-约定

A formally correct definition of the symbol 'Tr', formulated in the metalanguage, will be called an adequate definition of truth if it has the following consequences:

(a). all sentences which are obtained from the expression '$x \in \mathrm{Tr}$ if and only if p' by substituting for the symbol 'x' a structural-descriptive name of any sentence of the language in question and for the symbol 'p' the expression which forms the translation of this sentence into the metalanguage;

(b). the sentence 'for any x, if $x \in \mathrm{Tr}$ then $x \in S$' (in other words '$\mathrm{Tr} \subseteq S$').

T-等式

带有去引号名称的 T-等式就可以表述为

“p”是真的，当且仅当，p。

T-等式很好的反应了亚里士多德古典真定义的直观。

T-等式

带有去引号名称的 T-等式就可以表述为

“p”是真的，当且仅当，p。

T-等式很好的反应了亚里士多德古典真定义的直观。
下面是著名的带有引号名称的 T-等式实例。

“雪是白的”是真的，当且仅当，雪是白的。

其中 T-等式右边的“雪是白的”是真值的承担者。而 T-等式左边“‘雪是白的’”是自然语言中语句“雪是白的”的引号名称。

二值原则

通过 T-等式可以确立逻辑语义中真的二值原则。因为如果存在一个既不真也不假的句子“p”，那么根据去引号的 T-等式，可以得到

“p”是真的，当且仅当，p。

根据定义，等价式的左边是假的，而等价式的右边是既不真也不假的，所以这个等价式不成立。

T-等式的不足

不违背 T-等式形式的前提下，很容易通过类似自指的语句构造一个说谎者悖论。

假设“c”是“写在下面一行的这句话”的名称：

c 不是真的。

那么根据“c”的定义，“c 不是真的”等同于 c。而对 c 的去引号名称而言，又有

“c 不是真的”是真的，当且仅当，c 不是真的。

这样就得到了如下矛盾：

c 是真的，当且仅当，c 不是真的。

形式正当

1. 禁用“语义上封闭的语言”。
2. 区分对象语言与元语言。
3. 语义学的词项只有经过定义才能被引入元语言中。

需要澄清的误解

1. 约定-T 是塔斯基提出的一种普遍性的真定义。

需要澄清的误解

1. 约定-T 是塔斯基提出的一种普遍性的真定义。
2. T-等式是兼具对象语言和元语言的部分。

需要澄清的误解

1. 约定-T 是塔斯基提出的一种普遍性的真定义。
2. T-等式是兼具对象语言和元语言的部分。
3. 从塔斯基的形式正当条件可以看出塔斯基持有某种还原论的立场。

塔斯基语义理论的哲学定位

1. 以波普尔为代表，认为塔斯基的语义理论是一种符合论。[5]
2. 以哈克为代表，认为塔斯基的语义理论不是符合论。[6]

[5]详情请参看 [Popper 2002]。
[6]详情请参看 [Haack 1978]。

塔斯基语义理论的哲学定位

1. 哈克对塔斯基的语义理论不是符合论的论证是不充分的。

塔斯基语义理论的哲学定位

1. 哈克对塔斯基的语义理论不是符合论的论证是不充分的。
2. 例如“x 是白的”，那么根据塔斯基关于满足的递归定义，可以得到

   无穷序列 $(a_1, a_2 ...)$ 满足“x 是白的”，当且仅当，a_1 是白的。

   在这个等价式中，“当且仅当”左边的无穷序列和语句函项“x 是白的”都是语言中的，而“当且仅当”的右边是一个事实，因为 a_1 是变量，所以“a_1 是白的”不是一个完整的表达式，只能表示 a_1 具有“是白的”这样性质的事实。

塔斯基语义理论的哲学定位

1. 哈克对塔斯基的语义理论不是符合论的论证是不充分的。
2. 例如“x 是白的”，那么根据塔斯基关于满足的递归定义，可以得到

   无穷序列 $(a_1, a_2...)$ 满足“x 是白的”，当且仅当，a_1 是白的。

   在这个等价式中，“当且仅当”左边的无穷序列和语句函项“x 是白的”都是语言中的，而“当且仅当”的右边是一个事实，因为 a_1 是变量，所以“a_1 是白的”不是一个完整的表达式，只能表示 a_1 具有“是白的”这样性质的事实。
3. 塔斯基的满足不是刚性的符合。

塔斯基语义理论的哲学定位

1. 哈克对塔斯基的语义理论不是符合论的论证是不充分的。
2. 例如“x 是白的”，那么根据塔斯基关于满足的递归定义，可以得到

   无穷序列 $(a_1, a_2 ...)$ 满足“x 是白的”，当且仅当，a_1 是白的。

   在这个等价式中，“当且仅当”左边的无穷序列和语句函项“x 是白的”都是语言中的，而“当且仅当”的右边是一个事实，因为 a_1 是变量，所以“a_1 是白的”不是一个完整的表达式，只能表示 a_1 具有“是白的”这样性质的事实。
3. 塔斯基的满足不是刚性的符合。
4. 塔斯基的语义理论是一种柔性符合论。

非标准语言下算术真的模型论性质

3、非标准语言下算术真的模型论性质

T-集合

T-集合：一个集合 $S \subset M$ 是 $\mathcal{M}$ 上的 T-集合，当且仅当对于所有 $\mathcal{L}_A$-公式 $\varphi(\overline{v})$，

$$(\mathcal{M}, S) \models \forall \overline{a}(\varphi(\overline{a}) \leftrightarrow (\varphi, \ulcorner \overline{a} \urcorner) \in S)。$$

更进一步地，如果 $(\mathcal{M}, S)$ 满足 $\mathcal{L}_A \cup \{S\}$ 语言下的归纳公理模式，那么称 S 是一个归纳 T-集合。

满足类 I

全满足类：假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是一个非标准模型。一个集合 $S \subset M$ 是 $\mathcal{M}$ 上的全满足类，当且仅当对于任意满足 $\mathcal{M} \models \mathrm{Form}(\varphi)$ 的非标准公式公式 φ 以及 $a \in M$，$(\varphi, a) \in S$ 当且仅当下列某项在 $\mathcal{M}$ 的膨胀 (M, S) 中成立。

$\mathrm{T}_1(\varphi, a)$； $\exists t, s(\mathrm{Term}(t) \wedge \mathrm{Term}(s) \wedge \varphi = (t = s) \wedge \mathrm{Val}(t, a) = \mathrm{Val}(s, a))$；

$\mathrm{T}_2(\varphi, a)$； $\exists t, s(\mathrm{Term}(t) \wedge \mathrm{Term}(s) \wedge \varphi = (t < s) \wedge \mathrm{Val}(t, a) < \mathrm{Val}(s, a))$；

$\mathrm{T}_3(\varphi, a)$； $\exists \psi(\mathrm{Form}(\psi) \wedge \varphi = \neg\psi \wedge \neg(\psi, a) \in S)$；

$\mathrm{T}_4(\varphi, a)$； $\exists \psi_1, \psi_2(\mathrm{Form}(\psi_1) \wedge \mathrm{Form}(\psi_2) \wedge \varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge ((\psi_1, a) \in S \wedge (\psi_2, a) \in S))$；

满足类 II

$\mathrm{T}_5(\varphi, a)$; $\exists\psi_1, \psi_2(\mathrm{Form}(\psi_1) \wedge \mathrm{Form}(\psi_2) \wedge \varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \wedge ((\psi_1, a) \in S \vee (\psi_2, a) \in S))$;

$\mathrm{T}_6(\varphi, a)$; $\exists i, \psi(\mathrm{Form}(\psi) \wedge \varphi = \exists v_i\psi \wedge \exists b((\psi, a[b/i]) \in S))$;

$\mathrm{T}_7(\varphi, a)$; $\exists i, \psi(\mathrm{Form}(\psi) \wedge \varphi = \forall v_i\psi \wedge \forall b((\psi, a[b/i]) \in S))$。

部分满足类：一个集合 $S \subset M$ 是 $\mathcal{M}$ 上的部分满足类，当且仅当对于任意满足 $\mathcal{M} \models \mathrm{Form}(\varphi)$ 的非标准公式 φ 以及 $a \in M$，$(\varphi, a) \in S$ 当且仅当存在非标准元 c 使得任意 $\varphi < c$，

$$(\mathcal{M}, S) \models \bigvee_{i=1}^{7} \mathrm{T}_i(\varphi, a)。$$

假设 S 是 $\mathcal{M}$ 上的部分（全）满足类。S 是归纳的当且仅当 $(\mathcal{M}, S)$ 满足相对于 $\mathcal{L}_A \cup \{S\}$-公式的归纳公理模式。

正真满足类 I

正真满足类：假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是一个非标准模型。个集合 $S \subset M$ 是 $\mathcal{M}$ 上的正满足类，当且仅当对于任意满足 $\mathcal{M} \models \mathrm{Form}(\varphi)$ 的非标准公式 φ 以及 $a \in M$，$(\varphi, a) \in S$ 当且仅当下列某项在 $\mathcal{M}$ 的膨胀 $(\mathcal{M}, S)$ 中成立。

$\mathrm{PT}_1(\varphi, a)$；$\exists t, s(\mathrm{Term}(t) \wedge \mathrm{Term}(s) \wedge \varphi = (t = s) \wedge \mathrm{Val}(t, a) = \mathrm{Val}(s, a))$；

$\mathrm{PT}_2(\varphi, a)$；$\exists t, s(\mathrm{Term}(t) \wedge \mathrm{Term}(s) \wedge \varphi = \neg(t = s) \wedge \mathrm{Val}(t, a) \neq \mathrm{Val}(s, a))$；

$\mathrm{PT}_3(\varphi, a)$；$\exists t, s(\mathrm{Term}(t) \wedge \mathrm{Term}(s) \wedge \varphi = (t < s) \wedge \mathrm{Val}(t, a) < \mathrm{Val}(s, a))$；

正真满足类 II

$\mathrm{PT}_4(\varphi, a)$; $\exists t, s(\mathrm{Term}(t) \wedge \mathrm{Term}(s) \wedge \varphi = \neg(t < s) \wedge \mathrm{Val}(t, a) \not< \mathrm{Val}(s, a))$;

$\mathrm{PT}_5(\varphi, a)$; $\exists \psi(\mathrm{Form}(\psi) \wedge \varphi = \neg\neg\psi \wedge (\psi, a) \in S)$;

$\mathrm{PT}_6(\varphi, a)$; $\exists \psi_1, \psi_2(\mathrm{Form}(\psi_1) \wedge \mathrm{Form}(\psi_2) \wedge \varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge ((\psi_1, a) \in S \wedge (\psi_2, a) \in S))$;

$\mathrm{PT}_7(\varphi, a)$; $\exists \psi_1, \psi_2(\mathrm{Form}(\psi_1) \wedge \mathrm{Form}(\psi_2) \wedge \varphi = \neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge ((\neg\psi_1, a) \in S \wedge (\neg\psi_2, a) \in S))$;

$\mathrm{PT}_8(\varphi, a)$; $\exists \psi_1, \psi_2(\mathrm{Form}(\psi_1) \wedge \mathrm{Form}(\psi_2) \wedge \varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \wedge ((\psi_1, a) \in S \vee (\psi_2, a) \in S))$

$\mathrm{PT}_9(\varphi, a)$; $\exists \psi_1, \psi_2(\mathrm{Form}(\psi_1) \wedge \mathrm{Form}(\psi_2) \wedge \varphi = \neg(\psi_1 \vee \psi_2) \wedge ((\neg\psi_1, a) \in S \vee (\neg\psi_2, a) \in S))$;

正真满足类 III

$$\mathrm{PT}_{10}(\varphi, a);\ \exists i, \psi(\mathrm{Form}(\psi) \wedge \varphi = \exists v_i \psi \wedge \exists b((\psi, a[b/i]) \in S));$$

$$\mathrm{PT}_{11}(\varphi, a); \exists i, \psi(\mathrm{Form}(\psi) \wedge \varphi = \exists v_i \neg\psi \wedge \forall b((\neg\psi, a[b/i]) \in S));$$

$$\mathrm{PT}_{12}(\varphi, a);\ \exists i, \psi(\mathrm{Form}(\psi) \wedge \varphi = \forall v_i \psi \wedge \forall b((\psi, a[b/i]) \in S));$$

$$\mathrm{PT}_{13}(\varphi, a); \exists i, \psi(\mathrm{Form}(\psi) \wedge \varphi = \forall v_i \neg\psi \wedge \exists b((\neg\psi, a[b/i]) \in S))。$$

假设 S 是 $\mathcal{M}$ 上的正满足类。S 是归纳的当且仅当 $(\mathcal{M}, S)$ 满足相对于 $\mathcal{L}_A \cup \{S\}$-公式的归纳公理模式。

非标准语言下真的模型论性质

定理 1

假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是一个可数非标准一阶算术模型。那么下列命题两两等价。

1. $\mathcal{M}$ 是一个递归饱和模型；
2. $\mathcal{M}$ 上存在一个全满足类；
3. $\mathcal{M}$ 上存在一个部分满足类；
4. $\mathcal{M}$ 上存在一个归纳部分满足类；
5. $\mathcal{M}$ 上存在一个归纳 T-集合。

非标准语言下算术真的模型论性质

定理 2 (不使用对角线引理)

令 T 是一个包含 PA 的 $\mathcal{L}_A$-理论。假设存在只带一个自由变元的 $\mathcal{L}_A$-公式 $\varphi(x)$ 使得对于所有的 $\mathcal{L}_A$-句子 θ 都有 $T \vdash \theta \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \theta \urcorner)$。那么 T 是不一致的。

非标准语言下算术真的模型论性质

定理 2（不使用对角线引理）

令 T 是一个包含 PA 的 $\mathcal{L}_A$-理论。假设存在只带一个自由变元的 $\mathcal{L}_A$-公式 $\varphi(x)$ 使得对于所有的 $\mathcal{L}_A$-句子 θ 都有 $T \vdash \theta \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\theta\urcorner)$。那么 T 是不一致的。

定理 3

假设 $M \models \mathrm{PA}$ 是可数非标准一阶算术模型。如果 $\mathcal{M}$ 上存在一个归纳部分满足类 S，那么 $\mathcal{M}$ 上一定存在另一个归纳部分满足类 S' 使得 S' 在模型 $(\mathcal{M}, S)$ 中可定义。

非标准语言下真的模型论性质

定理 4

假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是可数非标准一阶算术模型。如果 G 是 $\mathcal{M}$ 上的一个脱殊子集，那么不存在 $\mathcal{M}$ 上的归纳部分满足类 S 使得 S 在模型 $(\mathcal{M}, G)$ 中可定义。

非标准语言下真的模型论性质

定理 4

假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是可数非标准一阶算术模型。如果 G 是 $\mathcal{M}$ 上的一个脱殊子集，那么不存在 $\mathcal{M}$ 上的归纳部分满足类 S 使得 S 在模型 $(\mathcal{M}, G)$ 中可定义。

定理 5（克拉耶夫斯基）

假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是可数的一阶非标准模型，S 是 $\mathcal{M}$ 上的全满足类，对任意的 $\mathcal{M}$ 的可数子集 X 都存在可数模型 $\mathcal{M}_n$ 以及 $X_n, S_n \subseteq N$，$n \in \omega$，使得对任意 $n \in \omega$，都有 $(\mathcal{M}, S, X) \equiv (\mathcal{M}_n, S_n, X_n)$，并且在某个前束范式的句子上，$S_n$ 与 S_m 是不一致的。

模型论性质的解释

作为数学或逻辑的对象，T-集合、满足类这样的非标准语言下真语句集是无序且臃肿的集合，所以对应于这样集合的真谓词是某种程度上非常弱的谓词。

病态语句消去与保守性

4、病态语句消去与保守性

保守性

真理紧缩主义者认为，真理论应该内在的具有保守性，即一个合理的真理论应当相对于一个合适的基础理论是保守的。

保守性

真理紧缩主义者认为，真理论应该内在的具有保守性，即一个合理的真理论应当相对于一个合适的基础理论是保守的。

假设 Th 是形式语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{Th}}$ 的理论。通过添加初始真谓词 Tr，可以得到形式语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{Tr}} = \mathcal{L}_{\mathrm{Th}} \cup \{\mathrm{Tr}\}$，而适用于理论 Th 语言的真理论 T，可以在语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{Tr}}$ 中形式化。

保守性

真理紧缩主义者认为，真理论应该内在的具有保守性，即一个合理的真理论应当相对于一个合适的基础理论是保守的。

假设 Th 是形式语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{Th}}$ 的理论。通过添加初始真谓词 Tr，可以得到形式语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{Tr}} = \mathcal{L}_{\mathrm{Th}} \cup \{\mathrm{Tr}\}$，而适用于理论 Th 语言的真理论 T，可以在语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{Tr}}$ 中形式化。

定义 6（保守性）

一个真理论 T 相对于理论 Th 是保守的当且仅当对于所有 $\mathcal{L}_{\mathrm{Th}}$ 语言中不包含真谓词的的句子 φ 都有

$$\text{如果 } \mathrm{Th} \cup \mathrm{T} \vdash \varphi\text{，那么} \mathrm{Th} \vdash \varphi\text{。}$$

病态语句

在 KKL 定理的证明中可以得到如下结果

定理 7

假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是可数的递归饱和模型. 给定非标准元 $c, b \in M$ 使得 $\mathcal{M} \models \mathrm{Form}(c)$，如果

$$M \models \text{``}c = \underbrace{(0 \neq 0) \vee ... \vee (0 \neq 0)}_{b\ \text{次}}\text{''},$$

那么 $\mathcal{M}$ 存在一个包含非标准元 c 的全满足类。

定义消去

可以从模型论和证明论两个角度给出解释。

1. 模型论解释：假设 P 是所有病态实例构成的集合。一种病态消去解释是，对于任给的可数的递归饱和的 PA 模型都可以构造一个不包含 P 中元素的全满足类。
2. 证明论解释：如果可以利用形如“P 中的元素都是假的”这样的语句来扩张 P 并使得扩张后的理论相对于 PA 是保守的，那我们就说在扩张后的理论中消去了病态语句。
3. 这两种解释的实质是一致的。

哪些语句是病态的 I

1. 第一种情况主要基于部分真谓词的性质。显然，在定理 7 中出现的句子 φ 是 Δ_0 的，事实上这个句子是一个无量词句子。部分真谓词 Tr_{Δ_0} 适用于句子 φ，但同时可以在模型中证明，φ 不属于 Tr_{Δ_0} 的扩张（因为 Tr_{Δ_0} 是算术可定义的，所以可以随意的对它使用归纳法）。这就导致了一个问题，在 $\mathrm{PA}(S)^-$ 中，我们无法保证全局真与局部真是一致的。

哪些语句是病态的 II

2 第二种情况是定理 7 中出现句子的否定是纯逻辑可证的，但模型认为这样的句子是真的，这是很荒谬的。具体地讲，通过归纳法可以在模型 $\mathcal{M}$ 中证明：

$$\forall c(\mathrm{Prob}_{\emptyset}(\neg \underbrace{(0 \neq 0) \vee \ldots \vee (0 \neq 0)}_{c\text{ 个}})),$$

其中 $\mathrm{Prob}_{\emptyset}$ 表示“在一阶逻辑中可证”。

哪些语句是病态的 III

3. 第三种情况基于如下的命题。

命题 8

假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是一个可数非标准模型，S 是 $\mathcal{M}$ 上包含定理 7 中的 φ 的全满足类。那么存在一个句子 ψ 使得 ψ 在命题逻辑中可证并且 $\neg\psi \in S$。

对于第一种情况

在 [Engström 2002] 中，恩斯特龙证明了

定理 9

假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是一个可数的递归饱和模型，给定 $n \in \mathbb{N}$。那么 $\mathcal{M}$ 上存在一个全满足类 S 使得

$$(\mathcal{M}, S) \models \forall\varphi \in \Sigma_n(\mathrm{Tr}_{\Sigma_n}(\varphi) = \mathrm{Tr}(\varphi))。$$

其中 Tr 是对应于全满足类 S 的真谓词。

更进一步，类似紧致性定理的证明，很容易证明通过在 $\mathrm{PA}(S)^-$ 中添加相对于任意给定自然数 n 的形如 "$\forall\varphi \in \Sigma_n(\mathrm{Tr}_{\Sigma_n}(\varphi) = \mathrm{Tr}(\varphi))$" 句子得到系统相对于 PA 是保守的。

对于第二种情况

定理 10

下列理论都证明论等价于 Δ_0-PA(S);

$$T_1 = \mathrm{PA}(S)^- + \forall\varphi(\mathrm{Prob}_{\mathrm{PA}}(\varphi) \to \mathrm{Tr}(\varphi));$$

$$T_2 = \mathrm{PA}(S)^- + \forall\varphi(\mathrm{Prob}_{\emptyset}(\varphi) \to \mathrm{Tr}(\varphi));$$

$$T_3 = \mathrm{PA}(S)^- + \forall\varphi(\mathrm{Prob}_{\mathrm{Tr}}(\varphi) \to \mathrm{Tr}(\varphi));$$

$$T_4 = \mathrm{PA}(S)^- + \mathrm{Con}(\mathrm{Tr});$$

$$T_5 = \mathrm{PA}(S)^- + \{\mathrm{Prob}_{\mathrm{Tr}}(\varphi) \to \varphi : \varphi \text{ 是 } \mathcal{L}_A\text{-公式}\}。$$

对于第三种情况

定理 11

令 $\mathrm{T} = \mathrm{PA}(S)^{-} + \forall\varphi(\mathrm{Prob}_{\mathrm{Tr}}^{Prop}(\varphi) \to \mathrm{Tr}(\varphi))$，那么 $\mathrm{T} = \Delta_0\text{-}\mathrm{PA}(S)$。

在上述定理中, $\mathrm{Prob}_{\mathrm{Tr}}^{Prop}$ 是一个拓展语言下的一元谓词, 它表示“在命题逻辑中从真前提可证”。需要注意的是，在这里没有出现处理量词的公理或特殊规则。

解读

1. 对应于塔斯基满足递归定义真谓词的公理化真理论 $\mathrm{PA}(S)^-$ 在哲学上是很弱的，它无法包含许多重要的带有真概念的陈述。
2. 真理紧缩主义要求的保守性，起码对于算术而言是困难的。

总结

5、总结

结论

1. 塔斯基的真定义在某种程度上是偏弱的。
2. 真理论相对于算术的保守性是难以被实现的。

后续研究

问题 12

在可数一阶算术模型上是否存在极小的不可定义集，使得满足类相对于这类集合是可定义的?

问题 13

消去非标准语言下真中所有的病态语句的证明论强度是多少?

问题 14

真理论相对于哲学理论能否保守?

参考文献 I

- Engström, F. (2002). "Satisfaction Classes in Nonstandard Models of First-order Arithmetic". D.
- Gödel, Kurt (1931). "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". In: *Monatshefte für mathematik und physik* 38.1, pp. 173–198.
- Haack, S. (1978). *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press.
- Popper, K. (2002). *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge 2nd*. Routledge.
- Tarski, A. (1944). "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics". In: *Philosophy and Phenomenological Research* 4.3, pp. 341–376.

参考文献 II

Tarski, A. (1956). “The Concept of Truth in Formalized Languages”. In: *Logic, Semantics, Metamathematics*. Clarendon Press, pp. 152–278.

谢谢大家！