NEXTK中典范与不典范逻辑的数目

裘江杰
北京大学哲学系

本文在基本模态语言上工作,固定模态语言ℓ, 它有可数无穷个命题变元，以$Var(\ell)$表示它的命题变元集，以$For(\ell)$表示它的公式集。
$L \subseteq For(\ell)$ 称为正规模态逻辑(下面简称正规逻辑），若它包含所有重言式(代入)、$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$,并且满足下面的条件：
(MP) $\varphi \to \psi, \varphi \in L \Rightarrow \psi \in L$;
(N) $\varphi \in L \Rightarrow \Box\varphi \in L$;
(SUB) $\varphi \in L \Rightarrow$对任意$()^\sigma$，$\varphi^\sigma \in L$;
这里$()^\sigma$是从$For(\ell)$到$For(\ell)$的映射，满足$(\varphi \wedge \psi)^\sigma = (\varphi)^\sigma \wedge (\psi)^\sigma$
$(\Box\varphi)^\sigma = \Box(\varphi)^\sigma$。

按常以K表示最小的正规逻辑，对任$\Sigma \subseteq For(\ell)$,用$K \bigoplus \Sigma$表示包含$\Sigma$的最小正规逻辑，用NEXTK表示所有正规逻辑组成的集合。

所谓一个正规逻辑是典范的，是指它的典范框架是它的框架[1]。我们知道有典范的正规逻辑存在，也有不典范的正规逻辑存在，那么自然就会有一个问题：它们的数目有多少？结论是都有$2^{\aleph_0}$多个。可以由几种不同的方法得到这个结论，例如blok 用代数的方法证明有$2^{\aleph_0}$多个不完全的正规逻辑，我们知道典范的逻辑都是完全的，那么立即可得有$2^{\aleph_0}$多个不典范的正规逻辑。本文介绍一种方法，相对说来直观一点。
先引入一些记号。
记$alt_n := \bigwedge_{i=1}^{n+1} \Diamond p_i \to \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \Diamond(p_i \wedge p_j)$;
本文中固定$n = 2$,实际上对所有$n \geqslant 2$结果都一样。
$\alpha_0 := \Box\perp, \alpha_{i+1} := \Diamond\alpha_i \wedge \neg\Diamond\Diamond\alpha_i \ i \geqslant 0$;
$\varphi_i := \Box(\alpha_{i-1} \to p) \vee \Box(\alpha_{i-1} \to \neg p) \ i \geqslant 2$;
记$N^* := N - \{0, 1, 2, 3\}$; 对任$J \subseteq N^*$, 记$\Lambda_J := K \bigoplus \{alt_2, \varphi_j | \ j \in J\}$;
记$VB := \Diamond\Box p \vee \Box(\Box(\Box q \to q) \to q)$
$mv := \Diamond\Box p \vee \Box p$

[1] 相应及进一步的术语请参看参考文献[1]、[2]

$L_I := K\bigoplus\{VB,\varphi_i|\ i\in I\}$,对任意$I\subseteq N^*$
$Ver := K\bigoplus\{\Box\perp\}$,Ver实际上为死点框架的逻辑，本文以$\bullet$表示死点框架，即有$Ver = Log(\bullet)$。
下面先证明有$2^{\aleph_0}$个典范的正规逻辑。

命题 1 *对任$J\subseteq N^*$,Λ_J一致。*
证：易验证alt_2及各φ_i $i\geqslant 2$都在死点框架$\bullet$上有效，从而对各$J\subseteq N^*$，$\Lambda_J\subseteq Ver$。

命题 2 *对任框架$\mathcal{F}$,$\mathcal{F}\vDash alt_n\Leftrightarrow\mathcal{F}$中每个点至多有$n$个直接后继。*
证：$1^\circ(\Rightarrow)$
设$x\in\mathcal{F}$，它有n+1个直接后继，设为$y_1,\cdots,y_{n+1}$，作赋值$\mathcal{V}$,使$\mathcal{V}(p_i)=\{y_i\},i=1,\cdots,n+1$,则有$<\mathcal{F},\ \mathcal{V}>,x\vDash\bigwedge_{i=1}^{n+1}\Diamond p_i$,但$<\mathcal{F},\ \mathcal{V}>,x\nvDash\bigvee_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\Diamond(p_i\wedge p_j)$。
$2^\circ(\Leftarrow)$
设$\mathcal{F}$中每个点至多有n个直接后继，对任$\mathcal{F}$上赋值$\mathcal{V}$，对任$x\in\mathcal{F}$,若$<\mathcal{F},\ \mathcal{V}>,x\vDash\bigwedge_{i=1}^{n+1}\Diamond p_i$,则有$y_i$, $s.t\ x\mathcal{R}y_i$并且$<\mathcal{F},\ \mathcal{V}>,x\vDash p_i$, $i=1\cdots,n+1$,但x至多有n个直接后继，从而有$i<n+1$使$<\mathcal{F},\ \mathcal{V}>,y_i\vDash p_i\wedge p_{n+1}$。

命题 3 *对任$\Lambda\in NEXTK$ 有$alt_n\in\Lambda\Rightarrow\Lambda$的典范框架$\mathcal{F}^\Lambda$中每个点至多有$n$个直接后继。*
证：设有$x\in\mathcal{F}^\Lambda$,它有超过n个的直接后继，取其中$y_1,\cdots,y_{n+1}$,由于$\mathcal{F}^\Lambda$中世界为极大一致集，这样对任$x\neq y\in\mathcal{F}^\Lambda$ 总有公式φ在x中，而不在y中,故有公式φ_j只属于y_j，不属于$\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}-\{y_j\}$中任一点，$j=1,\cdots,n+1$.
取$\psi_j=(\bigwedge_{i\neq j}\neg\varphi_i)\wedge\varphi_j\quad j=1,\cdots,n+1$.
由于各y_j极大一致，从而ψ_j属于y_j，$j=1,\cdots,n+1$,这样得$\bigwedge_{j=1}^n\Diamond\psi_j$属于$x$，又$alt_n\in x$,从而$\bigvee_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\Diamond(\psi_i\wedge\psi_j)$属于$x$，这样有$y$'、有$1\leqslant i<j\leqslant n+1$，使$x\mathcal{R}y$'且$\psi_i\wedge\psi_j$在$y$'中。但是$\psi_i$中有合取支$\neg\varphi_j$,$\psi_j$中有合取支$\varphi_j$，这样就与$y$'为一致集矛盾。

命题 4 *对任意$I,J\subseteq N^*,I\neq J$则有$\Lambda_I\neq\Lambda_J$ 。*
证：不妨令$\varphi_{j+1}\in\Lambda_I-\Lambda_J$,取框架$\mathcal{F}$=<$\mathcal{W}$，$\mathcal{R}$>，其中$\mathcal{W}=\{j+1,j_1,j_2,\cdots,0\}$，$\mathcal{R}=\{<j+1,j_1>,<j+1,j_2>,\cdots,<1,0>\}$。
因为$\mathcal{W}$中每个点都至多有两个直接后继，所以alt_2在$\mathcal{F}$上有效，也易验证对任$i\in N^*$只要$i\neq j+1$，φ_i也在这个框架上有效，从而Λ_J就在$\mathcal{F}$上有效。
但是，在$\mathcal{F}$ 上作赋值$\mathcal{V}$,使$\mathcal{V}(p)=\{j_1\}$，就有<$\mathcal{F}$,$\mathcal{V}$>, $j+1\nvDash\varphi_{j+1}$,因为α_j在世界j_1,j_2上都成立，但是p在世界j_1上成立,而$\neg p$在世界j_2上成立。
这样Λ_I就不在$\mathcal{F}$上有效。

命题 5 *(Bellissima)*对任意$J \subseteq N^*$,Λ_J都是典范的正规逻辑。
证：令$\mathcal{F}_{\Lambda_J}$为Λ_J的典范框架。取$A_{\Lambda_J} := \{\widehat{\varphi} | \varphi \in For(\ell)\}$，其中$\widehat{\varphi} := \{x \in \mathcal{W}_{\Lambda_J} | \varphi \in x\} = \mathcal{V}_{\Lambda_J}(\varphi)$,这里$\mathcal{V}_{\Lambda_J}$为典范赋值。$\mathcal{F}_{\Lambda_J}$上的赋值$\mathcal{V}$称为可许的，若对任$p \in Var(\ell)$,$\mathcal{V}(p) \in A_{\Lambda_J}$。
(a)对任$\mathcal{F}_{\Lambda_J}$上的可许赋值$\mathcal{V}$，对任$\varphi \in \Lambda_J$，$\mathcal{V}(\varphi) = \mathcal{W}_{\Lambda_J}$
不妨设$Var(\varphi) = \{p_1, \cdots, p_n\}$，由于$\mathcal{V}(p_i) \in A_{\Lambda_J}$，则相应有$\psi_i$，使$\mathcal{V}_{\Lambda_J}(\psi_i) = \mathcal{V}(p_i)$ $i=1,\cdots,n$。
从而$\mathcal{V}(\varphi) = \mathcal{V}_{\Lambda_J}(\varphi(\psi_1/p_1, \cdots, \psi_n/p_n))$，又由$\varphi \in \Lambda_J$得$\varphi(\psi_1/p_1, \cdots, \psi_n/p_n) \in \Lambda_J$，从而有$\mathcal{V}_{\Lambda_J}(\varphi(\psi_1/p_1, \cdots, \psi_n/p_n)) = \mathcal{W}_{\Lambda_J}$。

(b)$\mathcal{F}_{\Lambda_J} \vDash \Lambda_J$。
若不然，设有$\varphi \in \Lambda_J$，有$\mathcal{F}_{\Lambda_J}$ 上赋值$\mathcal{V}$，及$x \in \mathcal{W}_{\Lambda_J}$使$x$不属于$\mathcal{V}$ (φ).
设φ的模态度$md(\varphi)$为d，记$X_i := \{y \in \mathcal{W}_{\Lambda_J} |$有$y_1, y_2, \cdots, y_i \in \mathcal{W}_{\Lambda_J}$使得$y_1 \mathcal{R}_{\Lambda_J} y_2 \mathcal{R}_{\Lambda_J} \cdots \mathcal{R}_{\Lambda_J} y_i$,其中$y_1 = x, y_i = y\}$，$i = 2 \cdots d+1$，记$X = \bigcup_{i=2}^{d+1} X_i \cup \{x\}$。
注意到alt_2 是sahlqvist公式，从而有$\mathcal{F}_{\Lambda_J} \vDash alt_2$，这样据命题3知，$\mathcal{W}^{\Lambda_J}$中每个元素至多有2个直接后继，从而$X$有穷。不妨就令$X := \{x_1, \cdots, x_n\}$，对任$1 \leqslant i \neq j \leqslant n$，取$\varphi_{ij} \in x_i - x_j$，由各$x_i$ 为不同的极大一致集保证这样可行。令$s(i,j) := \widehat{\varphi}_{ij}, s(i) := \bigcap_{j \neq i} s(i,j)$，则$s(i) \in A_{\Lambda_J}$并且有$x_j \in s(i)$ iff $j=i$；作$\mathcal{F}_{\Lambda_J}$上的赋值$\mathcal{V}$'使得对任意$p \in Var(\ell)$, $\mathcal{V}'(p) = \cup\{s(i) | x_i \in \mathcal{V}(p) \cap X\}$，则$\mathcal{V}$'为可许赋值，并且对任$y \in X_i, 0 \leqslant i \leqslant d$,对任$\psi \in For(\ell), md(\psi) \leqslant d-i$有$<\mathcal{F}_{\Lambda_J}, \mathcal{V}>, y \vDash \psi$ iff $<\mathcal{F}_{\Lambda_J}, \mathcal{V}'>, y \vDash \psi$,这样就得$x$不属于$\mathcal{V}'(\varphi)$,与(a)矛盾。

由上面的命题即可得：

命题 6 *NEXTK*中有$2^{\aleph_0}$个典范的逻辑。

下面说明NEXTK中也有$2^{\aleph_0}$个不典范的逻辑。

命题 7 对任$I \subseteq N^*$,L_I一致。
证：类似命题1可验证$\{VB, \varphi_i | \ i \in N^*\} \subseteq Ver$。

命题 8 对任意$I, J \subseteq N^*, I \neq J$则有$L_I \neq L_J$。
证：类似命题4。类似取一个框架，只是增加非0点到0的通达关系，即可区分它们。

命题 9 对任意框架$\mathcal{F} = <\mathcal{W}$，$\mathcal{R}>$,若$\mathcal{W}$中的每个元素要么是死点，要么至少通达到一个死点，那么$\mathcal{F} \vDash mv$。
证：对$\mathcal{F}$上任赋值$\mathcal{V}$，对任$x \in \mathcal{W}$

(a)若x是死点，则$x \in \mathcal{V}(\Box p)$，从而有$x \in \mathcal{V}(mv)$。
(b)若x通达到一个死点，则$x \in \mathcal{V}(\Diamond\Box p)$，也有$x \in \mathcal{V}(mv)$。

命题 10 *对任意框架$\mathcal{F}$=<$\mathcal{W}$，$\mathcal{R}$>,若$\mathcal{F} \vDash VB$，则$\mathcal{F} \vDash mv$。*
证：若$\mathcal{F} \nvDash mv$，则据命题9有$w^* \in \mathcal{W}$，使得$\mathcal{R}$ $(w^*) \neq \varnothing$，并且对任意$w' \in \mathcal{R}$ (w^*)，w'都不为死点，固定一个$u^* \in \mathcal{R}$ (w^*)，作$\mathcal{F}$ 上赋值$\mathcal{V}$，使得$\mathcal{V}(p) = \varnothing$,$\mathcal{V}(q) = \mathcal{W} - \{u^*\}$，则可得$w^*$不属于$\mathcal{V}(VB)$，从而$\mathcal{F} \nvDash VB$。

取框架$\mathcal{F}$=<$\mathcal{W}$，$\mathcal{R}$>,其中$\mathcal{W} = N \cup \{\omega, \omega+1\}$，$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$满足对任$i, j \in \mathcal{W}$，
i$\mathcal{R}$j iff (1)$i > j$且$i \neq \omega + 1$或者(2)$i = \omega + 1, j = \omega$。
$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}$，称之为可许集，若它满足(1)$\mathcal{X}$不包含$\omega$且它有限，或者(2)$\mathcal{W}$-$\mathcal{X}$满足(1)。
易见$\varnothing$、$\mathcal{W}$都为可许集。
记A_1, A_2分别为所有满足条件(1)、(2)的可许集的集合，记$A = A_1 \cup A_2$，这样A就是所有可许集的集合。
称框架$\mathcal{F}$上的赋值$\mathcal{V}$为可许赋值，若它满足：对任意$p \in Var(\ell)$,$\mathcal{V}(p) \in A$。
记$\Pi = \{<\mathcal{F},\mathcal{V}> | \mathcal{V}$为可许赋值$\}$

命题 11 *若$\mathcal{V}$为框架$\mathcal{F}$上的可许赋值，那么对任意$\varphi \in For(\ell)$都有$\mathcal{V}(\varphi) \in A$。*
证：对公式复杂度归纳可证，下面给出$\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$、$\varphi = \Box\psi$情形的说明。
a.$\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$时
(1)若$\mathcal{V}(\psi_1)$、$\mathcal{V}(\psi_2)$都在A_1中，则$\mathcal{V}(\varphi)$=$\mathcal{V}(\psi_1) \cup \mathcal{V}(\psi_2)$ 也在A_1中。
(2)若$\mathcal{V}(\psi_1)$、$\mathcal{V}(\psi_2)$都在A_2中，则它们相对$\mathcal{W}$的补都在A_1中，补的交在A_1中，从而$\mathcal{V}(\varphi)$在A_2中。
(3)$\mathcal{V}(\psi_1)$,$\mathcal{V}(\psi_2)$分别在A_1, A_2中，注意到$\mathcal{V}(\psi_1) \cup \mathcal{V}(\psi_2) = \mathcal{W} - [(\mathcal{W} - \mathcal{V}(\psi_1)) - \mathcal{V}(\psi_2)]$，也可立得$\mathcal{V}(\varphi)$在$A_2$中。
b.$\varphi = \Box\psi$时
$\mathcal{V}(\psi)$有两种可能，分别证之。
(1)有$n < \omega$使n不在$\mathcal{V}(\psi)$中，这时对任$m > n$都有m不在$\mathcal{V}(\Box\psi)$中，ω当然也不在$\mathcal{V}(\varphi)$中，同时它也有限，从而属于A_1。
(2)否则，对任$n < \omega$，n都在$\mathcal{V}(\psi)$中，那么$\mathcal{V}(\psi)$在A_2中，从而$\omega \in \mathcal{V}(\psi)$,这样对任$x \in \mathcal{W}$都有$\mathcal{R}(x) \subseteq \mathcal{V}(\psi)$,从而$\mathcal{V}(\varphi) = \mathcal{W}$,在$A$中。

命题 12 *对任意$I \subseteq N^*, \Pi \models L_I$*
证明：首先易证对任$i \in N^*$,公式φ_i都在框架$\mathcal{F}$上有效，因为对$\mathcal{W}$中的每个点，至多只有一个点，它能在一步且不能在两步通达。另外注意到有这样的事实："一个指定了公理集的正规逻辑L，若它的公理的代入实例都在一个模型类上有效，那么它的所有定理都在这个模型类上有效"，因此我们只需证明VB的所有

代入实例都在Π上有效就可完成这个证明。
任取VB的代入实例$\Diamond\Box\alpha\vee\Box(\Box(\Box\beta\rightarrow\beta)\rightarrow\beta)$，记为$VB'$，任取$<\mathcal{F},\mathcal{V}>\in\Pi$，由命题11知$\mathcal{V}(\alpha)$与$\mathcal{V}(\beta)$都在$A$中，下面说明$\mathcal{V}(VB')=\mathcal{W}$。
(1)对0，由$\mathcal{R}(0)=\varnothing$，即可得$0\in\mathcal{V}(\Box(\Box(\Box\beta\rightarrow\beta)\rightarrow\beta))$，从而0在$\mathcal{V}(VB')$中。
(2)对任不是0和$\omega+1$的点σ，由$0\in\mathcal{R}(\sigma)$及$0\in\mathcal{V}(\Box\alpha)$得它们都在$\mathcal{V}(\Diamond\Box\alpha)$中。
(3)$\omega+1$也在$\mathcal{V}(VB')$中。若不然，则有$\omega+1$不在$\mathcal{V}(\Box(\Box(\Box\beta\rightarrow\beta)\rightarrow\beta))$中，从而$\omega$不在$\mathcal{V}(\Box(\Box\beta\rightarrow\beta)\rightarrow\beta)$中，因为$\omega$是$\omega+1$的后继，那么就有$\omega$在$\mathcal{V}(\Box(\Box\beta\rightarrow\beta))$中且不在$\mathcal{V}(\beta)$中，由此易归纳证得所有$n\in N$都在$\mathcal{V}(\beta)$中，从而$\mathcal{V}(\beta)$无穷，那么它不在$A_1$，但是又由$\omega$ 不在它中知它也不在A_2中，这样得$\mathcal{V}$不是可许赋值，矛盾。

命题 13 $\Pi\not\models mv$。
证：作$\mathcal{F}$上可许赋值$\mathcal{V}$使$\mathcal{V}(p)=\varnothing$，易验证$<\mathcal{F},\mathcal{V}>,\omega+1\not\models mv$。

命题 14 *对任意$I\subseteq N^*$,L_I都不是典范的正规逻辑。*
由命题9,10,12,13知各L_I都不是kripke框架完全的，从而它们都不典范。

参考文献

[1] P.Blacburn,M.de Rijike,Y.Venema, Modal Logic,Cambridge University Press,2001

[2] A.Chagrov,M.Zakharyaschev,Modal Logic,Claredon Press,1997

[3] G.Hughes,M.Cresswell, a companion to MODAL LOGIC, Methuen Press, 1984