# 附录：实质蕴含与严格蕴含

陈千千
北京大学 哲学系，北京 100871

Lewis (1914) The Calculus of Strict Implication

## 1 与几何学系统类比

将严格蕴含和实质蕴含的关系与欧几里得几何和非欧几里得几何的关系相类比。从纯数学的角度来看，欧几里得和非欧几里得均是一致的，都是一样的真，只是它们刻画的是不同的空间。从实用的角度来看，欧几里得几何更为方便，因为它与我们日常处理空间物体的方式一致。因此可以说欧几里得几何是实用性上唯一真的那个。对于日常推理来讲，实质蕴涵相当于用非欧几里得几何来解释我们的空间。例如为假的命题蕴含任一命题，为真的命题被任一命题蕴含。而严格蕴含则相当于用欧几里得几何来解释我们的空间。

就像两种几何学一样，实质蕴含与严格蕴含都是同等自洽的数学系统；但它们是应用于不同世界的数学系统。可应用实质蕴含的世界应满足所有的可能性都是真实的(all-possible is the real)，它不能应用于真实与可能性、假与荒谬有区别的世界上。严格蕴含可应用的世界范围要给为广阔一些。其中最重要的一点是，它可以应用在真与必然、假与无意义有区别的世界上。

## 2 两种意义下的析取

在实质蕴含的系统中，命题之间有三种重要的关系——蕴含、析取和合取[1]它们之间可以相互定义。因此，“p蕴含q”（p和q 均为命题）等价于非p和q的析取，等价于“要么p为假，要么q为真”。该析取式又等价于合取的否定，即“‘p 为真且q为假’是假的”。从它们的等价性可以得出，p总是实质蕴含q除非p为真且q为假。这就是导出了实质蕴含的悖论，假命题蕴含任意命题，真命题被任意命题蕴含。

问题出现在“要么…要么（或者）”上。“p蕴含q”等价于“要么p为假，要么q为真”是相当自明的（fairly evident），例如“今天是周一蕴含明天是周二”等价于“要么今天不是周一，要么明天是周二”。“要么p为假，要么q为真”等价于“‘p 为真且q为假’是假的”也是事实，例如“要么今天不是周一，要么现在正在下雨”等价于“‘今天是周一且现在没在下雨’是假的”。

但是这两个析取有或者说应该有不同的含义，它们并不是等同。实质蕴含不区分与蕴含等价的析取和与积的否定等价的析取，这正是它的缺点所在。与积的否定等价的“要么今天不是周一，要么现在正在下雨”并不等价于“今天是周一蕴含现在正在下雨”。与蕴含等价的析取是内涵析取，与积的否定等价的是外延析取，外延析取的显著特征是只要有一个析取肢为真，它就为真。外延析取“要么凯撒死了，要么月亮是由绿色的芝士做的”为真，原因是凯撒已逝。如果p为真，那么外延的“要么p，要么q”就为真，尽管p和q的内容可能是毫无关联的。

这两种析取的含义可以如此对比着看：内涵析取‘要么p，要么q’的含义是：p和q同时为假是不可能的；如果有一个为假，那么另一个必然为真；某一个的否定严格地蕴含另一个的真。外延析取‘要么p，要么q’的含义是：恰好至少有一个命题为真；p和q都

[1]在Lewis这，用的是product来表示conjunction这种关系。

为假是不真的；非p和非q的积是假的。严格蕴含系统与实质蕴含系统最初始的区别是前者区分了这两种析取，而后者没有区分。如果用$p \vee q$表示内涵析取，$p + q$表示外延析取，那么可将这种根本性区别表示如下：

1. 对于实质蕴含：
   $(p \to q) = (\neg p \vee q) = (\neg p + q) = \neg(p \wedge \neg q)$
2. 对于严格蕴含：
   $(p \to q) = (\neg p \vee q) \neq (\neg p + q) = \neg(p \wedge \neg q)$
3. 对于实质蕴含：
   $(p \wedge \neg q) = \neg(\neg p + q) = \neg(\neg p \vee q) = \neg(p \to q)$
4. 对于严格蕴含：
   $(p \wedge \neg q) = \neg(\neg p + q) \neq \neg(\neg p \vee q) = \neg(p \to q)$

# 3 两种系统

| 实质蕴含 | 严格蕴含 |
| --- | --- |
| **M1** $(p \to q) = (\neg p + q)$Df. | **S1** $(p \to q) = (\neg p \vee q)$ |
| **M2** $(p \wedge q) = \neg(\neg p + \neg q)$Df. | **S2** $(p \wedge q) = \neg(\neg p + \neg q)$ |
| | **S3** $(p \vee q) \to (q \vee p)$ |
| **M3** $(p+q) \to (q+p)$ | **S4** $(p+q) \to (q+p)$ |
| **M4** $(p+p) \to p$ | **S5** $(p+p) \to p$ |
| **M5** $p \to (p+q)$ | **S6** $p \to (p+q)$ |
| | **S7** $(p \vee q) \to (p+q)$ |
| | **S8** $(p \vee (q \vee r)) \to (q \vee (p \vee r))$ |
| **M6** $(p+(q+r)) \to (q+(p+r))$ | **S9** $p \vee (q+r) \to (q \vee (p+r))$ |
| | **S10** $(q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r))$ |
| **M7** $(q \to r) \to ((p+q) \to (p+r))$ | **S11** $(q \to r) \to ((p+q) \to (p+r))$ |

## 3.1 实质蕴含

可证实质蕴含里的如下定理：

1. $p \to (q \to r)$
   真命题被任一命题蕴含
2. $\neg p \to (p \to q)$
   假命题蕴含任一命题
3. $\neg(p \to q) \to (p \to \neg q)$
   如果p不蕴含q，那么p蕴含非q
4. $\neg(p \to q) \to (q \to p)$
   任两个命题，如果p不蕴含q，那么q蕴含p。

5. $p \wedge q \to (p \to q)$
   任两个真命题，它们互相蕴含。

6. $\neg p \wedge \neg q \to (p \to q)$
   任两个假命题，它们互相蕴含。

7. $\neg p \wedge q \to (p \to q)$
   任两个命题，其中一个为假，一个为真，那么为假的蕴含为真的。

8. $(p \to r) \to (p \to (q \to r))$
   若给定命题p蕴含r，那么p蕴含r被任一命题蕴含。

9. $p \wedge q \to (\neg p \vee q)$
   如果p和q都为真，那么要么p为假，要么其为真。

10. $\neg(p \to q) \to \neg q$
    如果任给命题p，它不蕴含q，那么q为假。

这些定理无法应用到关于推理和证明的模式上，在这种意义下它们是荒谬的。可能它们并不是关于推理的规则，而是关于某些世界的本质的命题。这些世界是可应用实质蕴含系统的世界，在该世界上，所有可能的必须是真实的，真的必须是必然的，偶然的不存在，假的必须是荒谬且不可能的，反事实假设必须是无意义的。

1. 所有可能的必须是真实的，原因在于在实质蕴含中，不区分内涵析取和外延析取。The disjunction of any two propositions, one of which happens to be true, -‘either Caesar died or the moon is made of green cheese,’-must have the force of a dilemma whose alternatives exhaust the possibilities.

2. 如果‘真命题被任一命题蕴含’，那么‘真的必须是必然真的’是先验真的。被任一断言蕴含的命题，例如笛卡尔的‘我存在(I am)’，是必然真的。特别的是，被自己的否定蕴含的命题也是必然真的，且每一个真命题均可如此被(实质)蕴含。$p \to (\neg p \to q)$是$p \to (q \to p)$的特殊情况。

3. 偶然的不能存在，因为所有事实都是必然如此，它们的真是先验的。

4. 假的是不可能且荒谬的，因为‘假命题蕴含一切’，就连自己的否定也蕴含。$\neg p \to (p \to \neg p)$是$\neg p \to (p \to q)$的特殊情况。每一个为假的命题都(实质)蕴含自己的矛盾，因而是荒谬的。

5. 反事实的假设是无意义的，因为为假本身是荒谬的，且其矛盾必然为真。

### 3.2 严格蕴含

严格蕴含系统区分假与荒谬，区分(仅为)反事实的与不可能的，区分偶然真与必然真。在严格蕴含的定理中没有定理–‘真命题被自己的否定蕴含’。但有定理‘被自己的否定蕴含的命题为真’。

$$(p \vee p) \to (p + p) \qquad S7 \qquad (1)$$
$$(p \vee p) \to p \qquad (1), S5, HS \qquad (2)$$
$$(p \vee p) = (\neg p \to p) \qquad S1 \qquad (3)$$
$$(\neg p \to p) \to p \qquad (2), (3), ES \qquad (4)$$

这个定理被称为必然真理原则(principle of necessary truth)。

荒谬性原则对严格蕴含仍成立，只是不能应用到假命题上。在(4)中用p替换¬p，¬p替换p，我们有$(p \to \neg p) \to \neg p$，即若任一命题p蕴含自身的假，那么p为假。但反过来不成立，在给定的假定中无法证明$\neg p \to (p \to \neg p)$。

在日常意义下，仅反事实就蕴含一切是令人厌恶的。但是不可能的(即荒谬的假设)蕴含一切吗，必然真(其否定是荒谬的)被任一命题蕴含吗？在有了S9，$p \vee (q+r) \rightarrow (q \vee (p+r))$假定后，我们的答案是肯定的。首先，我们有定理$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q \rightarrow r)$，即如果p蕴含q，那么‘p真q假’蕴含任一命题r。当p 蕴含q时，p真q假是不可能的。因此该定理的含义是不可能的蕴含一切。其次，有定理$p \rightarrow \neg(q \wedge \neg q)$，即‘q且非q均为真’的假被任一命题p 蕴含。q和非q均为真是不可能的，因此‘q且非q均为真’的否定是必然真的。进而该定理的含义是必然真被任一命题蕴含。

## 参考文献

Lewis, C. I. (1914). The calculus of strict implication. *Mind*, 23(90):240–247.