分 类 号______________　　　　　　　　密　　级　　内部

学校代码　10574　　　　　　　　　　　学　　号　2008020029

分级模态的元理论初探

A Survey of the Meta-theory of Graded Modalities

硕　士　生　姓　名: 范　　杰

指导教师姓名、职称: 熊明(副教授)

学　科　专　业: 逻　辑　学

研　究　方　向: 形 式 逻 辑

华南师范大学学位评定委员会办公室

二零一一年五月

分级模态的元理论初探

专业：逻辑学　姓名：范杰　导师：熊明

摘　要

分级模态是自 20 世纪 70 年代以来人们研究的一个热门话题。本文在对前人研究成果进行综述的基础上，对分级模态逻辑的元理论进行了初步探讨，包括可靠性、完全性、对应定理、一致性定理、真扩充定理以及一些模型论性质。具体地说，本文重新阐述了各个分级模态逻辑完全性的证明，讨论了分级模态逻辑的模型论性质，包括紧致性、Löwenheim-Skolem 性质、不变性结果、Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果等，证明了分级模态逻辑的对应定理、一致性定理和真扩充定理，以及其模型论性质中某些定理和推论。其中，在证明极小分级模态系统 $Gr(K)$ 的完全性定理时，通过定义一个重要关系 R_k，大大简化了 De Caro [5] 中相应定理的证明；而在证明一致性定理时，通过引入一种重要的化归方法——删分级模态词，从而将分级模态逻辑的一致性问题化归为经典命题逻辑的一致性。

关键词：模态逻辑；分级模态；元理论

A Survey of the Meta-theory of Graded Modalities

Major: Logic Name: Jie Fan Supervisor: Ming Xiong

ABSTRACT

Graded modalities have been a live topic for modal logicians since 1970s. By reviewing the previous research results, this paper surveys the meta-theory of graded modalities, such as Soundness Theorem, Completeness Theorem, Correspondence Theorem, Consistency Theorem, Proper Extension Theorem and some model-theoretic properties. To be specific, we elaborate the proofs of completeness of graded modal systems, and discuss some model-theoretic properties of this sort of logic which include Compactness, Löwenheim-Skolem Property, Invariance Results, Van Benthem Characterization Theorem and Definability. We also prove Correspondence Theorem, Consistency Theorem, Proper Extension Theorem and some model-theoretic results. When we prove the Completeness Theorem of the minimal system $Gr(K)$, by defining an important relation R_k, we simplify the proof of the related theorem in De Caro [5]. And also, when we prove the Consistency Theorem, by introducing Deleting Graded Modalities Method, we reduce the consistency of graded modal logics to the consistency of the classical propositional logic.

KEY WORDS: modal logic; graded modalities; meta-theory

目　录

第一章 绪 论

§1.1 分级模态逻辑概况

“分级模态”（Graded modalities）一词是指给可能世界分级，确切地说，是给可通达世界的数目分级。关于分级模态的最早研究可以追溯到 20 世纪 70 年代。

L. F. Goble [12] 最先引入了分级模态词 N_i（$i \in \mathbb{N}$），每个模态词表达不同的必然性程度。例如公式 $N_m\varphi \wedge N_n\psi$ $(m > n)$，它的直观解释是 φ 和 ψ 都是必然的，但是 φ 比 ψ 更必然。受 Tarski 数字量词的启发，K. Fine [11] 引入了所谓的数字模态词：$\Diamond_k$ $(k \in \mathbb{N})$，这些模态词刻画数字可能性。Fine 在论文的开头部分就说到：标准模态逻辑处理命题在至少一个可能世界中为真的概念，这使得我们很自然地考虑命题在至少 k 个可能世界中为真的情况（其中 k 是任意非负整数）。随后，他建立了几个分级模态系统，并证明了它们的完全性。

Goble 和 Fine 的工作激发了一大批逻辑学家的兴趣。M. Fattorosi-Barnaba、F. De Caro、C. Cerrato 等逻辑学家发表了一系列专题论文，为分级模态逻辑的研究做出了重要贡献。Fattorosi-Barnaba & De Caro [8] 提出了 T 的分级模态公理化系统 $\overline{T}$，并证明了 $\overline{T}$ 的完全性、紧致性和可判定性结果。De Caro [5] 运用典范模型技术证明了 K^0、$K4^0$、$S5^0$ 等分级模态公理化系统的完全性结果，并重新证明了 [8] 中提出的 $\overline{T}$ 的完全性结果。同时，De Caro 在 [6] 中建立了分级模态谓词逻辑，证明了 K^0、$K4^0$、$S5^0$、T^0 的一阶扩充版本的完全性定理。Fattorosi-Barnaba & Cerrato [9] 给出了分级模态公理化系统 $S4^0$，并得出了 $S4^0$ 的完全性和紧致性结果。Cerrato [2] 论证了通常的典范模型方法不适用于对称性系统 KB^0、KBD^0、KBT^0，进而给出了一般典范模型（general canonical models）思想，并运用这一思想证明了包括对称性系统在内的主要分级系统的完全性和紧致性定理。E. Pacuit [23] 则通过引入“典范语句（canonical sentences）”思想，给出了分级模态逻辑弱完全性定理的一种新的证明。

1986 年，W. van der Hoek 在和 Fattorosi-Barnaba、De Caro 等人的交流中，提出了将过滤技术运用于分级模态的建议，这一建议后来被 Cerrato 采纳并予以实施。Cerrato [3] 首先论证了通常的过滤技术不适用于对称性系统，然后提出了一般过滤（general filtrations）技术，并运用这一技术证明了 K^0-$S5^0$ 等 15

个主要分级模态系统的可判定性。Fattorosi-Barnaba & S. Grassotti [10] 建立了第一个无穷分级模态系统 $K^0_{\omega_1}$，证明了它的可靠性和完全性，从而使分级模态的研究进入到无穷逻辑的领域。

互模拟是研究模态逻辑的基本概念。但是，标准模态语言的互模拟概念不保持分级模态逻辑的语义。在新的计算观点下，M. de Rijke [24] 定义了适合于分级模态逻辑的互模拟概念（简称“g-互模”），为分级模态逻辑的模型论研究提供了工具。Rijke 使用 g-互模和选择方法重新证明了有穷模型性，并得出了分级模态逻辑在模型层次上的不变性和可定义性结果。Rijke 的这篇文献堪称分级模态逻辑领域的经典之作，它标志着分级模态逻辑在模型论方面的成熟和完善。马明辉 [29] 则从抽象模型论的角度对扩张模态逻辑进行了探讨和研究。

分级模态理论在认知逻辑、计算机科学和人工智能等领域也有广泛的研究和应用。Hoek & J.-J. Ch. Meyer [16] 将分级模态理论应用到认知逻辑中，对 $K_n\varphi$ 进行了认知解读，从而表达不确定的知识。F. Corradini *et al.* [4] 定义了一个分级 Hennessy-Milner 公理化系统 GHML，用来刻画资源互模拟。J. K. Mattila [19] 利用分级模态词建立了修饰语逻辑（modifier logics），并初步探讨了这类逻辑的形式语义。A. Montanari *et al.* [20] 运用集合论方法探讨了知识表达在分级模态逻辑中的自动推理机制。Hoek & Rijke [17] 从广义量词理论、模态逻辑和知识表达三个角度出发，研究了分级模态词和各种概念语言，并证明了相应公理化系统的完全性结果和复杂性结果。另外，A. Nenkova [21] 研究了分级模态逻辑在概念语言中的应用，[18] [22] [25] [26] 等分别研究了分级模态逻辑的表达力与计算复杂性等问题。

§1.2　本文框架及相关符号

本文总共分为六章：第一章是绪论部分，§1.1 概述分级模态逻辑的研究历史，§1.2 系统介绍本文写作框架和所使用的相关符号；第二章，§2.1 给出分级模态的语形和语义，§2.2 介绍各个分级模态系统，§2.3 证明它们的可靠性定理；第三章，通过定义一个重要关系 R_k，大大简化了 De Caro [5] 中 $Gr(K)$ 完全性定理的证明，并得出了其它正规分级系统的完全性定理，另外还初步研究了 R_k 的一些有趣的集合论性质；第四章，我们来考察分级模态逻辑的对应定理、一致性定理和反模型定理，§4.1 通过证明对应定理，得出一个有趣的结果，即

分级模态逻辑对相应标准模态逻辑的扩充仅仅是落在语法的层面上，§4.2 引入删分级模态词方法，通过运用语形和语义两种方法来证明分级模态系统的一致性定理，从而为我们前面对于极大一致集的应用提供了合法性依据，§4.3 通过证明反模型定理，得出分级模态逻辑的真扩充定理，即本文提到的基本分级模态系统之间的扩充关系实际上是一种真扩充；第五章是分级模态逻辑的模型论部分，§5.1 通过引入分级模态逻辑的标准翻译，将分级模态逻辑的紧致性和 Löwenheim-Skolem 性质归约为一阶逻辑中相应性质的证明，§5.2 研究分级模态逻辑在模型层次的不变性结果，首先介绍标准模态逻辑在模型层次的不变性结果，然后将这些结果转移到分级模态逻辑，§5.3 通过引入分级互模拟（简称为“g-互模”）这一工具来讨论分级模态逻辑中的 Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果。第六章是结语部分，总结了本文所作的工作，指出了其中的亮点，并提出了一些有待研究的问题。

本文所使用的符号可以分为五大类：元语言符号、语法符号、语义符号、集合论符号、其它符号。元语言符号有：$::=$（读作“包括”或“由……构成”），$|$（读作“或者”），$:=$（读作“定义为”），$\Leftrightarrow$ 或 iff（“当且仅当”），$\Rightarrow$（“左推右”），$\Leftarrow$（“右推左”），$\sim$（“并非”），&（“并且”）；语法符号有：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Diamond_n, \Box_n, \Diamond!_n$（依次读作“否定”，“合取”，“析取”，“蕴涵”，“等值”，“至少 n 个可通达世界使得 $\cdots$ 成立”，“少于 n 个可通达世界使得 $\cdots$ 不成立”，“恰好 n 个可通达世界使得 $\cdots$ 成立”），$\top$（常真式），$\bot$（常假式），$\wedge\Phi$（公式集 Φ 中所有公式的合取），$\vee\Phi$（公式集 Φ 中所有公式的析取），$\vdash$（可证或推演符号）；语义符号有：$\vDash$（有效或衍推符号）；集合论符号有：$\varnothing$（空集），$\in$（属于关系），$\subseteq$（子集关系），$\subset$（真子集关系），$\cap$（集合的交运算），$\cup$（集合的并运算），$\wp$（幂集运算），$\times$（卡氏积运算），$\langle , \rangle$（有序组），$=$（等于关系）；其它符号有：$\because$, $\therefore$（“因为，所以”），$\dashv$（结束符，表示定理、引理等证明的结束）。[1]

[1]还有一些没有在这里提到的符号，当使用到它们时我们会通过脚注等形式做出相应的说明。

第二章　系统及可靠性定理

本章我们首先给出分级模态的语形和语义，然后介绍各个分级模态系统，并证明它们的可靠性定理。

在本文中，我们总是用 $PV := \{p_0, \cdots, p_n, \cdots\}$ 表示所有命题变元的可数集合，用 $\mathbb{N} := \{0, 1, \cdots, n, \cdots\}$ 表示所有自然数的集合。

§2.1　形式语言和语义

定义2.1.1.（分级模态语言）

分级模态语言 $\mathcal{L}$ 是一集分级模态公式 φ，φ 是由下列形成规则得到的：

$$\varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \to \psi) \mid \Diamond_n\varphi$$

其中 $p \in PV,\ n \in \mathbb{N}$。

以后我们有时将 φ 是分级模态公式记为 $\varphi \in \mathcal{L}$。

定义2.1.2.（缩写定义）其它逻辑符号的定义如下：

$(\varphi \wedge \psi) := \neg(\varphi \to \neg\psi)$,

$(\varphi \vee \psi) := (\neg\varphi \to \psi)$,

$(\varphi \leftrightarrow \psi) := ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$,

$\Diamond!_n\varphi := (\Diamond_n\varphi \wedge \neg\Diamond_{n+1}\varphi) \quad (n \in \mathbb{N})$,

$\Box_n\varphi := \neg\Diamond_n\neg\varphi \quad (n \in \mathbb{N})$,

$\top := (p_n \vee \neg p_n) \quad (n \in \mathbb{N})$,

$\bot := \neg\top$.

在上述定义中，我们引入了新算子 $\Diamond_n$ $(n \in \mathbb{N})$。注意这不只是一个算子，而是由可数多个算子 $\Diamond_0, \Diamond_1, \cdots, \Diamond_n, \cdots$ 构成的。任给 $n \in \mathbb{N}$，$\Diamond_n\varphi$ 的直观意思是“φ 在至少 n 个可通达世界中成立”，或读作“φ 在至少 n 个后继中成立”。我们把这些算子统称为分级可能算子。相应的，我们把它们的对偶 $\Box_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 统称为分级必然算子，$\Box_n\varphi$ 的直观意思是“φ 在少于 n 个后继中不成立”；$\Diamond!_n$ $(n \in \mathbb{N})$统称为分级恒等算子，$\Diamond!_n\varphi$ 的直观意思是“φ 在恰好 n 个后继中成立”。这些在下文的语义定义及其推论中将会更加清楚。

这样，$\Diamond_0\varphi$ 的直观意思就是"φ 在至少 0 个可通达世界中成立"，相当于 $\top$；$\Diamond_1\varphi$ 相当于 $\Diamond\varphi$，$\Diamond_1$ 相当于标准可能算子 $\Diamond$。相应的，$\Box_0\varphi$ 相当于 $\bot$，$\Box_1$ 相当于标准必然算子 $\Box$。包磊 [27] 提供了分级可能算子独立性的一个证明，因此分级模态语言是对标准模态语言的一种有效扩充。

约定：如不特别提到，本文中我们总是使用元变元 $p, q, \cdots$（有时加下标）来表示命题变元，元变元 $\varphi, \psi, \cdots$（有时加下标）表示 $\mathcal{L}$ 中的公式，$\Gamma, \Delta, \cdots$（有时加下标）表示公式集，也就是 $\mathcal{L}$ 的子集，$m, n, \cdots$（有时加下标）表示自然数。

同时，为了省略多余的括号，本文中我们约定：公式最外围的括号可以省略，并且联接词的结合力按照如下顺序依次减弱：$\neg, \Diamond_n(\Box_n, \Diamond!_n), \wedge(\vee), \rightarrow, \leftrightarrow$，且相同联接词或结合力相同的联接词遵循右结合原则。

下面我们来描述分级模态逻辑的语义。我们采用 Kripke 语义，依次给出框架、模型、语义定义以及可满足、有效、衍推等概念的定义如下。

定义2.1.3.（框架）

称 $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ 是框架，如果

① W 是所有可能世界构成的集合。$W \neq \varnothing$；

② R 是 W 上的二元关系，即 $R \subseteq W \times W$。R 称为可通达关系。为了下文表述方便，记 $R(w) = \{w' \in W : wRw'\}$。$w' \notin R(w)$ 也记为 $\sim wRw'$。

定义2.1.4.（模型）

称 $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V\rangle$ 是模型，如果

① $\mathfrak{F}$ 是一框架；

② $V:\ PV \times W \ \rightarrow\ \{0, 1\}$ 是赋值映射。$V(p, w) = 1$ 表示 p 在 w 中为真。

定义2.1.5.（语义定义）

① $V(p, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w \in \sigma(p)$

② $V(\neg\varphi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad V(\varphi, w) = 0$

③ $V(\varphi \rightarrow \psi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad V(\varphi, w) = 0$ 或 $V(\psi, w) = 1$

④ $V(\Diamond_n\varphi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\{w' \in W : w' \in R(w)\ \&\ V(\varphi, w') = 1\}| \geqslant n$

说明：$\sigma(p)$ 表示所有使得 p 在其中为真的世界构成的集合，简称 p 的点集。因此，$w \in \sigma(p)$ 意思是 p 在世界 w 中为真。同时，$|X|$ 表示集合 X 的基数。称 φ 在 w 点上为真或在 w 点上可满足，如果 $V(\varphi, w) = 1$。

据上述定义，我们有

推论2.1.6. 其它逻辑符号的语义：

⑤ $V(\varphi \wedge \psi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad V(\varphi, w) = 1$ 且 $V(\psi, w) = 1$

⑥ $V(\varphi \vee \psi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad V(\varphi, w) = 1$ 或 $V(\psi, w) = 1$

⑦ $V(\varphi \leftrightarrow \psi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (V(\varphi, w) = 1 \;\Leftrightarrow\; V(\psi, w) = 1)$

⑧ $V(\Box_n \varphi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\{w' \in W : w' \in R(w) \;\&\; V(\varphi, w') = 0\}| < n$

⑨ $V(\Diamond !_n \varphi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\{w' \in W : w' \in R(w) \;\&\; V(\varphi, w') = 1\}| = n$

定义2.1.7. （可满足、有效、衍推）

令框架 $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$，模型 $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$，$\varphi \in \mathcal{L}$。称 φ 在 $\mathfrak{M}$ 上可满足，如果 φ 在 $\mathfrak{M}$ 的某个点上可满足。此时我们也称 φ 有模型。称 φ 在 $\mathfrak{F}$ 上可满足，如果 φ 在 $\mathfrak{F}$ 的某个模型上可满足。称 φ 在 $\mathfrak{M}$ 上有效，记为 $\mathfrak{M} \vDash \varphi$，如果 φ 在 $\mathfrak{M}$ 的每个点上都可满足。称 φ 在 $\mathfrak{F}$ 上有效，记为 $\mathfrak{F} \vDash \varphi$，如果 φ 在 $\mathfrak{F}$ 的所有模型上都有效。称 φ 在框架类 F 上有效，记为 $\mathrm{F} \vDash \varphi$，如果 φ 在 F 的所有框架上都有效。称 φ 有效，记为 $\vDash \varphi$，如果 φ 在所有框架类上都有效。称 φ 衍推 ψ，记为 $\varphi \vDash \psi$，如果 $\vDash \varphi \to \psi$。这些定义也可推广到公式集。

§2.2 分级模态系统

这一节介绍分级模态系统。首先是极小系统 $Gr(K)$，它是包含下列公理模式，并且在下列初始规则下封闭的最小集合：

定义2.2.1. 公理模式和初始规则：

$Ax.1$ 所有重言式的代入特例

$Ax.2$ $\Diamond_n \varphi \to \Diamond_m \varphi \quad (n \geqslant m)$

$Ax.3$ $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond_n \varphi \to \Diamond_n \psi) \quad (n \in \mathbb{N})$

$Ax.4$ $\Diamond !_0(\varphi \wedge \psi) \to ((\Diamond !_{n_1} \varphi \wedge \Diamond !_{n_2} \psi) \to \Diamond !_{n_1+n_2}(\varphi \vee \psi)) \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{N})$

MP: 从 φ 和 $\varphi \to \psi$ 推出 ψ

RN: $\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash \Box \varphi$

说明：上述公理模式以后简称为公理。其中，$Ax.2$-$Ax.4$ 都与分级有关，统称为 $Gr(K)$ 的刻画公理。$Ax.2$ 说明了分级算子之间的强弱关系，它的意思是"若 φ 至少有 n 个后继点，且 $n \geqslant m$，则它也至少有 m 个后继点"[1]；$Ax.3$ 说明

[1] "φ 的后继点"是指后继中使得 φ 为真的点，下同。

了分级必然算子和分级可能算子之间的关系，它的意思是“若 φ 蕴涵 ψ 在所有后继中都成立，并且 φ 至少有 n 个后继点，则 ψ 也至少有 n 个后继点”；$Ax.4$ 说明了分级恒等算子之间的关系，它的意思是“满足两个不相容公式的点的数目，恰好是分别满足其中每个公式的点的数目之和”。

推演、形式证明和内定理的概念如通常定义，并用 $Th(\Lambda)$ 表示系统 Λ 的内定理集。

据 [15]，容易证明：

定理2.2.2. 下列都是 $Gr(K)$ 的内定理：

$(THM1)$ $\vdash \Diamond_{n+1}\varphi \to \Diamond_n\varphi$

$(THM2)$ $\vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box_n\varphi \to \Box_n\psi)$

$(THM3)$ $\vdash \Diamond_n(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond_n\varphi \wedge \Diamond_n\psi$

$(THM4)$ $\vdash \Diamond!_n\varphi \wedge \Diamond!_m\varphi \to \bot \quad (n \neq m)$

$(THM5)$ $\vdash \Box_n\neg\varphi \leftrightarrow \Diamond!_0\varphi \triangledown \Diamond!_1\varphi \triangledown \cdots \triangledown \Diamond!_{n-1}\varphi$ （$\triangledown$ 表示“不相容析取”）

$(THM6)$ $\vdash \neg\Diamond_n(\varphi \vee \psi) \to \neg\Diamond_n\varphi$

$(THM7)$ $\vdash \Diamond_{n+m}(\varphi \vee \psi) \to \Diamond_n\varphi \vee \Diamond_{m+1}\psi$

$(THM8)$ $\vdash \Diamond!_n\varphi \wedge \Diamond_m\varphi \to \bot \quad (m > n)$

$(THM9)$ $\vdash \Diamond_n(\varphi \wedge \psi) \wedge \Diamond_m(\varphi \wedge \neg\psi) \to \Diamond_{n+m}\varphi$

$(THM10)$ $\vdash \Diamond!_0(\varphi \wedge \psi) \wedge \Diamond_n\varphi \wedge \Diamond_m\psi \to \Diamond_{n+m}(\varphi \vee \psi)$

并且，易证 $Gr(K)$ 的下列导出规则：

论断2.2.3. （$Gr(K)$ 的导出规则） 任给 $n \in \mathbb{N}$，

① 若 $\vdash \varphi \to \psi$，则 $\vdash (\Diamond_n\varphi \to \Diamond_n\psi) \wedge (\Box_n\varphi \to \Box_n\psi)$.

② 若 $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$，则 $\vdash (\Diamond_n\varphi \leftrightarrow \Diamond_n\psi) \wedge (\Box_n\varphi \leftrightarrow \Box_n\psi)$.

③ （等价置换规则）若 ϕ 是 φ 的子公式且 $\vdash \psi \leftrightarrow \phi$，则 $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi[\psi/\phi]$，其中 $\varphi[\psi/\phi]$ 是用 ψ 置换 φ 中特定的 ϕ 得到的结果。

④ 若 $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$，则 $\vdash \Diamond!_n\varphi \leftrightarrow \Diamond!_n\psi$.

⑤ $\vdash \Diamond_n\varphi \leftrightarrow \neg\Box_n\neg\varphi$.

说明：由 ⑤ 我们易得：$\Box_n$ 和 $\Diamond_n$ 是互为对偶的，因此我们也可以把 $\Box_n$ 作为初始算子，$\Diamond_n$ 作为被定义算子。

据 $Ax.1$、初始规则和上述 $(THM2)$（令 $n = 1$），我们可得到标准模态系统 K，因此 K 是 $Gr(K)$ 的子系统。

接下来介绍 $Gr(K)$ 的扩充系统。在下文中，为了清晰起见，我们一般用 $Gr(\Lambda)$ 表示标准模态系统 Λ 的分级版本，用 φ^0 表示 $Gr(\Lambda)$ 的特征公理。首先，考虑下列公理（模式）：

$(D^0)\quad \Box\varphi \to \Diamond\varphi \qquad\qquad (T^0)\quad \varphi \to \Diamond\varphi \qquad\qquad (B^0)\quad \varphi \to \Box\Diamond\varphi$

$(4^0)\quad \Diamond\Diamond_n\varphi \to \Diamond_n\varphi \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad\qquad (5^0)\quad \Diamond_n\varphi \to \Box\Diamond_n\varphi \quad (n \in \mathbb{N})$

$(Ax.5)\quad \Box(\varphi \to \Diamond!_m\varphi) \to \neg\Diamond!_n\varphi \qquad (m, n \in \mathbb{N},\ \ \frac{n}{m} \notin \mathbb{N})$

$(Ax.6)\quad \Diamond_{pm}(\psi \wedge \Diamond!_m\psi \wedge \Diamond_n(\varphi \wedge \Diamond_m\psi)) \to \Diamond_{pn}\varphi \quad (m, n, p \in \mathbb{N},\quad m \neq 0)$

然后，定义 $Gr(K)$ 的各个扩充系统如下：

$Gr(KD) \ := \ Gr(K) + D^0 \qquad\qquad Gr(KT) \ := \ Gr(K) + T^0$

$Gr(KB) \ := \ Gr(K) + B^0 \qquad\qquad Gr(K4) \ := \ Gr(K) + 4^0$

$Gr(K5) \ := \ Gr(K) + 5^0 \qquad\qquad Gr(KDB) \ := \ Gr(KD) + B^0$

$Gr(KD4) \ := \ Gr(KD) + 4^0 \qquad\qquad Gr(KD5) \ := \ Gr(KD) + 5^0$

$Gr(K45) \ := \ Gr(K4) + 5^0 \qquad\qquad Gr(KD45) \ := \ Gr(KD4) + 5^0$

$Gr(KTB) \ := \ Gr(KT) + B^0 \qquad\qquad Gr(K4B) \ := \ Gr(K4) + B^0$

$Gr(S4) \ := \ Gr(KT) + 4^0 + (Ax.5) + (Ax.6) \qquad Gr(S5) \ := \ Gr(KT) + 5^0$

可以看出，以上定义的各个分级模态系统是相应的标准模态系统的分级扩充，我们把它们统称为正规分级系统。其中，$Gr(K), Gr(KD), Gr(KT), Gr(KTB), Gr(S4), Gr(S5)$ 都是基本系统。

在此定义可靠性和完全性的概念。

定义2.2.4. （可靠性和完全性）令 $\mathbb{F}$ 是框架类，Λ 是系统。

称 Λ 相对于 $\mathbb{F}$ 是可靠的，如果任给公式 φ，若 $\vdash_\Lambda \varphi$，则 $\mathbb{F} \vDash \varphi$。

称 Λ 相对于 $\mathbb{F}$ 是完全的，如果任给公式 φ，若 $\mathbb{F} \vDash \varphi$，则 $\vdash_\Lambda \varphi$。

§2.3　可靠性定理

这一节我们证明前面提到的各个分级模态系统的可靠性定理。

定理2.3.1. （$Gr(K)$ 的可靠性定理）

$Gr(K)$ 相对于所有框架的类是可靠的。

证明： 思路是证明 $Gr(K)$ 的每个公理在任意框架上都有效，并且 MP 和 RN 在任意框架上都保持有效性。

任给框架 $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$，显然 $Ax.1$ 在 $\mathfrak{F}$ 上是有效的，且易证 MP 和 RN 在 $\mathfrak{F}$ 上都保持有效性。因此只需证 $Ax.2$ - $Ax.4$ 在 $\mathfrak{F}$ 上都是有效的。

$Ax.2$ 的证明：任给 $\mathfrak{F}$ 上的模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ 以及 $w \in W$，若 $V(\Diamond_n \varphi, w) = 1$，则 $|\{w' \in W : w' \in R(w) \ \& \ V(\varphi, w') = 1\}| \geqslant n$，而 $n \geqslant m$，因此有：$|\{w' \in W : w' \in R(w) \ \& \ V(\varphi, w') = 1\}| \geqslant m$。$\therefore\ V(\Diamond_m \varphi, w) = 1$。

$Ax.3$ 的证明：任给 $\mathfrak{F}$ 上的模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ 以及 $w \in W$，若 $V(\Box(\varphi \to \psi), w) = 1$ 且 $V(\Diamond_n \varphi, w) = 1$，则 $v \in R(w) \Rightarrow V(\varphi \to \psi, v) = 1$，且 $|\{v \in W : v \in R(w) \ \& \ V(\varphi, v) = 1\}| \geqslant n$。则 $|\{v \in W : v \in R(w) \ \& \ V(\psi, v) = 1\}| \geqslant n$。$\therefore$ $V(\Diamond_n \psi, w) = 1$。

$Ax.4$ 的证明：任给 $\mathfrak{F}$ 上的模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ 以及 $w \in W$，若 $V(\Diamond!_0(\varphi \wedge \psi), w) = 1$ 且 $V(\Diamond!_{n_1}\varphi \wedge \Diamond!_{n_2}\psi), w) = 1$，则有 $|\{w' \in W : w' \in R(w) \ \& \ V(\varphi \wedge \psi, w') = 1\}| = 0$，$|\{w' \in W : w' \in R(w) \ \& \ V(\varphi, w') = 1\}| = n_1$ 以及 $|\{w' \in W : w' \in R(w) \ \& \ V(\psi, w') = 1\}| = n_2$，则易得：

$$|\{w' \in W : w' \in R(w) \ \& \ V(\varphi \vee \psi, w') = 1\}| = n_1 + n_2 - 0 = n_1 + n_2$$

$\therefore\ V(\Diamond!_{n_1+n_2}(\varphi \vee \psi), w) = 1$。从而该定理得证。 $\dashv$

从 $Gr(K)$ 的可靠性定理，我们很容易得到它的几个基本扩充系统的可靠性定理。

定理2.3.2. （$Gr(K)$ 的基本扩充系统的可靠性定理）

① $Gr(KD)$ 相对于持续框架类是可靠的。

② $Gr(KT)$ 相对于自返框架类是可靠的。

③ $Gr(KTB)$ 相对于自返且对称框架类是可靠的。

④ $Gr(S4)$ 相对于自返且传递框架类是可靠的。

⑤ $Gr(S5)$ 相对于自返且欧性框架类是可靠的。

证明：①②③ 的证明分别与标准模态系统 KD, KT, KTB 可靠性定理的证明相同，④ 中 $Ax.5, Ax.6$ 有效性的证明参见 Fattorosi-Barnaba *et al.* [9]，在此省略。我们只证明 4^0 和 5^0 分别在任意自返传递框架和自返欧性框架上有效。

4^0 的证明：令 $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ 是自返传递框架。任给 $\mathfrak{F}$ 上的模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ 以及 $w \in W$，假设 $V(\Diamond\Diamond_n \varphi, w) = 1$，要证 $V(\Diamond_n \varphi, w) = 1$。据假设，有：存在 $v \in W$，使得 wRv 且 $V(\Diamond_n \varphi, v) = 1$。由后者，易得 $|\{u \in W : vRu \ \& \ V(\varphi, u) =$

$1\} \mid \geqslant n$，再据 R 的传递性，可得：$\mid \{u \in W : wRu \ \& \ V(\varphi, u) = 1\} \mid \geqslant n$，即 $V(\Diamond_n\varphi, w) = 1$。

5^0 的证明：令 $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ 是自返欧性框架。任给 $\mathfrak{F}$ 上的模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 以及 $w \in W$，假设 $V(\Diamond_n\varphi, w) = 1$，要证 $V(\Box\Diamond_n\varphi, w) = 1$。据假设，有：$\mid \{u \in W : wRu \ \& \ V(\varphi, u) = 1\} \mid \geqslant n$。任给 $v \in W$ 满足 wRv，据 R 的欧性，易得：$\mid \{u \in W : vRu \,\&\, V(\varphi, u) = 1\} \mid \geqslant n$，即 $V(\Diamond_n\varphi, v) = 1$。因此 $V(\Box\Diamond_n\varphi, w) = 1$。至此该定理得证。 $\dashv$

实际上，我们已经证明了前面提到的 15 个分级模态系统的可靠性定理。

第三章　完全性定理

本章我们主要证明各个分级模态系统的完全性定理。第一节证明几个重要引理和结论；第二节引入一个重要函数，通过定义一个重要关系 R_k，得出一个非常重要的结果，从而简化了 De Caro [5] 中相应结果的证明过程，另外，本节还初步研究了 R_k 的一些有趣的集合论性质；第三节引入可满足集族的概念，证明了 $Gr(K)$ 的完全性定理，并且推广到其它正规分级系统，得出了这些系统的完全性定理。

§3.1　引理的证明

为了简便起见，将所有极大一致集构成的类记为 Θ。极大一致集的定义和性质参见李小五 [28] 中的第二章，在此不再赘述。我们先来证明下列一般性的结论。

引理3.1.1. 令 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_h\in\Theta$ $(h\geqslant 2)$ 且两两不同。则存在 $\psi_1,\cdots,\psi_h\in\mathcal{L}$，使得：$\psi_i\in\Gamma_i$ $(1\leqslant i\leqslant h)$ 且 $\vdash\wedge\{\neg(\psi_i\wedge\psi_j):1\leqslant i<j\leqslant h\}$。

证明：对 $h\geqslant 2$ 运用数学归纳法。

基始步骤：$h=2$。据假设，有 $\Gamma_1\neq\Gamma_2$，因此必存在 $\varphi\in\mathcal{L}$，使得（$\varphi\in\Gamma_1$ 且 $\varphi\notin\Gamma_2$）或（$\varphi\in\Gamma_2$ 且 $\varphi\notin\Gamma_1$）。不妨设 $\varphi\in\Gamma_1$ 且 $\varphi\notin\Gamma_2$。则 $\neg\varphi\in\Gamma_2$。令 $\psi_1=\varphi$，$\psi_2=\neg\varphi$，则 $\psi_i\in\Gamma_i$ $(1\leqslant i\leqslant 2)$ 且 $\vdash\neg(\psi_1\wedge\psi_2)$。

归纳步骤：假设结论对情形 $h-1$ $(h\geqslant 3)$ 成立，要证结论对情形 h 也成立。据归纳假设，存在 $\phi_1,\cdots,\phi_{h-1}\in\mathcal{L}$，使得 $\phi_i\in\Gamma_i$ $(1\leqslant i\leqslant h-1)$ 且 $\vdash\wedge\{\neg(\phi_i\wedge\phi_j):1\leqslant i<j\leqslant h-1\}$。$\because$ $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_{h-1}$ 两两不同且都和 Γ_h 不同，$\therefore$ 存在 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{h-1}$，使得：$\varphi_i\notin\Gamma_i$ $(1\leqslant i\leqslant h-1)$ 且 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{h-1}\in\Gamma_h$。即 $\neg\varphi_i\in\Gamma_i$ $(1\leqslant i\leqslant h-1)$ 且 $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_{h-1}\in\Gamma_h$。令 $\psi_i=\phi_i\wedge\neg\varphi_i$ $(1\leqslant i\leqslant h-1)$，$\psi_h=\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_{h-1}$。$\therefore$ $\psi_i\in\Gamma_i$ $(1\leqslant i\leqslant h)$。又 $\because$ $\vdash\psi_i\wedge\psi_j\to\phi_i\wedge\phi_j$ $(1\leqslant i<j\leqslant h-1)$，$\therefore$ $\vdash\wedge\{\neg(\psi_i\wedge\psi_j):1\leqslant i<j\leqslant h-1\}$。又如果 $1\leqslant i\leqslant h-1$，则 $\vdash\psi_i\wedge\psi_h\to\varphi_i\wedge\neg\varphi_i$，$\therefore$ $\vdash\wedge\{\neg(\psi_i\wedge\psi_h):1\leqslant i\leqslant h-1\}$。由命题逻辑的知识，易得：$\vdash\wedge\{\neg(\psi_i\wedge\psi_j):1\leqslant i<j\leqslant h\}$。　$\dashv$

引理3.1.2. 令 $\Gamma\in\Theta$。

(a) 若 $n,m\in\mathbb{N}$ 且 $\Diamond!_n\varphi,\Diamond!_m\varphi\in\Gamma$，则 $n=m$。

(b) 任给 $\varphi\in\mathcal{L}$，下列命题有且仅有一个成立：

① 任给 $n\in\mathbb{N}$，$\Diamond_{n+1}\varphi\in\Gamma$

② 存在惟一的 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\Diamond!_n\varphi\in\Gamma$。

(c) 令 $n\in\mathbb{N}$。若 $\vdash\varphi\to\psi$ 且 $\Diamond!_n\psi\in\Gamma$，则存在惟一的 $m\in\mathbb{N}$，使得 $\Diamond!_m\varphi\in\Gamma$ 且 $m\leqslant n$。

证明： (a) 假设 $\Diamond!_n\varphi,\Diamond!_m\varphi\in\Gamma$，且 $n\neq m$。则据 $THM(4)$ 和 Γ 的极大一致性，有 $\bot\in\Gamma$，矛盾。因此 (a) 成立。

(b) 据 $\Diamond!_n\varphi$ 的定义和 Γ 的极大一致性，可知 ①② 不能同时成立。

现证 ①② 至少有一成立。设 ① 不成立。则存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\Diamond_{n+1}\varphi\notin\Gamma$，即 $E=\{n\in\mathbb{N}|\Diamond_{n+1}\varphi\notin\Gamma\}\neq\varnothing$。由良序集 $\mathbb{N}$ 的性质，知 E 有最小数，记这个最小数为 m。若 $m=0$，则 $\Diamond_1\varphi\notin\Gamma$，即 $\Diamond!_0\varphi=\neg\Diamond_1\varphi\in\Gamma$。若 $m>0$，由 m 的极小性，得：$\Diamond_{m+1}\varphi\notin\Gamma$ 且 $\Diamond_m\varphi\in\Gamma$。由 $\Diamond_{m+1}\varphi\notin\Gamma$，有 $\neg\Diamond_{m+1}\varphi\in\Gamma$。则 $\Diamond_m\varphi\wedge\neg\Diamond_{m+1}\varphi\in\Gamma$，即 $\Diamond!_m\varphi\in\Gamma$，这样也证得存在 $n=m\in\mathbb{N}$，使得 $\Diamond!_n\varphi\in\Gamma$。据 (a)，这样的 n 是惟一的。$\therefore (b)$ 成立。

(c) 先证 (b) 中的 ① 不成立。假设 ① 成立，则由 $\vdash\varphi\to\psi$ 和论断 2.2.3 ①，有 $\vdash\Diamond_{n+1}\varphi\to\Diamond_{n+1}\psi$。据 ① $\Diamond_{n+1}\varphi\in\Gamma$ 和 Γ 的极大一致性，有：$\Diamond_{n+1}\psi\in\Gamma$，矛盾于题设 $\Diamond!_n\psi\in\Gamma$。$\therefore$ ① 不成立。由 (b) 可得，存在惟一的 $m\in\mathbb{N}$，使得 $\Diamond!_m\varphi\in\Gamma$。再证 $m\leqslant n$。若 $m>n$，则 $m>0$ 且 $m\geqslant n+1$。由 $\Diamond!_m\varphi\in\Gamma$，有 $\Diamond_m\varphi\in\Gamma$。据 $Ax.2$，$\Diamond_{n+1}\varphi\in\Gamma$。如前可证 $\Diamond_{n+1}\psi\in\Gamma$，矛盾。$\therefore$ $m\leqslant n$。(c) 得证。 $\dashv$

引理3.1.3. 令 $\Gamma\in\Theta$。若 $\vdash\wedge\{\neg(\varphi_i\wedge\varphi_j):0\leqslant i<j\leqslant k\}$ 且 $\Diamond!_{n_i}\varphi_i\in\Gamma$ $(0\leqslant i\leqslant k)$，则 $\Diamond!_{n_0+\cdots+n_k}(\vee\{\varphi_i:0\leqslant i\leqslant k\})\in\Gamma$。

证明： 据 Γ 的极大一致性，只需证明：

$(\bigstar)$ 若 ① $\vdash\wedge\{\neg(\varphi_i\wedge\varphi_j):0\leqslant i<j\leqslant k\}$，

则 ② $\vdash\wedge\{\Diamond!_{n_i}\varphi_i:0\leqslant i\leqslant k\}\to\Diamond!_{n_0+\cdots+n_k}(\vee\{\varphi_i:0\leqslant i\leqslant k\})$。

对 $k\geqslant 1$ 运用数学归纳法。

基始步骤：$k=1$。由 ①，有 $\vdash\neg(\varphi_0\wedge\varphi_1)$。则有下列证明序列：

$\vdash \neg(\varphi_0 \wedge \varphi_1)$

$\vdash \Box\neg(\varphi_0 \wedge \varphi_1)$

$\vdash \neg\Diamond(\varphi_0 \wedge \varphi_1)$

$\vdash \Diamond!_0(\varphi_0 \wedge \varphi_1)$

$\vdash \Diamond!_0(\varphi_0 \wedge \varphi_1) \to ((\Diamond!_{n_0}\varphi_0 \wedge \Diamond!_{n_1}\varphi_1) \to \Diamond!_{n_0+n_1}(\varphi_0 \vee \varphi_1))$

$\vdash (\Diamond!_{n_0}\varphi_0 \wedge \Diamond!_{n_1}\varphi_1) \to \Diamond!_{n_0+n_1}(\varphi_0 \vee \varphi_1)$

归纳步骤：假设 (★) 对情形 k 成立，要证 (★) 对情形 $k+1$ 也成立。此时 ① 为 ③

$$\vdash \wedge\{\neg(\varphi_i \wedge \varphi_j) : 0 \leqslant i < j \leqslant k+1\}$$

② 即为 ④

$$\vdash \wedge\{\Diamond!_{n_i}\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k+1\} \to \Diamond!_{n_0+\cdots+n_{k+1}}(\vee\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k+1\})$$

④ 就是我们要证的东西。据 ③，得：

⑤ $\vdash \wedge\{\neg(\varphi_i \wedge \varphi_j) : 0 \leqslant i < j \leqslant k\}$

⑥ $\vdash \wedge\{\neg(\varphi_i \wedge \varphi_{k+1}) : 0 \leqslant i \leqslant k\}$

据 ⑤ 和归纳假设，得 ②。再据 ②，得

⑦ $\vdash \wedge\{\Diamond!_{n_i}\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k+1\} \to \Diamond!_{n_0+\cdots+n_k}(\vee\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k\}) \wedge \Diamond!_{n_{k+1}}\varphi_{k+1}$

要证 ④，由 ⑦，只需证：

⑧ $\vdash \Diamond!_{n_0+\cdots+n_k}(\vee\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k\}) \wedge \Diamond!_{n_{k+1}}\varphi_{k+1} \to \Diamond!_{n_0+\cdots+n_{k+1}}(\vee\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k+1\})$

同 $k=1$ 的情况往证（只需将 $k=1$ 时证明序列中的 $\varphi_0, \varphi_1, n_0, n_1$ 都分别替换为 $(\vee\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k\}), \varphi_{k+1}, n_0+\cdots+n_k, n_{k+1}$）：

⑨ $\vdash \neg((\vee\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k\}) \wedge \varphi_{k+1})$

而这个由 ⑥ 和

$\vdash \wedge\{\neg(\varphi_i \wedge \varphi_{k+1}) : 0 \leqslant i \leqslant k\} \leftrightarrow \neg \vee \{(\varphi_i \wedge \varphi_{k+1}) : 0 \leqslant i \leqslant k\}$

$\vdash \neg \vee \{(\varphi_i \wedge \varphi_{k+1}) : 0 \leqslant i \leqslant k\} \leftrightarrow \neg((\vee\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k\}) \wedge \varphi_{k+1})$

易得，至此归纳完毕。$\therefore$ (★) 成立，从而该引理得证。 $\dashv$

§3.2 关系的引入

为了刻画分级这一思想，需要引入一个重要函数。

定义3.2.1. 令 $\Gamma, \Delta \in \Theta$，$\varphi \in \mathcal{L}$。定义函数 f：$\Theta \times \Theta \to \omega + 1$ 如下：

$$f(\Gamma,\Delta) = \begin{cases} \omega & \text{任给 } \varphi \in \Delta, n \in \mathbb{N}\text{，都有 } \Diamond_{n+1}\varphi \in \Gamma \\ min\{n \in \mathbb{N} : \varphi \in \Delta \ \& \ \Diamond!_n\varphi \in \Gamma\} & \text{否则。} \end{cases}$$

说明：

① 据引理 3.1.2(b) 和公理集合论的相关知识，易知 f 是良定义的。

② $f(\Gamma, \Delta)$ 表示 Γ（的每一副本）可通达到的 Δ 的副本数目。[1]

③ 函数 f 对极大一致集的重复次数进行了规定，因此它在极大一致集之间建立了某种分级方面的联系。注意 $f(\Gamma, \Delta)$ 既可以看作是序数，也可以看作是集合。

例子3.2.2. 0 既可以看作是最小的序数 0，也可以看作是集合 $\varnothing$；ω 既可以看作是最小的无穷序数，也可以看作是集合 $\{0, 1, \cdots, n, n+1, \cdots\}$。

为了证明的方便，本文对 Fine [11] 中所定义的一个重要关系 R_k 进行修改。R_k（k 是任意自然数）定义如下：任给 $\Gamma, \Gamma' \in \Theta$ 以及 $\varphi \in \mathcal{L}$，

$\Gamma R_k \Gamma' \quad iff \quad (\varphi \in \Gamma' \Rightarrow \Diamond_k\varphi \in \Gamma)$

据 R_k 的定义，易得：$\Gamma R_k \Gamma' \quad iff \quad (\Box_k\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma')$

$\Gamma R_k \Gamma'$ 的直观解释是："至少存在 k 个 Γ' 类的世界（即 Γ' 的副本），这些世界都是从 Γ 可通达的。"这个 R_k 和前面定义的函数 f 的联系可以用如下引理表示：

引理3.2.3. 任给 $\Gamma, \Gamma' \in \Theta$ 以及 $k \in \mathbb{N}$，都有：$\Gamma R_k \Gamma' \ \ iff \ \ f(\Gamma, \Gamma') \geqslant k$。

证明： $k = 0$ 时该引理显然成立，只需考虑 $k \geqslant 1$ 的情形。

"$\Rightarrow$"：若 $f(\Gamma, \Gamma') < k$，则存在 $l < k$，使得 $f(\Gamma, \Gamma') = l$。据 f 的定义，有：存在 φ，$\varphi \in \Gamma'$ 且 $\Diamond!_l\varphi \in \Gamma$。据后者，易得 $\Diamond_{l+1}\varphi \notin \Gamma$。又 $k \geqslant l + 1$，因此 $\Diamond_k\varphi \notin \Gamma$，矛盾于 $\varphi \in \Gamma'$ 和 $\Gamma R_k \Gamma'$。

"$\Leftarrow$"：若 $\Gamma R_k \Gamma'$ 不成立，则存在 φ，使得 $\varphi \in \Gamma'$ 且 $\Diamond_k\varphi \notin \Gamma$。若 $f(\Gamma, \Gamma') \geqslant k$，考虑两种情形：

情形 a：$f(\Gamma, \Gamma') = \omega$。据 f 的定义、$\varphi \in \Gamma'$ 和 $k - 1 \in \mathbb{N}$，有 $\Diamond_k\varphi \in \Gamma$。矛盾于

[1] 所谓 Γ 的副本，就是说和 Γ 具有同样真值指派的那些世界（即极大一致集），换句话说，是和 Γ 使得同样的语句在其中取值相同的那些世界，更简单的说，它（们）和 Γ 证实了同样的语句。特别地，Γ 是 Γ 自身的一个副本，所以任一世界的副本总是存在的。Δ 的情形也类似。

$\Diamond_k\varphi \notin \Gamma$。

情形 b：$f(\Gamma,\Gamma') = m$ 且 $m \in \mathbb{N}$。则 $\Diamond!_m\varphi \in \Gamma$，从这个可以得出 $\Diamond_m\varphi \in \Gamma$。再据 $m \geqslant k$，有 $\Diamond_k\varphi \in \Gamma$。矛盾于 $\Diamond_k\varphi \notin \Gamma$。 $\dashv$

上述引理更进一步表明了 $f(\Gamma,\Gamma')$ 的直观意思，即 Γ（的每一副本）所通达到的 Γ' 的副本数目。记 R_1 为 R，则从上述引理很容易得出：

推论3.2.4. $\Gamma R\Gamma' \;\; iff \;\; f(\Gamma,\Gamma') \neq 0$。（其中 $\Gamma,\Gamma' \in \Theta$）

下面我们将表述模态逻辑中一个熟知且非常重要的引理。

引理3.2.5. *令 $\Gamma \in \Theta$，$\varphi \in \mathcal{L}$。若 $\Diamond\varphi \in \Gamma$，则存在 $\Gamma' \in \Theta$，使得 $\Gamma R\Gamma'$ 且 $\varphi \in \Gamma'$。*

证明：参见 P. Blackburn *et al.* [1] 中的引理 4.20。请注意：虽然我们这里不是在典范模型中对它进行证明，但由于 R_k 定义的特殊性，且 $\Diamond_1$ 相当于 $\Diamond$，实际上证明引理所需要的条件都满足，因此该引理成立。 $\dashv$

据推论 3.2.4 和引理 3.2.5，我们可以得出一个非常重要的结果，该结果在后面将会多次被用到：[2]

推论3.2.6. *令 $\Gamma \in \Theta$，$\varphi \in \mathcal{L}$。若 $\Diamond\varphi \in \Gamma$，则存在 $\Gamma' \in \Theta$，使得 $f(\Gamma,\Gamma') \neq 0$ 且 $\varphi \in \Gamma'$。*

我们还可以得出进一步的结论。比如，上述推论的逆显然是成立的。事实上，据 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 的定义，可得到更一般的结论：

推论3.2.7. *令 $\Gamma \in \Theta$，$\varphi \in \mathcal{L}$。若存在 $\Gamma' \in \Theta$，使得 $f(\Gamma,\Gamma') \geqslant k$ 且 $\varphi \in \Gamma'$，则 $\Diamond_k\varphi \in \Gamma$。*

另外，根据集合论的知识，我们可以将 $\Gamma R_k\Gamma'$ 记为 $\langle\Gamma,\Gamma'\rangle \in R_k$。因此，从 R_k 的定义，我们还可得出下列有趣的引理：$\subseteq$ 相对于 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 不是良基的。首先，我们给出如下定义：

定义3.2.8. *称 $\subseteq$ 相对于 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 是良基的，如果不存在无穷序列 $\cdots \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0$。*

[2]参见 De Caro [5]。在他的文章中，为了证明推论 3.2.6，De Caro 需要证明两个重要引理，并且对于 3.2.6 的证明也是运用了联立归纳法，比较复杂；而我们在本文中通过定义 R_k，大大简化了 3.2.6 的证明过程。

接下来证明我们的声称，即

引理3.2.9. *存在无穷序列* $\cdots \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0$。

证明：不失一般性，我们只需证明：

（▲）令 $k, l \in \mathbb{N}$。若 $k \geqslant l$，则 $R_k \subseteq R_l$。

任给 $\Gamma, \Gamma' \in \Theta$，若 $\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \in R_k$，即 $\Gamma R_k \Gamma'$。要证 $\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \in R_l$，即证 $\Gamma R_l \Gamma'$。令 $\varphi \in \Gamma'$，则由 $\Gamma R_k \Gamma'$ 和 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 的定义，有 $\Diamond_k \varphi \in \Gamma$。又 $k \geqslant l$，有 $\Diamond_l \varphi \in \Gamma$。再根据 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 的定义，得 $\Gamma R_l \Gamma'$。因此 $R_k \subseteq R_l$，从而（▲）得证，进而引理得证。 ⊣

从上述引理，易得

引理3.2.10. $(X = \{R_0, R_1, \cdots, R_k, \cdots\}, \subseteq)$ $(k \in \mathbb{N})$ *是全序集，但不是良序集。*

证明：显然 $\subseteq$ 是自返、反对称和传递的，又任给 $R_k, R_l \in X$，由于 $k, l \in \mathbb{N}$，总有 $k \geqslant l$ 或者 $k \leqslant l$，从而据上述引理中的（▲），有 $R_k \subseteq R_l$ 或者 $R_l \subseteq R_k$。因此 $(X, \subseteq)$ 是全序集。但根据上述引理，易得：X 作为自身的非空子集没有最小元，因此 $(X, \subseteq)$ 不是良序集。 ⊣

Fattorosi-Barnaba *et al.* [8] 引入了一个新模态词 $\Diamond_\omega$（ω 是最小无穷序数），定义 $\Diamond_\omega \varphi := \wedge\{\Diamond_n \varphi : n < \omega\}$。[3] 如果我们将上述 R_k 的定义推广到无穷情形，即定义

$\Gamma R_\omega \Gamma' \quad iff \quad (\varphi \in \Gamma' \Rightarrow \Diamond_\omega \varphi \in \Gamma)$

则对上述相应引理和推论的证明稍加修改，我们可以将 $k \in \mathbb{N}$ 的情形推广到无穷情形，即

引理3.2.11. (1) *任给* Γ、$\Gamma' \in \Theta$，*有：*$\Gamma R_\omega \Gamma' \quad iff \quad f(\Gamma, \Gamma') \geqslant \omega$。

(2) *令* $\Gamma \in \Theta$，$\varphi \in \mathcal{L}$。*若存在* $\Gamma' \in \Theta$，*使得* $f(\Gamma, \Gamma') \geqslant \omega$ *且* $\varphi \in \Gamma'$，*则* $\Diamond_\omega \varphi \in \Gamma$。

(3) $\subseteq$ *相对于* R_k $(k \in \omega + 1)$ *不是良基的，即存在无穷序列* $R_\omega \subseteq \cdots \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0$。

(4) $(\{R_0, R_1, \cdots, R_k, \cdots, R_\omega\}, \subseteq)$ $(k \in \omega + 1)$ *是全序集，但不是良序集。因为它的非空子集* $\{R_0, R_1, \cdots, R_k, \cdots\}$ $(k \in \mathbb{N})$ *没有最小元。*

[3] 为了便于表述，我们在此把 $\Diamond_\omega \varphi$ 看作合式公式。

Fattorosi-Barnaba 证明了：紧致性定理只适用于有穷基数的情形，而不能推广到无穷基数。也就是说，如果将分级模态词推广到无穷情形，则紧致性定理不成立。证明如下：考虑 $\Diamond_\omega$，其语义定义为：任给模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 以及 $w \in W$，

$$V(\Diamond_\omega \varphi, w) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\{w' \in W : w' \in R(w) \ \&\ V(\varphi, w') = 1\}| \geqslant \omega.$$ [4]

任取可数多个命题变元 $p, q_0, q_1, \cdots$，定义 $\phi_0 := p \wedge q_0, \phi_1 := p \wedge \neg q_0 \wedge q_1, \cdots, \phi_n := p \wedge \neg q_0 \wedge \cdots \wedge \neg q_{n-1} \wedge q_n, \cdots$。现在考虑 $\Omega = \{\Diamond\phi_n : n < \omega\} \cup \{\neg\Diamond_\omega p\}$。很容易证明：$\Omega$ 是有穷可满足的，但 Ω 不可满足。因此，紧致性定理不成立。

§3.3 定理的证明

这一节我们来证明前面提到的各个正规分级系统的完全性定理。首先来证明系统 $Gr(K)$ 的完全性，然后得出其它正规分级系统的完全性。首先我们要给出一个重要的概念：可满足集族。

定义3.3.1. 可满足集族

令 $\Gamma \in \Theta$。定义 Γ 的可满足集族 $SF(\Gamma)$ 如下：

$$SF(\Gamma) := \cup\{\{\Delta\} \times f(\Gamma, \Delta) : \Delta \in \Theta\}$$

说明：$SF(\Gamma)$ 的直观形式是具有特定性质的卡氏积的并。具体地说，每个极大一致集 Δ 的副本都重复了 $f(\Gamma, \Delta)$ 次，所有的这些都组合起来就构成了 $SF(\Gamma)$。由于卡氏积是有序对的集合，所以 $SF(\Gamma)$ 中的元素都是一些形如 $\langle\Delta, n\rangle$（$n \in \mathbb{N}$）的有序对，其中 $n \in f(\Gamma, \Delta)$ 或者说 $n < f(\Gamma, \Delta)$（$\because$ 据公理集合论的知识，序数上的小于关系等价于属于关系）[5]，据 f 的定义，这是合理的。

为了下文表述方便，我们有时候将有序对 $\langle\Delta, n\rangle$ 简记为 Δ。

定理3.3.2. 任给 $\varphi \in \mathcal{L}$，$n \in \mathbb{N}$ 以及 $\Gamma \in \Theta$，

$$\Diamond_n \varphi \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad |\{\Delta \in SF(\Gamma) : \varphi \in \Delta\}| \geqslant n$$

[4]事实上，我们可以给出另一个等价的语义定义：$V(\Diamond_\omega\varphi, w) = 1 \Leftrightarrow$ 任给 $n < \omega$，都有 $V(\Diamond_n\varphi, w) = 1$。

[5]参见 K. J. Devlin [7], pp.22-23。

证明： $n=0$ 时该定理显然成立，只需考虑 $n\geqslant 1$ 的情形。

“$\Leftarrow$”：假设 $|\{\Delta\in SF(\Gamma):\varphi\in\Delta\}|\geqslant n$ 成立，要证明 $\Diamond_n\varphi\in\Gamma$。

据假设，考虑如下两种情形：

情形 1：存在 $\Delta\in SF(\Gamma)$，使得 $\varphi\in\Delta$ 且 $f(\Gamma,\Delta)\geqslant n$。据后者和引理 3.2.3，有 $\Gamma R_n\Delta$。再据 R_n 的定义和 $\varphi\in\Delta$，有 $\Diamond_n\varphi\in\Gamma$。

情形 2：任给 $\Delta\in SF(\Gamma)$，若 $\varphi\in\Delta$，则 $f(\Gamma,\Delta)<n$。此时，必存在两两不同的极大一致集 Δ_1，$\cdots$，$\Delta_h\in SF(\Gamma)$ $(h\geqslant 2)$，使得 $\varphi\in\Delta_i$，$0<n_i=f(\Gamma,\Delta_i)<n$ $(i=1,\cdots,h)$，且 $s=n_1+\cdots+n_h\geqslant n$。据引理 3.1.1，存在 $\psi_1,\cdots,\psi_h\in\mathcal{L}$，使得 $\psi_i\in\Delta_i$ $(1\leqslant i\leqslant h)$，且 $\vdash\wedge\{\neg(\psi_i\wedge\psi_j):1\leqslant i<j\leqslant h\}$。令 $\phi_1,\cdots,\phi_h\in\mathcal{L}$，使得 $\phi_i\in\Delta_i$ 且 $\Diamond!_{n_i}\phi_i\in\Gamma$ $(1\leqslant i\leqslant h)$。令 $\xi_i=\varphi\wedge\psi_i\wedge\phi_i$ $(1\leqslant i\leqslant h)$。首先注意到

(1) $\xi_i=\varphi\wedge\psi_i\wedge\phi_i\in\Delta_i$ $(1\leqslant i\leqslant h)$

其次，考虑到 $(\xi_i\wedge\xi_j)\to(\psi_i\wedge\psi_j)$，$\neg(\psi_i\wedge\psi_j)\to\neg(\xi_i\wedge\xi_j)$ $(1\leqslant i<j\leqslant h)$ 都是重言式，因此 $\wedge\{\neg(\psi_i\wedge\psi_j):1\leqslant i<j\leqslant h\}\to\wedge\{\neg(\xi_i\wedge\xi_j):1\leqslant i<j\leqslant h\}$ 也是重言式，从而是 $Gr(K)$ 的内定理。又 $\wedge\{\neg(\psi_i\wedge\psi_j):1\leqslant i<j\leqslant h\}$ 也是 $Gr(K)$ 的内定理，据 MP，有

(2) $\vdash\wedge\{\neg(\xi_i\wedge\xi_j):1\leqslant i<j\leqslant h\}$

再次，注意到 $\vdash\xi_i\to\phi_i$，且 $\Diamond!_{n_i}\phi_i\in\Gamma$。据引理 3.1.2(c)，存在 $m\leqslant n_i$，使得 $\Diamond!_m\xi_i\in\Gamma$。另一方面，由 $\Diamond!_m\xi_i\in\Gamma$ 和 (1)，可得 $m\geqslant f(\Gamma,\Delta_i)=n_i$，因此 $m=n_i$，从而有

(3) $\Diamond!_{n_i}\xi_i\in\Gamma$ $(1\leqslant i\leqslant h)$

现在令 $\chi=\vee\{\xi_i:1\leqslant i\leqslant h\}$。据 (2)(3) 和引理 3.1.3，有：$\Diamond!_s\chi\in\Gamma$，$\therefore$ $\Diamond_s\chi\in\Gamma$。同时，$\chi\to\varphi$ 是重言式，因此 $\vdash\chi\to\varphi$。据这个和论断 2.2.3①，有 $\vdash\Diamond_s\chi\to\Diamond_s\varphi$，进而有 $\Diamond_s\varphi\in\Gamma$。又 $s\geqslant n$，$\therefore$ $\Diamond_n\varphi\in\Gamma$。

“$\Rightarrow$”：假定 $\Diamond_n\varphi\in\Gamma$。则 $\Diamond_1\varphi\in\Gamma$，即 $\Diamond\varphi\in\Gamma$。据推论 3.2.6，有

（*） 存在 $\Delta\in\Theta$，使得 $\varphi\in\Delta$ 且 $f(\Gamma,\Delta)\neq 0$。

令 S 是满足（*）的那些极大一致集所组成的类。若 S 是无穷的，则显然有 $|\{\Delta\in SF(\Gamma):\varphi\in\Delta\}|\geqslant n$。只需考虑 S 有穷的情形，即任给 $\Delta\in$ S，都有 $0<f(\Gamma,\Delta)<\omega$。不妨设 S $=\{\Delta_1,\cdots,\Delta_h\}$ 且 S 中的元素两两不同。则 $\varphi\in\Delta_i$ 且 $0<n_i=f(\Gamma,\Delta_i)<\omega$ $(1\leqslant i\leqslant h)$。首先假定 $h\geqslant 2$，只需证明

$s=|\{\Delta\in SF(\Gamma):\varphi\in\Delta\}|=n_1+\cdots+n_h\geqslant n$。

如前定义 ξ_i 和 χ，同理可证 ψ_i,ϕ_i,ξ_i $(1\leqslant i\leqslant h)$ 和 χ 满足前面的 (1)(2)(3)。令

$\beta = \neg \vee \{\psi_i \wedge \phi_i : 1 \leqslant i \leqslant h\}$。考虑下列重言式序列：

$(\varphi \wedge \neg\beta) \leftrightarrow \varphi \wedge \vee\{\psi_i \wedge \phi_i : 1 \leqslant i \leqslant h\}$

$(\varphi \wedge \neg\beta) \leftrightarrow \vee\{\varphi \wedge \psi_i \wedge \phi_i : 1 \leqslant i \leqslant h\}$

$(\varphi \wedge \neg\beta) \leftrightarrow \vee\{\xi_i : 1 \leqslant i \leqslant h\}$

$\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \beta) \vee (\varphi \wedge \neg\beta)$

$\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \beta) \vee \chi$

因此

(4) $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \beta) \vee \chi$

据命题逻辑的知识，易得：

(5) $\vdash \neg(\xi_i \wedge (\varphi \wedge \beta))$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$

同样，我们有：

(6) $\Diamond!_0(\varphi \wedge \beta) \in \Gamma$

若不然，则 $\Diamond_1(\varphi \wedge \beta) \in \Gamma$，即 $\Diamond(\varphi \wedge \beta) \in \Gamma$。据推论 3.2.6，存在 $\Delta \in \Theta$，使得 $\varphi \wedge \beta \in \Delta$ 且 $f(\Gamma, \Delta) \neq 0$。据 $\varphi \wedge \beta \in \Delta$，得 $\varphi \in \Delta$。则 Δ 满足（*），即 $\Delta \in$ S。据 (1)，有 $\xi_i \in \Delta$，因此 $\xi_i \wedge (\varphi \wedge \beta) \in \Delta$。又据 (5)，有 $\neg(\xi_i \wedge (\varphi \wedge \beta)) \in \Delta$，矛盾于 Δ 的一致性。

令 $\gamma = \chi \vee (\varphi \wedge \beta)$。显然 $\neg(\chi \wedge (\varphi \wedge \beta))$ 是重言式，因此 $\vdash \neg(\chi \wedge (\varphi \wedge \beta))$。同时注意到 $\Diamond!_s\chi \in \Gamma$ 以及 (6)。据这些和引理 3.1.3，有 $\Diamond!_s\gamma \in \Gamma$。又据 (4)，有 $\vdash \varphi \leftrightarrow \gamma$。据论断 2.2.3④，易得 $\Diamond!_s\varphi \in \Gamma$。若 $s < n$，则 $s+1 \leqslant n$。据假定 $\Diamond_n\varphi \in \Gamma$，有 $\Diamond_{s+1}\varphi \in \Gamma$，矛盾。因此 $s \geqslant n$。

仍需考虑 $h = 1$ 的情形。在该情形下，ψ_i $(i = 1, \cdots, h)$ 不存在，$\phi_1 \in \Delta_1$，$\Diamond!_{n_1}\phi_1 \in \Gamma$，$s = |\ \{\Delta \in SF(\Gamma) : \varphi \in \Delta\}\ | = n_1 = f(\Gamma, \Delta_1)$，$\varphi \in \Delta_1$。因此 $\chi = \xi_1 = \varphi \wedge \phi_1 \in \Delta_1$。又有 $\beta = \neg\phi_1$，$\gamma = \chi \vee (\varphi \wedge \neg\phi_1)$，易知 $\gamma \leftrightarrow \varphi$ 是重言式，从而 $\vdash \gamma \leftrightarrow \varphi$。同前面可证，$s \geqslant n$。至此该定理证明完毕。 $\dashv$

现在我们准备证明 $Gr(K)$ 的完全性定理。分两步：第一步，建立典范模型；第二步，证明真值引理。在第一步时，我们采用 Henkin 方法，即在 $Gr(K)$ 的典范模型 $M^\Lambda = \langle W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda \rangle$ 中，对于典范世界集 W^Λ 中的每个元素我们考虑极大 Λ 一致集，[6] 并且，由于我们要考虑到分级，我们必须取每个极大一致集的

[6]我们约定，若所提到的系统 Λ 没有产生混淆或不重要，我们通常把“极大 Λ 一致集”简称为“极大一致集”。

副本；典范关系 R^Λ 被合适的定义，需要考虑到分级观念；典范赋值 V^Λ 满足真值引理中命题变元的情形，即“属于当且仅当在其中为真”。在第二步时，证明:“属于当且仅当在其中为真”这一属性适用于所有分级模态公式。

有了这些分析，我们可以定义 $Gr(K)$ 的典范模型如下：

定义3.3.3. （$Gr(K)$ 的典范模型）

称 $M^\Lambda = \langle W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda\rangle$ 是 $Gr(K)$ 的典范模型，如果

(1) $W^\Lambda = \{\langle\Gamma, i\rangle : \Gamma \in \Theta, i < \omega\}$

(2) $\langle\Gamma, i\rangle R^\Lambda\langle\Delta, j\rangle \quad\Leftrightarrow\quad j < f(\Gamma,\Delta)$

(3) $V^\Lambda(p, \langle\Gamma, i\rangle) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad p \in \Gamma$

从上述定义，容易证明下面的结论：

推论3.3.4. $\langle\Gamma, i\rangle R^\Lambda\langle\Delta, j\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \langle\Delta, j\rangle \in SF(\Gamma)$

证明： 若 $\langle\Gamma, i\rangle R^\Lambda\langle\Delta, j\rangle$，则据 R^Λ 的定义，有 $j < f(\Gamma,\Delta)$，再据可满足集族的定义，得 $\langle\Delta, j\rangle \in SF(\Gamma)$。反过来，若 $\langle\Delta, j\rangle \in SF(\Gamma)$，则 $j < f(\Gamma,\Delta)$，据 R^Λ 的定义，得 $\langle\Gamma, i\rangle R^\Lambda\langle\Delta, j\rangle$。 $\dashv$

下面证明真值引理，即证明：

引理3.3.5. （真值引理）

任给 $\langle\Gamma, i\rangle \in W^\Lambda$，以及 $\varphi \in \mathcal{L}$，都有

$$V^\Lambda(\varphi, \langle\Gamma, i\rangle) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi \in \Gamma$$

证明： 施归纳于 φ 的结构。

$\varphi = p \in PV$。据 V^Λ 的定义显然。

$\varphi = \neg\psi$ 以及 $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$ 的情形据语义定义，极大一致性和归纳假设易得。

$\varphi = \Diamond_n\psi$。此时，我们有：$V^\Lambda(\Diamond_n\psi, \langle\Gamma, i\rangle) = 1 \quad iff \quad |\{\langle\Delta, j\rangle \in W^\Lambda : \langle\Gamma, i\rangle R^\Lambda\langle\Delta, j\rangle \ \&\ V^\Lambda(\psi, \langle\Delta, j\rangle) = 1\}| \geqslant n \quad iff \quad |\{\langle\Delta, j\rangle \in W^\Lambda : \langle\Delta, j\rangle \in SF(\Gamma) \ \&\ \psi \in \Delta\}| \geqslant n \quad iff \quad \Diamond_n\psi \in \Gamma$，得证。 $\dashv$

据前面的分析，我们得出 $Gr(K)$ 的完全性定理。

定理3.3.6. （$Gr(K)$ 的完全性定理）

$Gr(K)$ 相对于所有框架的类是完全的。

接下来，我们证明其他分级模态系统的完全性定理。首先我们来证明：

引理3.3.7. （主引理）

令 Λ 是任意分级模态系统。

(1) 若 Λ 包含公理 D^0，则任给 $\Gamma \in \Theta$，都存在 $\Delta \in \Theta$，使得 $f(\Gamma, \Delta) \neq 0$。

(2) 若 Λ 包含公理 T^0，则任给 $\Gamma \in \Theta$，总有 $f(\Gamma, \Gamma) \neq 0$。

(3) 若 Λ 包含公理 B^0，则任给 $\Gamma, \Delta \in \Theta$，总有 $f(\Gamma, \Delta) \neq 0 \quad iff \quad f(\Delta, \Gamma) \neq 0$。

(4) 若 Λ 包含公理 4^0，则任给 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 \in \Theta$，都有：如果 $f(\Delta_1, \Delta_2) \neq 0$，则 $f(\Delta_1, \Delta) \geqslant f(\Delta_2, \Delta)$。

(5) 若 Λ 包含公理 5^0，则任给 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 \in \Theta$，都有：如果 $f(\Delta, \Delta_1) \neq 0$，则 $f(\Delta_1, \Delta_2) \geqslant f(\Delta, \Delta_2)$。

证明： (1) 令 $\Gamma \in \Theta$。分两步：

(i) $S = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{L} \ \& \ \Box\varphi \in \Gamma\}$ 是 $Gr(KD)$ 一致的：若 S 不一致，则存在 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \mathcal{L}$，使得 $\Box\varphi_1, \cdots, \Box\varphi_n \in \Gamma$，且 $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$。一方面，据前者，易知：$\Box(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \in \Gamma$。另一方面，据后者和 RN，有 $\vdash \Box\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$。据 D^0，有 $\vdash \Diamond\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$，即 $\vdash \neg\Box(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$，因此 $\neg\Box(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \in \Gamma$，矛盾于 Γ 的一致性。

据 (i) 和 Lindenbaum 引理，S 可以扩充为 $Gr(KD)$ 的极大一致集 Δ。因此有：

(ii) 任给公式 $\varphi \in \Delta$，都有 $\Diamond!_0\varphi \notin \Gamma$：若不然，则存在 $\varphi \in \Delta$，使得 $\Box\neg\varphi \in \Gamma$，进而由 S 的定义以及 $S \subseteq \Delta$，得 $\neg\varphi \in \Delta$，矛盾于 Δ 的一致性。

由 (ii) 和 f 的定义，有 $f(\Gamma, \Delta) \neq 0$。

(2) 据 T^0，有：$\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Diamond\varphi \in \Gamma$，据 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 的定义，有 $\Gamma R_1 \Gamma$。据推论 3.2.4，有 $f(\Gamma, \Gamma) \neq 0$。

(3) 假设 $f(\Gamma, \Delta) \neq 0$ 且令 $\varphi \in \mathcal{L}$。则由推论 3.2.4，有 $\Gamma R_1 \Delta$。若 $\varphi \in \Gamma$，则据 $B^0 \in \Gamma$，得 $\Box\Diamond\varphi \in \Gamma$。由 $\Gamma R_1 \Delta$，$\Box\Diamond\varphi \in \Gamma$ 和 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 的定义，可得 $\Diamond\varphi \in \Delta$，这样我们证得了 $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Diamond\varphi \in \Delta$，因此 $\Delta R_1 \Gamma$。再由推论 3.2.4，即得 $f(\Delta, \Gamma) \neq 0$。逆方向同理可证。

(4) 假设 $f(\Delta_2,\Delta)\geqslant h \quad (h\leqslant\omega)$。据引理 3.2.3 和引理 3.2.11(1)，有 $\Delta_2 R_h \Delta$，即任给 $\varphi\in\mathcal{L}$，都有 $\varphi\in\Delta\Rightarrow\Diamond_h\varphi\in\Delta_2$。另一方面，若 $\Diamond_h\varphi\in\Delta_2$，则据题设 $f(\Delta_1,\Delta_2)\neq 0$，易得 $\Diamond\Diamond_h\varphi\in\Delta_1$，再由 $4^0\in\Delta_1$，有 $\Diamond_h\varphi\in\Delta_1$。这样我们证得了 $\varphi\in\Delta\Rightarrow\Diamond_h\varphi\in\Delta_1$，所以 $\Delta_1 R_h\Delta$，即 $f(\Delta_1,\Delta)\geqslant h$。据这个和假设，必有 $f(\Delta_1,\Delta)\geqslant f(\Delta_2,\Delta)$。

(5) 假设 $f(\Delta,\Delta_2)\geqslant h \quad (h\leqslant\omega)$。据引理 3.2.3 和引理 3.2.11(1)，有 $\Delta R_h\Delta_2$，即任给 $\varphi\in\mathcal{L}$，都有 $\varphi\in\Delta_2\Rightarrow\Diamond_h\varphi\in\Delta$。另一方面，若 $\Diamond_h\varphi\in\Delta$，则据 $5^0\in\Delta$，有 $\Box\Diamond_h\varphi\in\Delta$，据这个和题设 $f(\Delta,\Delta_1)\neq 0$，易得 $\Diamond_h\varphi\in\Delta_1$。这样我们证得了 $\varphi\in\Delta_2\Rightarrow\Diamond_h\varphi\in\Delta_1$，所以 $\Delta_1 R_h\Delta_2$，即 $f(\Delta_1,\Delta_2)\geqslant h$。据这个和假设，必有 $f(\Delta_1,\Delta_2)\geqslant f(\Delta,\Delta_2)$。 $\dashv$

从主引理，易得

推论3.3.8. (主推论)

(1) 包含 D^0 为公理的正规分级系统的典范关系具有持续性。

(2) 包含 T^0 为公理的正规分级系统的典范关系具有自返性。[7]

(3) 包含 B^0 为公理的正规分级系统的典范关系具有对称性。

(4) 包含 4^0 为公理的正规分级系统的典范关系具有传递性。

(5) 包含 5^0 为公理的正规分级系统的典范关系具有欧性。

从主推论可得前面提到的各个分级模态系统的完全性，我们这里只表述其它基本系统的完全性，其证明过程参见 Fine *et al.* [2,5,8,9,11]。

定理3.3.9. (其它基本系统的完全性定理)

(1) $Gr(KD)$ 相对于持续框架类是完全的。

(2) $Gr(KT)$ 相对于自返框架类是完全的。

(3) $Gr(KTB)$ 相对于自返且对称框架类是完全的。[8]

(4) $Gr(S4)$ 相对于自返且传递框架类是完全的。

(5) $Gr(S5)$ 相对于自返且欧性框架类是完全的。

[7] $Gr(T)$ 除外，因为 $Gr(T)$ 的典范关系 $R^{Gr(T)}$ 不一定具有自返性。因此需要在 $R^{Gr(T)}$ 的基础上重新定义一个新的自返关系，参见 De Caro [5]。

[8] 通常的典范模型技术不适用于含有公理 B^0 的系统，因此需要重新定义一个新的模型：一般典范模型。具体情况参见 Cerrato [2]。Fine [11] 中给出了另一种证明方法。

第四章　对应定理、一致性定理和真扩充定理

这一章我们来考察分级模态逻辑的对应定理、一致性定理和真扩充定理。本章分三节：§4.1 证明对应定理，得出一个有趣的结果：分级模态逻辑对相应标准模态逻辑的扩充仅仅是落在语法的层面上；§4.2 引入删分级模态词方法，通过运用语形和语义两种方法来证明一致性定理，从而为我们前面对于极大一致集的运用提供了合法性依据；§4.3 通过证明反模型引理，得出真扩充定理，即前面提到的基本系统之间的扩充关系实际上是一种真扩充。

§4.1　对应定理

我们在前面提到，分级模态系统是相应标准模态系统的分级扩充。而我们都知道，对应定理是标准模态逻辑的一个重要结果。那么，分级模态逻辑的对应定理是否也成立呢？也就是说，在某些分级模态公式和一阶公式之间是否也有某种对应关系呢？回答是肯定的。事实上，我们可以得到一个有趣的结果：分级模态逻辑的框架与相应标准模态逻辑的框架是相同的，前者对后者的扩充仅仅是落在语法的层面上。下面我们将要证明这一点。首先需要下列准备工作。

定义4.1.1. 称 P 是 $\mathfrak{F}=\langle W,R\rangle$ 的一集框架条件，如果 P 中的每个条件都指定了 R 的某个性质。此时我们也称 $\mathfrak{F}$ 满足 P。称模型 $\mathfrak{M}$ 满足 P，如果它的框架满足 P。称框架和模型分别为 P -框架和 P -模型，如果该框架和模型满足 P。称所有 P -框架的类（P -模型的类）为 P -框架类（P -模型类）。

定义4.1.2. （$\langle W,R\rangle$ 上的框架性质）

持续性：	$\forall x\exists y\ (xRy)$
自返性：	$\forall x\ (xRx)$
对称性：	$\forall xy\ (xRy\to yRx)$
传递性：	$\forall xyz\ (xRy\wedge yRz\to xRz)$
欧性：	$\forall xyz\ (xRy\wedge xRz\to yRz)$

定义4.1.3. 令 $\varphi\in\mathcal{L}$，A 是一阶语句。

称 φ 对应于 A，如果任给 $\langle W,R\rangle$，都有 $\langle W,R\rangle\vDash\varphi$ 当且仅当 $\langle W,R\rangle\vDash A$。

我们知道，有公理模式的公理系统等价于有代入规则的非公理模式的公理系统。[1] 因此，为了表述的方便，下面我们用有代入规则的非公理模式的公理系统来替换前面相应的有公理模式的公理系统。如：$Ax.3\ \ \Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond_n\varphi \to \Diamond_n\psi)\quad (n \in \mathbb{N})$ 替换为 $\Box(p \to q) \to (\Diamond_n p \to \Diamond_n q)\quad (n \in \mathbb{N})$ 加上代入规则 US。US 的定义如下：

定义4.1.4. 令 $Gr(\Lambda)$ 是任意分级模态系统。若 $\vdash_{Gr(\Lambda)} \varphi$，则 $\vdash_{Gr(\Lambda)} \varphi^\sigma$，其中 σ 是从 PV 到 $\mathcal{L}$ 的代入映射。

下面我们可以讨论某些分级模态公式和一阶公式之间的对应关系，即著名的对应定理。

定理4.1.5.（对应定理）

(1) D^0 对应于持续性，

(2) T^0 对应于自返性，

(3) B^0 对应于对称性，

(4) 4^0 对应于传递性，

(5) 5^0 对应于欧性。

证明： 由于 D^0, T^0, B^0 分别等同于标准模态逻辑中的公理 D, T, B，所以上述 (1)-(3) 的证明可参见模态逻辑文献（如李小五 [28]，pp.114-115），我们重点证明 (4) 和 (5)。不妨定义 $V'(\varphi) := \{w \mid V(\varphi, w) = 1\}$。

(4)：任给 $\langle W, R\rangle$。即证：$\langle W, R\rangle \vDash 4^0 \Leftrightarrow \langle W, R\rangle \vDash \forall xyz\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$。假设 $\langle W, R\rangle \nvDash 4^0$。则存在框架 $\langle W, R\rangle$ 上的赋值 V，$w \in W$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，使得

① $V(\Diamond\Diamond_n p, w) = 1$ 且

② $V(\Diamond_n p, w) = 0$

据 ①，存在 $v \in W$，使得 wRv 且

③ $V(\Diamond_n p, v) = 1$

据 ③，有：$\mid \{u \in W : vRu\ \&\ V(p, u) = 1\} \mid \geqslant n$，即 $\mid R(v) \cap V'(p) \mid \geqslant n$。若 $R(v) \subseteq R(w)$，则 $\mid R(w) \cap V'(p) \mid \geqslant \mid R(v) \cap V'(p) \mid \geqslant n$，即

$\mid \{u \in W : wRu\ \&\ V(p, u) = 1\} \mid \geqslant n$

即 $V(\Diamond_n p, w) = 1$，矛盾于 ②。$\therefore\ \langle W, R\rangle \nvDash \forall xyz\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$。

[1]这一说法的严格证明可参见徐明 [32] 中 5.7 节的内容，特别是 5.7.2 小节。尽管那里仅仅只是对经典命题逻辑的情形进行了证明，但他所运用的证明方法也同样适用于分级模态逻辑。

假设 $\langle W, R\rangle \nvDash \forall xyz\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$。则存在 $w, v, u \in W$，使得 wRv, vRu 但 $\sim wRu$。令赋值 V（相应的 V'）满足：$\mid R(v) \cap V'(p) \mid \geqslant n$ 且 $\mid R(w) \cap V'(p) \mid < n$。因为 $R(v) \nsubseteq R(w)$，所以 V'（相应的 V）的定义是合理的。据 $\mid R(v) \cap V'(p) \mid \geqslant n$，有 ③，再据 wRv，有 ①。另一方面，据 $\mid R(w) \cap V'(p) \mid < n$，有 ②，因此 $\langle W, R\rangle \nvDash 4^0$ 为所求。

(5)：任给 $\langle W, R\rangle$。即证：$\langle W, R\rangle \vDash 5^0 \Leftrightarrow \langle W, R\rangle \vDash \forall xyz\ (xRy \wedge xRz \to yRz)$。假设 $\langle W, R\rangle \nvDash 5^0$。则存在框架 $\langle W, R\rangle$ 上的赋值 V，$w \in W$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，使得

① $V(\Diamond_n p, w) = 1$ 且

② $V(\Box\Diamond_n p, w) = 0$

据 ①，有：$\mid \{u \in W : wRu\ \&\ V(p, u) = 1\} \mid \geqslant n$。即 $\mid R(w) \cap V'(p) \mid \geqslant n$。据 ②，存在 $v \in W$，使得 wRv 且

③ $V(\Diamond_n p, v) = 0$

若 $R(w) \subseteq R(v)$，则 $\mid R(v) \cap V'(p) \mid \geqslant \mid R(w) \cap V'(p) \mid \geqslant n$，即 $V(\Diamond_n p, v) = 1$，矛盾于 ③。$\therefore$ $\langle W, R\rangle \nvDash \forall xyz\ (xRy \wedge xRz \to yRz)$。

假设 $\langle W, R\rangle \nvDash \forall xyz\ (xRy \wedge xRz \to yRz)$，则存在 $w, v, u \in W$，使得 wRv, wRu 但 $\sim vRu$。令赋值 V（相应的 V'）满足：$\mid R(w) \cap V'(p) \mid \geqslant n$ 且 $\mid R(v) \cap V'(p) \mid < n$。因为 $R(w) \nsubseteq R(v)$，所以 V'（相应的 V）的定义是合理的。据 $\mid R(w) \cap V'(p) \mid \geqslant n$，有 ①。另一方面，据 $\mid R(v) \cap V'(p) \mid < n$，有 ③，再据 wRv，有 ②，因此 $\langle W, R\rangle \nvDash 5^0$ 为所求。 $\dashv$

§4.2 一致性定理

注意到我们前面谈到了极大 Λ 一致集。但是，如果 Λ 不是一致的系统，则可以证得不存在极大 Λ 一致集。而这不是我们所想要的，因为我们在 Λ 的完全性定理的证明中很明显用到了极大 Λ 一致集这一重要概念。因此，我们必须证明 Λ 是一致的系统。当我们确实证明了系统 Λ 的一致性时，我们才可以谈论"Λ 一致集"和"极大 Λ 一致集"，从而为我们前面对于极大一致集的运用提供合法性依据。[2] 现在我们着手证明这一点。首先给出系统一致的定义。令 Λ 是任意系统。

[2]这一点往往被分级模态逻辑这一领域的学者们所忽略。参见 De Caro [5] 的定理 2，作者是这样表述的："If Λ is a consistent NLGM $\cdots$"，但未证明这个假设。其它分级模态论文也没有对这一点给予证明。

定义4.2.1.（Λ 一致）

Λ 是一致的 $\Leftrightarrow$ $\nvdash_{\Lambda} \bot$。

令系统 $Gr(\Lambda)$ 是前面提到的任意分级模态系统。接下来证明系统 $Gr(\Lambda)$ 的一致性，这就是下面的 $Gr(\Lambda)$ 一致性定理。

定理4.2.2.（$Gr(\Lambda)$ 的一致性定理）

令系统 $Gr(\Lambda)$ 是前面提到的任意分级模态系统。则 $Gr(\Lambda)$ 是一致的。

证明： 据可靠性定理，得：$Gr(\Lambda)$ 相对于特定框架类（记为 F）是可靠的。则 $\mathrm{F} \vDash Th(Gr(\Lambda))$。若 $Gr(\Lambda)$ 不一致，则 $\vdash_{Gr(\Lambda)} \bot$。因此 $\mathrm{F} \vDash \bot$。矛盾。 $\dashv$

同时，我们采用一种语形的证明方法：删分级模态词方法。这种方法有点类似于文献中的删模态法（参见李小五 [28]，pp.13-14）。即：定义一个删分级模态算子的映射，然后将 $Gr(\Lambda)$ 的一致性化归为经典命题逻辑 PC 的一致性。而 PC 的一致性是我们在经典命题逻辑中已知的结论。不妨设 L_1 是 PC 所属的语言。

证明： 递归定义一个删分级模态算子的映射 $\varsigma : \mathcal{L} \to L_1$ 如下：

$\varsigma(p) = p$ （任给 $p \in PV$）

$\varsigma(\neg\varphi) = \neg\varsigma(\varphi)$

$\varsigma(\varphi \to \psi) = \varsigma(\varphi) \to \varsigma(\psi)$

$\varsigma(\Diamond_n\varphi) = \varsigma(\varphi)$ （任给 $n \in \mathbb{N}$）

从上述 ς 的定义，容易得到：

$\varsigma(\varphi \wedge \psi) = \varsigma(\varphi) \wedge \varsigma(\psi)$

$\varsigma(\varphi \vee \psi) = \varsigma(\varphi) \vee \varsigma(\psi)$

$\varsigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = \varsigma(\varphi) \leftrightarrow \varsigma(\psi)$

$\varsigma(\Box_n\varphi) = \varsigma(\varphi)$

$\varsigma(\Diamond!_n\varphi) = \bot$

逐一检查公理 $Ax.1$-$Ax.6$、D^0、T^0、B^0、4^0、5^0 以及规则 MP、RN，易证：

（$\clubsuit$）任给 $\varphi \in \mathcal{L}$，若 $\vdash_{Gr(\Lambda)} \varphi$，则 $\vdash_{PC} \varsigma(\varphi)$。

假设 $Gr(\Lambda)$ 不一致，即 $\vdash_{Gr(\Lambda)} \bot$，则据（$\clubsuit$），有 $\vdash_{PC} \bot$，与 PC 的一致性矛盾，因此 $Gr(\Lambda)$ 是一致的。从而 $Gr(\Lambda)$ 的一致性定理得证。 $\dashv$

§4.3 真扩充定理

据各个分级模态系统的可靠性定理和完全性定理，我们容易得到分级模态系统之间的一条扩充链：

$$Gr(K) \subseteq Gr(KD) \subseteq Gr(KT) \left\{ \begin{array}{l} \subseteq Gr(S4) \\ \subseteq Gr(KTB) \end{array} \right\} \subseteq Gr(S5)$$

现在我们要证明的是：这条扩充链实际上是真扩充链。其证明的关键就在于反模型定理。为了证明这一重要定理，首先我们必须给出反模型的定义。

定义4.3.1.（反模型） 令 Λ 是分级模态系统，$\varphi \in \mathcal{L}$。

称 $\mathfrak{M}$ 是 φ 的 Λ 反模型，如果 $\mathfrak{M}$ 是 Λ 的模型，并且 $\mathfrak{M}$ 是 φ 的反模型，即 $\mathfrak{M} \vDash Th(\Lambda)$ 且 $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$。

注意我们在前一节已经证明了本文所提及的各个分级模态系统的一致性定理，因此 Λ 必有模型。

引理4.3.2.（反模型引理）

若存在 φ 的 Λ 反模型，则 $\varphi \notin Th(\Lambda)$。

证明：假设存在 φ 的 Λ 反模型，记该模型为 $\mathfrak{M}$。据反模型定义，有 $\mathfrak{M} \vDash Th(\Lambda)$ 且 $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$。若 $\varphi \in Th(\Lambda)$，则 $\mathfrak{M} \vDash \varphi$，矛盾于 $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$，因此 $\varphi \notin Th(\Lambda)$。 $\dashv$

下面我们来表述并证明反模型定理。

定理4.3.3.（反模型定理）

(1) 存在公理 D^0 的 $Gr(K)$ 反模型。

(2) 存在公理 T^0 的 $Gr(KD)$ 反模型。

(3) 存在公理 B^0 的 $Gr(KT)$ 反模型。

(4) 存在公理 4^0 的 $Gr(KT)$ 反模型。

(5) 存在公理 5^0 的 $Gr(S4)$ 反模型。

(6) 存在公理 5^0 的 $Gr(KTB)$ 反模型。

证明：(1)-(3) 的证明可参见李小五 [28]，p.131，在此不再赘述。我们将证明的重点放在 (4)-(6)。

(4) 建立一个自返但非传递的模型 $\mathfrak{M}_1 = \langle W, R, V\rangle$ 如下：

$$w^{\circlearrowleft}_{\neg p} \longrightarrow v^{\circlearrowleft}_{\neg p} \longrightarrow u^{\circlearrowleft}_{i_p} \qquad (i = 0, \cdots, n-1)$$

则任给 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，都有 wRv 且 vRu_i 但 $\sim wRu_i$，$\therefore$ w 不是传递点。因此 R 不满足传递性，但很容易看出 R 是自返的。$\therefore$ $\mathfrak{M}_1$ 是一个 $Gr(KT)$ 模型。

另一方面，我们易得 $\sigma(p) = \{u_0, \cdots, u_{n-1}\}$ 以及 $vRu_0, \cdots, vRu_{n-1}$，因此我们有 $|\ \{u : vRu \ \&\ V(p,u) = 1\}\ | \geqslant n$，即 $V(\Diamond_n p, v) = 1$。据 wRv，有 ① $V(\Diamond\Diamond_n p, w) = 1$。又由于 $R(w) = \{w, v\}$，$V(p,w) = 0$ 且 $V(p,v) = 0$，$\therefore |\ \{u : wRu \ \&\ V(p,u) = 1\}\ | = 0 \leqslant n-1 < n$，即 ② $V(\Diamond_n p, w) = 0$。

据 ①和 ②，有：$V(\Diamond\Diamond_n p \to \Diamond_n p, w) = 0$，$\therefore$ $\mathfrak{M}_1 \nvDash 4^0$。据反模型定义，$\mathfrak{M}_1$ 是 4^0 的 $Gr(KT)$ 反模型。

(5) 构建一个自返传递但非欧性的模型 $\mathfrak{M}_2 = \langle W, R, V\rangle$ 如下：

$$v^{\circlearrowleft}_{\neg p} \longleftarrow w^{\circlearrowleft}_{\neg p} \longrightarrow u^{\circlearrowleft}_{i_p} \qquad (i = 0, \cdots, n-1)$$

则任给 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，有 wRv 且 wRu_i 但 $\sim vRu_i$，$\therefore w$ 不是欧性点。因此 R 不满足欧性。但很容易看出 R 是自返且传递的。$\therefore$ $\mathfrak{M}_2$ 是 $Gr(S4)$ 模型。

另一方面，我们易得 $\sigma(p) = \{u_0, \cdots, u_{n-1}\}$ 以及 $wRu_0, \cdots, wRu_{n-1}$，因此我们有 $|\ \{u : wRu \ \&\ V(p,u) = 1\}\ | \geqslant n$，即 ① $V(\Diamond_n p, w) = 1$。又由于 $R(v) = \{v\}$ 且 $V(p,v) = 0$，$\therefore |\ \{u : vRu \ \&\ V(p,u) = 1\}\ | = 0 \leqslant n-1 < n$，即 $V(\Diamond_n p, v) = 0$。据 wRv，有 ② $V(\Box\Diamond_n p, w) = 0$。

据 ① 和 ②，有 $V(\Diamond_n p \to \Box\Diamond_n p, w) = 0$，$\therefore$ $\mathfrak{M}_2 \nvDash 5^0$。据反模型定义，$\mathfrak{M}_2$ 是 5^0 的 $Gr(S4)$ 反模型。

(6) 构建一个自返对称但非欧性的模型 $\mathfrak{M}_3 = \langle W, R, V\rangle$ 如下：

$$v^{\circlearrowleft}_{\neg p} \longleftrightarrow w^{\circlearrowleft}_{\neg p} \longleftrightarrow u^{\circlearrowleft}_{i_p} \qquad (i = 0, \cdots, n-1)$$

则任给 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，有 wRv 且 wRu_i 但 $\sim vRu_i$，$\therefore$ w 不是欧性点。因此 R 不满足欧性。但很容易看出 R 是自返且对称的。$\therefore$ $\mathfrak{M}_3$ 是 $Gr(KTB)$ 模型。

另一方面，我们易得 $\sigma(p) = \{u_0, \cdots, u_{n-1}\}$ 以及 $wRu_0, \cdots, wRu_{n-1}$，则 $|\ \{u : wRu \ \&\ V(p,u) = 1\}\ | \geqslant n$，即 ① $V(\Diamond_n p, w) = 1$。又 $R(v) = \{w, v\}$，$V(p,w) = 0$ 且 $V(p,v) = 0$，$\therefore |\ \{u : vRu \ \&\ V(p,u) = 1\}\ | = 0 \leqslant n-1 < n$，即 $V(\Diamond_n p, v) = 0$。据 wRv，有 ② $V(\Box\Diamond_n p, w) = 0$。

据 ①和 ②，有 $V(\Diamond_n p \to \Box\Diamond_n p, w) = 0$，$\therefore\ \mathfrak{M}_3 \nvDash 5^0$。据反模型定义，$\mathfrak{M}_3$ 是 5^0 的 $Gr(KTB)$ 反模型。

至此反模型定理得证。 $\dashv$

同理，我们可以通过类似的方法证明：存在公理 4^0 的 $Gr(KTB)$ 反模型，以及存在公理 B^0 的 $Gr(S4)$ 反模型，因此系统 $Gr(S4)$ 和 $Gr(KTB)$ 之间是互相独立的。[3]

从反模型定理和反模型引理易知，在本节开头提到的扩充链实际上是一种真扩充链，即如下系统对之间存在一种真包含关系。

定理4.3.4. （真扩充定理）

(1) $Gr(K) \subset Gr(KD)$

(2) $Gr(KD) \subset Gr(KT)$

(3) $Gr(KT) \subset Gr(KTB)$

(4) $Gr(KT) \subset Gr(S4)$

(5) $Gr(S4) \subset Gr(S5)$

(6) $Gr(KTB) \subset Gr(S5)$

[3]所谓“两个系统之间互相独立”，是指两个系统之间不存在任何包含关系。而像系统 $Gr(K)$ 和 $Gr(KD)$ 之间由于存在包含关系 $Gr(K) \subseteq Gr(KD)$，所以它们之间不是互相独立的。

第五章　模型论性质

这一章我们来讨论分级模态逻辑的模型论性质，包括紧致性、Löwenheim-Skolem 性质、不变性结果、互模拟等。§5.1 通过引入分级模态逻辑的标准翻译，将分级模态逻辑的紧致性和 Löwenheim-Skolem 性质归约为一阶逻辑中相关性质的证明。§5.2 研究分级模态逻辑在模型层次的不变性结果。首先介绍标准模态逻辑在模型层次的不变性结果，然后将这些结果转移到分级模态逻辑。§5.3 通过引入分级互模拟（简称为"g-互模"）这一工具来讨论分级模态逻辑中的 Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果。本章的主要参考文献有 Blackburn *et al.* [1]，de Rijke [24]，马明辉 [29]；一阶逻辑的模型论性质可参考任何一本涉及一阶模型论的教材，如 A. G. Hamilton [14]，沈复兴 [30]，熊明 [31]。

§5.1　标准翻译

前面我们在讨论分级模态逻辑的语义时，我们给分级可能算子 $\Diamond_n$ 的语义定义（见定义 2.1.5④）是：

$$V(\Diamond_n\varphi, w) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\,\{w' \in W : w' \in R(w)\ \&\ V(\varphi, w') = 1\}\,| \geqslant n$$

为了本章的目的，我们在定义 2.1.5 的基础上定义可满足关系 $\Vdash$ 如下：

$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad iff \quad V(\varphi, w) = 1$ （其中 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$，$w \in W$，$\varphi \in \mathcal{L}$）

因此，对于分级可能算子 $\Diamond_n$ 的语义，我们可以采用如下等价的定义（我们称之为"$\Diamond_n$ 的语义定义 2"）：

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n\varphi \quad iff \quad \exists v_1 \cdots v_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n}(wRv_i \wedge \mathfrak{M}, v_i \Vdash \varphi))$$

定义5.1.1. 令 $\mathcal{L}_1$ 为可数带等词的一阶语言，$\mathcal{ML}$ 是标准模态语言。我们可以定义一个映射 $ST_x : \mathcal{ML} \to \mathcal{L}_1$ 如下：[1]

任给 $p \in PV$，$ST_x(p) = Px$

$ST_x(\neg\varphi) = \neg ST_x(\varphi)$

$ST_x(\varphi \to \psi) = ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi)$

$ST_x(\Diamond\varphi) = \exists y(xRy \wedge ST_y(\varphi))$

[1] 有些文献称 ST_x 为"标准翻译"，参见 Blackburn *et al.* [1] 定义 2.45。

据定义 5.1.1 和一阶逻辑的知识，我们可以证明，标准模态语言与带等词的一阶语言在模型层次上有下列局部对应结果：

定理5.1.2. 任给标准模态公式 φ，模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 以及 W 上的点 w，都有：

$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad iff \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(\varphi)[w]$

据定理 5.1.2，我们可以将一阶逻辑的一些重要的模型论性质，如紧致性和 Löwenheim-Skolem 性质转移到标准模态逻辑，在此我们只表述标准模态逻辑的这些性质，其证明类似于后面关于分级模态逻辑相应性质的证明。

定理5.1.3. （标准模态逻辑的紧致性定理和 *Löwenheim-Skolem* 定理）

(1) （紧致性定理）令 Σ 是任意标准模态公式集。如果 Σ 的每个有穷子集都是可满足的，那么 Σ 本身也是可满足的；

(2) （*Löwenheim-Skolem* 定理）令 Σ 是任意标准模态公式集。如果 Σ 有模型，那么 Σ 有可数模型，即 Σ 有一论域为可数集合的模型。

实际上，我们同样可以将一阶逻辑的紧致性和 Löwenheim-Skolem 性质转移到分级模态逻辑。首先，从 $\Diamond_n$ 的语义定义 2，我们很容易将标准模态语言的标准翻译推广到分级模态语言，即

定义5.1.4. （分级模态语言的标准翻译）令 $\mathcal{L}_1$ 为可数带等词的一阶语言。定义分级模态语言 $\mathcal{L}$ 的标准翻译 $GST_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_1$ 如下：

任给 $p \in PV$，$GST_x(p) = Px$

$GST_x(\neg\varphi) = \neg GST_x(\varphi)$

$GST_x(\varphi \to \psi) = GST_x(\varphi) \to GST_x(\psi)$

$GST_x(\Diamond_n\varphi) =$

$$\exists y_1 \cdots y_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} (y_i \neq y_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} (xRy_i \wedge GST_{y_i}(\varphi)))$$

同样很容易证明，分级模态语言和带等词的一阶语言在模型层次上有下列局部对应结果：

定理5.1.5. 任给分级模态公式 φ，模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 以及 W 上的点 w，都有：

$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad iff \quad \mathfrak{M} \vDash GST_x(\varphi)[w]$

证明：施归纳于 φ 的结构。

(i) $\varphi = p \in PV$，此时 $GST_x(\varphi) = Px$。

则有：$\mathfrak{M} \vDash GST_x(\varphi)[w]$

iff $\mathfrak{M} \vDash GST_x(p)[w]$

iff $\mathfrak{M} \vDash Px[w]$

iff $w \in \sigma(p)$（$\because P$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的解释是 $\sigma(p)$）

iff $\mathfrak{M}, w \Vdash p$

iff $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$。

(ii) $\varphi = \neg\phi$ 和 (iii) $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$ 的情形据定义 5.1.4，语义定义（见定义 2.1.5），可满足关系 $\Vdash$ 的定义和归纳假设易得。

(iv) $\varphi = \Diamond_n \phi$，此时

$GST_x(\varphi) = \exists y_1 \cdots y_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(y_i \neq y_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n}(xRy_i \wedge GST_{y_i}(\phi)))$。则有：

$\mathfrak{M} \vDash GST_x(\varphi)[w]$

iff $\exists y_1 \cdots y_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(y_i \neq y_j) \wedge \mathfrak{M} \vDash \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n}(xRy_i \wedge GST_{y_i}(\phi))[w])$

iff $\exists v_1 \cdots v_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} wRv_i \wedge \mathfrak{M} \vDash \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} GST_{y_i}(\phi)[v_i])$（$\because$ 关系符 R 在 $\mathfrak{M}$ 中的解释是二元关系 R）

iff $\exists v_1 \cdots v_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} wRv_i \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi)$（由归纳假设）

iff $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n \phi$

iff $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$，为所求。 $\dashv$

据上述定理，我们可以将一阶逻辑的紧致性和 Löwenheim-Skolem 性质转移到分级模态逻辑，即

定理5.1.6.（分级模态逻辑的紧致性定理和 *Löwenheim-Skolem* 定理）

(1) （紧致性定理）令 Σ 是任意分级模态公式集。如果 Σ 的每个有穷子集都是可满足的，那么 Σ 本身也是可满足的；

(2) （*Löwenheim-Skolem* 定理）令 Σ 是任意分级模态公式集。如果 Σ 有模型，那么 Σ 有可数模型，即 Σ 有一论域为可数集合的模型。

证明：(1) 的证明如下：假设分级模态公式集 Σ 的每个有穷子集都是可满足的，考虑集合 $S = \{GST_x(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma\}$。据假设 Σ 的每个有穷子集都是可满足的以及定理 5.1.5，可得：S 的每个有穷子集也都是可满足的。注意到 S 是一个一阶公

式集，因此据一阶逻辑的紧致性，S 本身可满足。再根据定理 5.1.5，易得 Σ 本身可满足。

(2) 的证明如下：假设分级模态公式集 Σ 有模型，即存在模型 $\mathfrak{M}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中的点 w，使得 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$。同样考虑集合 $S = \{GST_x(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma\}$。注意到 S 是一个一阶公式集。据定理 5.1.5，易知：$\mathfrak{M} \vDash S[w]$，即 S 有模型。据一阶逻辑的 Löwenheim-Skolem 性质，S 有可数模型，即存在可数模型 $\mathfrak{N}$ 以及 $\mathfrak{N}$ 中的点 v，使得 $\mathfrak{N} \vDash S[v]$。再根据定理 5.1.5，有 $\mathfrak{N}, v \Vdash \Sigma$，即 Σ 有可数模型。 $\dashv$

§5.2 不变性结果

本节我们研究分级模态逻辑在模型层次的不变性结果。我们首先介绍标准模态逻辑在模型层次的不变性结果，然后将这些结果转移到分级模态逻辑。首先定义标准模态逻辑中模型构造的三种方法：不交并、生成子模型和有界态射，并表述模型层次上各自的不变性结果，其证明参见 Blackburn *et al.* [1] 的第二章（命题 $2.3, 2.6, 2.14$）。

定义5.2.1. （不交并）

称两个模型是不交的，如果它们的论域（即可能世界集）没有公共元素。令 $\mathfrak{M}_i = \langle W_i, R_i, V_i \rangle (i \in I)$ 是两两不交的模型。则这些模型的不交并为 $\uplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i = \langle W, R, V \rangle$，其中 $W = \cup_{i\in I} W_i$，$R = \cup_{i\in I} R_i$，且 V 满足：任给 $p \in PV$，都有 $V(p) = \cup_{i\in I} V_i(p)$。

根据不交并的定义，我们有如下不变性结果：

定理5.2.2. 标准模态公式在不交并下不变，即：令 $\mathfrak{M}_i (i \in I)$ 和 $\uplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i$ 如上定义。则任给标准模态公式 φ 以及 $w \in W_i$，有 $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \varphi \ \ iff \ \ \uplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i, w \Vdash \varphi$。

定义5.2.3. （生成子模型）

令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ 是两个模型。称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的生成子模型（记为 $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$），如果 $W' \subseteq W$，$R' = R \cap (W' \times W')$，任给 $p \in PV$，$V'(p) = V(p) \cap W'$ 以及 W' 在有穷的 R 步内封闭（即若 $w \in W'$ 且 wRv，则 $v \in W'$）。[2]

[2]这里的“有穷 R 步”（而不是“R 步”）是一个严格的说法，理由是：某个公式在某点的取值只跟它的子公式在该点或 R 后继的取值有关，而它的子公式只有有穷多个，因此该公式在某点的取值只跟有穷步通达的点（即自身和该点的 R 后继，这些后继的 R 后继，这些后继的 R 后继的 R 后继，等等，也即该点 0 步、1 步、2 步、3 步等有穷基数步通达的那些点）有关。参见 R. Goldblatt [13], p.10。

根据生成子模型的定义，我们有如下不变性结果：

定理5.2.4. 标准模态公式在生成子模型下不变。即：令 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 如上定义。则任给标准模态公式 φ 以及 $w \in W'$，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \ \ iff \ \ \mathfrak{M}', w \Vdash \varphi$。

定义5.2.5. （有界态射）

令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。称映射 $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ 是有界态射，如果 (i) 任给 $p \in PV$，$\mathfrak{M}, w \Vdash p \ \ iff \ \ \mathfrak{M}', f(w) \Vdash p$；$(ii)$ 若 wRv，则 $f(w)R'f(v)$；(iii) 若 $f(w)R'v'$，则存在 $v \in W$，使得 wRv 且 $f(v) = v'$。

同样，根据有界态射的定义，我们有如下不变性结果：

定理5.2.6. 标准模态公式在有界态射下不变。即：令 f 是模型 $\mathfrak{M}$ 到模型 $\mathfrak{M}'$ 的有界态射，则任给标准模态公式 φ 以及 $w \in W$，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \ \ iff \ \ \mathfrak{M}', f(w) \Vdash \varphi$。

下面我们开始将上述标准模态逻辑中模型构造的方法和不变性结果转移到分级模态逻辑。首先考察不交并和生成子模型。我们可以很容易得知，不交并和生成子模型都不改变原模型中可能世界之间的可通达关系，同时，由于生成子模型的论域在原来的关系下是有穷步封闭的，而不交并的任意构成部分都是不交并的生成子模型，我们考虑的分级模态逻辑又是在有穷基数（即可通达世界集的基数是有穷的）的范围内，因此标准模态逻辑的这些模型构造自动适合分级模态逻辑。为了更清楚的看到这一点，我们以生成子模型为例，来证明分级模态公式在生成子模型下不变，即下列不变性结果：

定理5.2.7. 分级模态公式在生成子模型下不变。即：令 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle \rightarrowtail \mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$。则任给分级模态公式 φ 以及 $w \in W'$，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \ \ iff \ \ \mathfrak{M}', w \Vdash \varphi$。

证明： 施归纳于 φ 的结构。只需考虑分级可能算子的情形，即 $\varphi = \Diamond_n \phi$。先假设 $\mathfrak{M}', w \Vdash \Diamond_n \phi$，即 $\exists v_1 \cdots v_n \in W'(\bigwedge_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(wR'v_i \wedge \mathfrak{M}', v_i \Vdash \phi))$（见 $\Diamond_n$ 的语义定义 2），据生成子模型的定义和归纳假设，易得：$\exists v_1 \cdots v_n \in W(\bigwedge_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(wRv_i \wedge \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi))$，即 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n \phi$。反之，假设 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n \phi$，即 $\exists v_1 \cdots v_n \in W(\bigwedge_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(wRv_i \wedge \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi))$，据 $w \in W'$和 W' 在有穷的 R 步内封闭，有 $v_1, \cdots, v_n \in W'$，因此任给 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $wR'v_i$。据 $v_1, \cdots, v_n \in W'$ 和归纳假设，任给 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $\mathfrak{M}', v_i \Vdash \phi$，整理所得的结果，即 $\exists v_1 \cdots v_n \in W'(\bigwedge_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(wR'v_i \wedge \mathfrak{M}', v_i \Vdash \phi))$，因此 $\mathfrak{M}', w \Vdash \Diamond_n \phi$，为所求。 $\dashv$

接下来考察有界态射。下述例子说明了标准模态逻辑的有界态射概念并不保持分级模态公式的语义。

例子5.2.8. 考虑模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$，其中

(1) $W = \{w, v_1, v_2\}$, $R = \{\langle w, v_1\rangle, \langle w, v_2\rangle\}$, $V(p) = \{v_1, v_2\}$,

(2) $W' = \{w', v'\}$, $R' = \{\langle w', v'\rangle\}$, $V'(p) = \{v'\}$.

现在，定义映射 $f : W \to W'$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} w', & x = w, \\ v', & x = v_i\text{，其中 } i \in \{1, 2\}\text{。} \end{cases}$$

易证所定义的 f 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}'$ 的有界态射。但另一方面，很明显 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_2 p$ 但 $\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond_2 p$。

因此，我们需要定义适合于分级模态逻辑的有界态射概念，我们称之为“分级有界态射”，简称为“g-有界态射”。通过分析例子 5.2.8，我们可以发现，分级模态公式 $\Diamond_2 p$ 的语义在有界态射 f 下之所以不被保持，关键在于 w 和 w' 这两个点可通达世界的数目不相等。基于这一考虑，我们定义“g-有界态射”如下。

首先，为了定义和证明的方便，我们需要给出一些技术性的记法：若 w 是可能世界，X 是可能世界集，R 是可通达关系，我们用 $wR_{all}X$ 表示任给 $x \in X$，都有 wRx；若 φ 是公式，X 是可能世界集，X 所在的模型是 $\mathfrak{M}$，我们用 $X \Vdash \varphi$ 表示任给 $x \in X$，都有 $\mathfrak{M}, x \Vdash \varphi$（简记为：$x \Vdash \varphi$）。下面我们来定义“$g$-有界态射”。

定义5.2.9. （g-有界态射）（参见马明辉 *[29]*）

令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。称映射 $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ 是 g-有界态射，如果下列条件成立：

(i) 如果 $f(\{w\}) = \{w'\}$，则任给 $p \in PV$，$\mathfrak{M}, w \Vdash p \;\; iff \;\; \mathfrak{M}', f(w) \Vdash p$；

(ii) 如果 $f(X) = Y$，则 $|X| = |Y|$；

(iii) 如果 $wR_{all}X$，则 $w'R'_{all}f(X)$，其中 $w' \in f(\{w\})$；

(iv) 如果 $w'R'_{all}Y$ 且 $f(\{w\}) = \{w'\}$，则存在 $X \subseteq_{fin} W$，[3] 使得 $f(X) = Y$ 且 $wR_{all}X$；

(v) 如果 $f(X) = Y$，则任给 $x \in X$，都存在 $y \in Y$，使得 $f(\{x\}) = \{y\}$；并且任给 $y \in Y$，都存在 $x \in X$，使得 $f(\{x\}) = \{y\}$。

[3] 这一记法来自 Blackburn *et al.* [1] 中 p.180 的定理 3.19 的证明，它表示 X 是 W 的有穷子集。

由 g-有界态射的定义，我们有如下不变性结果：

定理5.2.10. 分级模态公式在 g-有界态射下不变。即：令 f 是模型 $\mathfrak{M}=\langle W,R,V\rangle$ 到模型 $\mathfrak{M}'=\langle W',R',V'\rangle$ 的 g-有界态射使得 $f(\{w\})=\{w'\}$，则任给分级模态公式 φ，都有 $\mathfrak{M},w\Vdash\varphi\ \ iff\ \ \mathfrak{M}',w'\Vdash\varphi$。

证明： 假设 f 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}'$ 的 g-有界态射使得 $f(\{w\})=\{w'\}$。施归纳于 φ 的结构。

$\varphi=p\in PV$。据假设和定义 5.2.9(i) 显然。

$\varphi=\neg\phi$ 和 $\varphi=\varphi_1\to\varphi_2$ 的情形据语义定义（见定义 2.1.5），可满足关系 $\Vdash$ 的定义和归纳假设易得。

$\varphi=\Diamond_n\phi$。先假设 $\mathfrak{M},w\Vdash\Diamond_n\phi$，则存在 $X\subseteq W$，使得 $|X|=n$，$wR_{all}X$ 且 $X\Vdash\phi$。据假设，$wR_{all}X$ 和定义 5.2.9(iii)，有 $w'R'_{all}f(X)$。进而由 $|X|=n$，$f(X)=f(X)$ 和定义 5.2.9(ii)，可得 $|f(X)|=|X|=n$。又据 $f(X)=f(X)$ 和定义 5.2.9(v)，有：任给 $y\in f(X)$，都存在 $x\in X$，使得 $f(\{x\})=\{y\}$。进而根据 $x\in X$ 和 $X\Vdash\phi$，有 $x\Vdash\phi$。据后者，$f(\{x\})=\{y\}$ 以及归纳假设，有 $y\Vdash\phi$。再据 y 的任意性，有 $f(X)\Vdash\phi$。这样我们证得了：存在 $f(X)\subseteq W'$，使得 $|f(X)|=n$，$w'R'_{all}f(X)$ 且 $f(X)\Vdash\phi$，因此 $\mathfrak{M}',w'\Vdash\Diamond_n\phi$。

反之，假设 $\mathfrak{M}',w'\Vdash\Diamond_n\phi$，则存在 $Y\subseteq W'$，使得 $|Y|=n$，$w'R'_{all}Y$ 且 $Y\Vdash\phi$。据假设，$w'R'_{all}Y$ 和定义 5.2.9(iv)，存在 $X\subseteq_{fin}W$，使得 $f(X)=Y$ 且 $wR_{all}X$。进而由 $f(X)=Y$，$|Y|=n$ 和定义 5.2.9(ii)，可得 $|X|=|Y|=n$。又据 $f(X)=Y$ 和定义 5.2.9(v)，有：任给 $x\in X$，都存在 $y\in Y$，使得 $f(\{x\})=\{y\}$。进而根据 $y\in Y$ 和 $Y\Vdash\phi$，有 $y\Vdash\phi$。据后者，$f(\{x\})=\{y\}$ 以及归纳假设，有 $x\Vdash\phi$。再据 x 的任意性，有 $X\Vdash\phi$。这样我们证得了：存在 $X\subseteq W$，使得 $|X|=n$，$wR_{all}X$ 且 $X\Vdash\phi$，即 $\mathfrak{M},w\Vdash\Diamond_n\phi$。 $\dashv$

§5.3 互模拟

这一节我们讨论分级模态逻辑的互模拟（简称为“g-互模”），运用 g-互模这一工具可得到分级模态逻辑中的 Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果。我们首先介绍标准模态逻辑的互模拟，得出标准模态逻辑中的 Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果，然后将这些结果转移到分级模态逻辑。

定义5.3.1.（互模拟）

令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。称 $Z \subseteq W \times W'$ 为 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}'$ 之间的互模拟（记为：$Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$），当且仅当下列条件成立：

(i) $Z \neq \varnothing$;

(ii) 若 wZw'，则任给 $p \in PV$，$\mathfrak{M}, w \Vdash p \ \ iff \ \ \mathfrak{M}', w' \Vdash p$;

(iii) 若 wZw' 且 wRv，则存在 $v' \in W'$，使得 vZv' 且 $w'R'v'$;

(iv) 若 wZw' 且 $w'R'v'$，则存在 $v \in W$，使得 vZv' 且 wRv。

如果有 $Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$ 且 wZw'，则我们表示为 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$ ，意思是 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{M}', w')$ 这两个点模型之间有互模拟关系 Z。[4]如果存在互模拟 Z 使得 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$，则我们表示为 $\mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$，有时简记为 $w \rightleftharpoons w'$，我们也称 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{M}', w')$ 互为互模拟模型。

根据互模拟的定义，我们有如下不变性结果（证明参见 Blackburn *et al.* [1]，定理 2.20）：

定理5.3.2. 标准模态公式在互模拟下不变。即：令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。则任给 $w \in W$，$w' \in W'$，若 $w \rightleftharpoons w'$，则 $w \equiv w'$（即任给标准模态公式 φ，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \ \ iff \ \ \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$）。

称一阶公式 $\alpha(x)$ 在互模拟下不变，如果任给 Z 满足 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$，则 $\mathfrak{M} \vDash \alpha(x)[w]$ 当且仅当 $\mathfrak{M}' \vDash \alpha(x)[w']$。运用互模拟我们可以证明标准模态逻辑中的 van Benthem 刻画定理：一阶公式等价于某个模态公式的标准翻译的充分必要条件是该一阶公式在互模拟下不变，因此标准模态逻辑可以看作是一阶逻辑的互模拟不变片断。即：

定理5.3.3.（*Van Benthem* 刻画定理）

令 $\alpha(x)$ 是可数带等词一阶语言的公式。则 $\alpha(x)$ 等价于某个模态公式的标准翻译当且仅当 $\alpha(x)$ 在互模拟下不变。

令 K 是一类点模型。称 K 是由一集模态公式可定义的，如果存在模态公式集 Δ 使得 Δ 恰好在 K 中有效，即 $\mathrm{K} = \{(\mathfrak{M}, w) \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \Delta\}$；称 K 是由某个模态公式可定义的，如果它是由某个单元模态公式集可定义的。称 K 在互模拟

[4]点模型在标准模态逻辑和分级模态逻辑在模型层次上的可定义性结果的证明中都是很重要的概念。称 $(\mathfrak{M}, w)$ 是点模型，如果 $\mathfrak{M}$ 是模型，并且 w 是 $\mathfrak{M}$ 中的点。

下封闭，如果从 $(\mathfrak{M}, w) \in \mathrm{K}$ 可得出 $(\mathfrak{M}, w)$ 的每个互模拟模型也属于 K；称 K 在超积（超幂）下封闭，如果从 $(\mathfrak{M}_i, w_i) \in \mathrm{K}$ 可得出这些点模型的超积（超幂）也属于 K。同时定义 K 的补类 $:= \{(\mathfrak{M}, w) \mid (\mathfrak{M}, w) \notin \mathrm{K}\}$。

由此可以证明标准模态逻辑中的可定义性结果：

定理5.3.4. 令 K 是一类点模型。则

(i) K 是由一集模态公式可定义的，当且仅当 K 在互模拟和超积下封闭，并且 K 的补类在超幂（和互模拟）下封闭；

(ii) K 是由某个模态公式可定义的，当且仅当 K 和 K 的补类在互模拟和超积下都封闭。

以上是标准模态逻辑的互模拟，Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果，下面我们将这些结果转移到分级模态逻辑。仍然沿用例子 5.2.8 中的模型，我们来说明标准模态逻辑的互模拟不保持分级模态公式的语义。（这也说明了 $\Diamond_n$ $(n > 1)$ 在标准模态语言中是不可定义的。）

例子5.3.5. 考虑模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$，其中

(1) $W = \{w, v_1, v_2\}$, $R = \{\langle w, v_1\rangle, \langle w, v_2\rangle\}$, $V(p) = \{v_1, v_2\}$,

(2) $W' = \{w', v'\}$, $R' = \{\langle w', v'\rangle\}$, $V'(p) = \{v'\}$.

现在定义 $Z = \{\langle w, w'\rangle, \langle v_1, v'\rangle, \langle v_2, v'\rangle\}$，易证 Z 是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 之间的互模拟关系，但另一方面，很明显 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_2 p$ 但 $\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond_2 p$。

实际上，我们对于上述例子可以做出如下的理解：根据例子 5.2.8，分级模态公式的语义在标准模态逻辑的有界态射概念下不被保持。而有界态射是一种特殊的互模拟，因此，自然也就有分级模态公式的语义在（一般性的）互模拟下不被保持。

因此，我们需要定义适合于分级模态逻辑的互模拟概念，我们称之为“分级互模拟”，简称为“g-互模”。如同例子 5.2.8 后面的说明，分级模态公式 $\Diamond_2 p$ 的语义在互模拟 Z 下之所以不被保持，关键在于 w 和 w' 这两个点可通达世界的数目不相等。基于这一考虑，我们定义“g-互模”如下。

定义5.3.6. （g-互模）

令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。称关系序列 $Z = (Z_1, Z_2, \cdots)$ 是 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}'$ 之间的 g-互模（记为：$Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}'$），如果

(i) $Z_1 \neq \varnothing$ 且任给 $i \geqslant 1$，都有 $Z_i \subseteq \wp^{<\omega}(W) \times \wp^{<\omega}(W')$；[5]

(ii) 若 $\{w\}Z_1\{w'\}$，则任给 $p \in PV$，$\mathfrak{M}, w \Vdash p \ \ iff \ \ \mathfrak{M}', w' \Vdash p$；

(iii) 若 XZ_iY，则 $|X| = |Y| = i$；

(iv) 若 $\{w\}Z_1\{w'\}$，$wR_{all}X$ 且 $|X| = i \geqslant 1$，则存在 $Y \subseteq_{fin} W'$，使得 $w'R'_{all}Y$ 且 XZ_iY；

(v) 若 $\{w\}Z_1\{w'\}$，$w'R'_{all}Y$ 且 $|Y| = i \geqslant 1$，则存在 $X \subseteq_{fin} W$，使得 $wR_{all}X$ 且 XZ_iY；

(vi) 若 XZ_iY，则任给 $x \in X$，都存在 $y \in Y$，使得 $\{x\}Z_1\{y\}$；并且任给 $y \in Y$，都存在 $x \in X$，使得 $\{x\}Z_1\{y\}$。

如果有 $Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}'$ 且 $\{w\}Z_1\{w'\}$，则我们表示为 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}', w'$，意思是 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{M}', w')$ 这两个点模型之间有 g-互模拟关系 Z。如果存在互模拟 Z 使得 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}', w'$，则我们表示为 $\mathfrak{M}, w \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}', w'$，有时简记为 $w \rightleftharpoons_g w'$，我们也称 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{M}', w')$ 互为 g-互模模型。

根据 g-互模的定义，我们很容易得到分级模态逻辑在模型层次上的如下性质：g-互模蕴涵分级模态等价。换句话说，g-互模保持分级模态公式的语义。

定理5.3.7. 分级模态公式在 g-互模下不变。即：若 $w \rightleftharpoons_g w'$，则 $w \equiv_g w'$（即任给分级模态公式 φ，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \ \ iff \ \ \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$）。

证明：设 $w \rightleftharpoons_g w'$，即：有互模拟 Z 使得 $Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}'$ 且 $\{w\}Z_1\{w'\}$。

施归纳于 φ 的结构。只需考虑分级可能算子的情形，即 $\varphi = \Diamond_i\phi$。$i = 0$ 时结论显然成立。下设 $i \geqslant 1$。

假设 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_i\phi$。则存在 $X \subseteq_{fin} W$，使得 $|X| = i \geqslant 1$，$wR_{all}X$ 且 $X \Vdash \phi$。由 $\{w\}Z_1\{w'\}$，$wR_{all}X$，$|X| = i \geqslant 1$ 和定义 5.3.6(iv)，有：存在 $Y \subseteq_{fin} W'$，使得 $w'R'_{all}Y$ 且 XZ_iY。任给 $y \in Y$，由 XZ_iY 和定义 5.3.6(vi)，可得：存在 $x \in X$，使得 $\{x\}Z_1\{y\}$。据 $X \Vdash \phi$ 和 $x \in X$，有 $x \Vdash \phi$。进而由 $\{x\}Z_1\{y\}$，$x \Vdash \phi$ 和归纳假设，得 $y \Vdash \phi$。再据 y 的任意性，有 $Y \Vdash \phi$。又由 XZ_iY，$|X| = i$ 和定义 5.3.6(iii)，有 $|Y| = |X| = i$。这样我们证得了：存在 $Y \subseteq_{fin} W'$，使得 $|Y| = i$，$w'R'_{all}Y$ 且 $Y \Vdash \phi$，因此 $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond_i\phi$。逆方向同理可证。 $\dashv$

很容易证明 g-有界态射是一种 g-互模。即

[5]任给集合 W，定义 $\wp^{<\omega}(W) := \{X \mid X \subseteq_{fin} W\}$，即 $\wp^{<\omega}(W)$ 是 W 的所有有穷子集构成的类。

推论5.3.8. 令 f 是模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ 到模型 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ 的 g-有界态射使得 $f(\{w\}) = \{w'\}$，则有 $w \rightleftharpoons_g w'$。

证明： 只需令 $Z_i = \{\langle X, f(X) \rangle \mid X \subseteq_{fin} W \text{ 且 } |X| = i\}$。可以证得 g-互模定义中的 6 个条件都成立。 $\dashv$

称一阶公式 $\alpha(x)$ 在 g-互模下不变，如果任给 Z 满足 $Z = (Z_1, \cdots) : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}', w'$，则 $\mathfrak{M} \vDash \alpha(x)[w]$ 当且仅当 $\mathfrak{M}' \vDash \alpha(x)[w']$。运用 g-互模我们可以证明分级模态逻辑中的 Van Benthem 刻画定理：一阶公式等价于某个分级模态公式的标准翻译的充分必要条件是该一阶公式在 g-互模下不变（参见 de Rijke [24]，定理 4.9）。即：

定理5.3.9. （分级模态逻辑的 *Van Benthem* 刻画定理）

令 $\alpha(x)$ 是可数带等词一阶语言的公式。则 $\alpha(x)$ 等价于某个分级模态公式的标准翻译当且仅当 $\alpha(x)$ 在 g-互模下不变。

定理 5.3.9 说明：分级模态逻辑可以看作是一阶逻辑的 g-互模不变片断。

令 K 是一类点模型。称 K 是由一集分级模态公式可定义的，如果存在分级模态公式集 Δ 使得 Δ 恰好在 K 中有效，即 $\mathrm{K} = \{(\mathfrak{M}, w) \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \Delta\}$；称 K 是由某个分级模态公式可定义的，如果它是由某个单元分级模态公式集可定义的。称 K 在 g-互模下封闭，如果从 $(\mathfrak{M}, w) \in \mathrm{K}$ 可得出 $(\mathfrak{M}, w)$ 的每个 g-互模模型也属于 K；K 在超积（超幂）下封闭以及 K 的补类的定义同于前面标准模态逻辑中的相关定义。

由此可以证明分级模态逻辑中的可定义性结果（参见 de Rijke [24]，定理 4.10）：

定理5.3.10. 令 K 是一类点模型。则

(i) K 是由一集分级模态公式可定义的，当且仅当 K 在 g-互模和超积下封闭，并且 K 的补类在超幂（和 g-互模）下封闭；

(ii) K 是由某个分级模态公式可定义的，当且仅当 K 和 K 的补类在 g-互模和超积下都封闭。

第六章　结语

本文在对前人研究成果进行综述的基础上，对分级模态逻辑的元理论进行了初步探讨和研究，其中包括系统的可靠性、完全性、对应定理、一致性定理和真扩充定理，以及一些模型论性质如紧致性、Löwenheim-Skolem 性质、不变性结果、Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果等。文章的亮点主要有：

一、定义了一个重要关系 R_k，通过利用 R_k 大大简化了 De Caro [5] 中 $Gr(K)$ 的完全性定理的证明。R_k 的定义不是新的，但运用这一定义来证明推论 3.2.6 这一方法是新的。并且，我们还初步研究了 R_k 的一些有趣的集合论性质，比如 $\subseteq$ 相对于 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 的非良基性。

二、证明了分级模态逻辑的对应定理、真扩充定理。通过对应定理，我们发现，分级模态逻辑与标准模态逻辑在语义上是相同的，前者对后者的扩充仅在于语法的层次上，即语言和公理上。并且，通过一些比较简单的记法，我们也比较巧妙地证明了真扩充定理，避免了因分级而带来的复杂性。

三、通过引入删分级模态词的语形证明方法，证明了分级模态逻辑的一致性定理。事实上，证明系统一致性的方法有许多，如我们文中第四章同时给出的语义证明方法（运用可靠性定理）。删分级模态词方法与删模态词方法一样，属于一种化归方法，它通过定义一个映射，将分级模态逻辑的一致性问题化归为经典命题逻辑的一致性，其中映射的定义需要一定的技巧。

另外，本文还比较系统地探讨了分级模态逻辑的模型论性质，完成了某些定理以及推论的证明。

最后，我们提出一些有待研究的问题，希望这些问题能够引起研究者的兴趣和注意。

第一，人们对于分级模态系统的研究，通常是着眼于考察分级模态系统和标准模态系统之间的关系。我们也可以研究不同级度的分级模态系统的关系。也就是说，我们可以先按照可通达世界的数目定义 k 级模态语言和 l 级模态语言，再对前面分级模态语义和系统进行相应的修改，可分别得到 k 级模态系统和 l 级模态系统（其中 $k, l \in \mathbb{N}$ 且 $k \neq l$），研究这两种不同级度的分级模态系统的关系。这在某种程度上是从分级模态系统内部去研究分级模态系统之间的关系。

第二，分级模态理论已比较完善，同样，我们也可以将分级思想推广到时态概念，建立完备的分级时态系统，研究分级时态的元理论。

第三，在讨论分级模态逻辑的模型构造时，我们只谈到三种方法：不交并、生成子模型、g-有界态射，但没有提及另一种模型构造——超滤扩充。因此，我们需要构造适合于分级模态逻辑的超滤扩充，并尝试证明分级模态逻辑在超滤扩充下的不变性结果。

第四，我们已经将标准模态逻辑在模型上的不变性结果、Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果推广到分级模态逻辑。那么，标准模态逻辑在框架层次上的一些性质，如 Goldblatt-Thomason 定理也应该可以推广到分级模态逻辑。也就是说，在有了适合于分级模态逻辑的超滤扩充的基础上，我们应该有分级模态逻辑的 Goldblatt-Thomason 定理，即得到一阶可定义框架类是分级模态可定义的充分必要条件。

第五，分级模态逻辑在其他领域也有许多研究和应用。比如，在认知逻辑中，可以运用分级模态理论来研究不确定的知识；在计算机科学领域，可以研究分级模态逻辑的计算复杂性和自动推理等问题。

参考文献

[1] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. Modal Logic[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[2] C. Cerrato. General Canonical Models for Graded Normal Logics (Graded Modalities IV)[J]. Studia Logica, 1990, 49: 241-252.

[3] C. Cerrato. Decidability by Filtrations for Graded Normal Logics (Graded Modalities V)[J]. Studia Logica, 1994, 53: 61-74.

[4] F. Corradini, R. De Nicola and A. Labella. Graded Modalities and Resource Bisimulation[J]. FSTTCS' 99, LNCS 1738, Springer Verlag, 1995: 130-144.

[5] F. De Caro. Graded Modalities II[J]. Studia Logica, 1988, 47: 1-10.

[6] F. De Caro. Normal Predicative Logics with Graded Modalities[J]. Studia Logica, 1988, 47: 11-22.

[7] K. J. Devlin. The Joy of Sets : Fundamentals of Contemporary Set Theory[M]. 2nd ed., Springer-Verlag New York, Inc., 1993.

[8] M. Fattorosi-Barnaba and F. De Caro. Graded Modalities I[J]. Studia Logica, 1985, 44: 197-221.

[9] M. Fattorosi-Barnaba and C. Cerrato. Graded Modalities III[J]. Studia Logica, 1988, 47: 99-110.

[10] M. Fattorosi-Barnaba and S. Grassotti. An Infinitary Graded Modal Logic (Graded Modalities VI)[J]. Mathematical Logic Quarterly, 1995, 41: 547-563.

[11] K. Fine. In So Many Possible Worlds[J]. Notre Dame Journal of Formal Logic, 1972, 13: 516-520.

[12] L. F. Goble. Grades of Modality[J]. Logique et Analyse, 1970, 13: 323-334.

[13] R. Goldblatt. Logics of Time and Computation[M]. CSLI Lecture Notes No. 7, Second Edition, Leland Stanford Junior University, 1992.

[14] A. G. Hamilton. Logic for Mathematicians[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

[15] W. van der Hoek. On the Semantics of Graded Modalities[J]. Journal of Applied Non-Classical Logic, 1992, 2: 81-123.

[16] W. van der Hoek and J.-J. Ch. Meyer. Graded Modalities in Epistemic Logic[J]. Logical Foundations of Computer Science -Tver'92 (Lecture Notes in Computer Science), Springer, 1992: 503-514.

[17] W. van der Hoek and M. de Rijke. Counting Objects[J]. Journal of Logic and Computation, 1995, 5: 325-345.

[18] Y. Kazakov and I. Pratt-Hartmann. A Note on the Complexity of the Satisfiability Problem for Graded Modal Logics[EB/OL]. New York: Cornell University Library, 2009[2011-05-17]. http://arxiv.org/abs/0905.3108v1.

[19] J. K. Mattila. Possibility Based Modal Semantics for Graded Modifiers[J]. IFSA 2007, LNAI 4529, Springer-Verlag, 2007: 220-230.

[20] A. Montanari and A. Policriti. A Set-Theoretic Approach to Automated Deduction in Graded Modal Logics[EB/OL]. 1997[2011-05-17]. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.51.205.

[21] A. Nenkova. A Tableau Method for Graded Intersections of Modalities: A Case for Concept Languages[J]. Journal of Logic, Language and Information, 2002, 11: 67-77.

[22] H. J. Ohlbach, R. A. Schmidt and U. Hustadt. Translating Graded Modalities into Predicate Logic[J]. Published in Wansing,H. (eds), Proof Theory of Modal Logic, Applied Logic Series 2, Kluwer, 1996: 253-291.

[23] E. Pacuit. Weak Completeness of Graded Modal Logic[J]. unpublished manuscript, ILLC, University of Amsterdam, 2005.

[24] M. de Rijke. A Note on Graded Modal Logic[J]. Studia Logica, 2000, 64: 271-283.

[25] S. Tobies. A PSpace Algorithm for Graded Modal Logic[J]. Published in Ganzinger,H. (eds), Automated Deduction – CADE-16, 16th International Conference on Automated Deduction, LNAI 1632, Trento, Italy, July 7-10, Springer-Verlag, 1999: 52-66.

[26] S. Tobies. PSpace Reasoning for Graded Modal Logics[J]. Journal of Logic and Computation, 2000: 10, 1-22.

[27] 包磊. 分级模态的几个基本系统[D]. 广州：华南师范大学政治与行政学院，2009.

[28] 李小五. 模态逻辑[M]. 广州：中山大学出版社，2005.

[29] 马明辉. 走向模型论的模态逻辑[J]. 逻辑学研究，2009(1): 62-77.

[30] 沈复兴. 模型论导引[M]. 北京：北京师范大学出版社，1995.

[31] 熊明. 古典逻辑[M]. 教学讲义（未出版），2008.

[32] 徐明. 符号逻辑讲义[M]. 武汉：武汉大学出版社，2008.

后　记

三年的研究生生活即将结束，我们又将各奔东西，为各自的理想而奔波奋斗。回想研究生三年，在这段短暂而又漫长的时期，大部分时间都沉浸在知识的海洋里，虽然坚持得很吃力，但是我还是坚持下来了，为了自己的人生理想，一直坚持着，从来都没有放弃。我想，我的研究生三年可以说无悔了，应该可以画上一个圆满的句号。而此时此刻，想要说的感谢的话语，实在太多太多。

我首先要感谢我的导师熊明老师。在他的细心指导下，我学会了许多，成长了许多，包括学习与生活、为人与处事。熊老师严谨细致、一丝不苟的作风是我学习的榜样。熊老师在本论文的写作过程中倾注了大量的心血，从选题到开题报告，再到一遍又一遍地指出每稿中的具体问题，严格把关，循循善诱。同时，在考博的那段时间里，熊老师多次通过电话或电子邮件等方式，询问我的考博复习和初试复试情况；在选定报考学校、选择录取学校等问题上，熊老师也给予了我极大的关心与支持。在此我对熊老师表示衷心感谢。

此外，我还要感谢：学识渊博的胡泽洪老师、和蔼可亲的周祯祥老师、文思敏捷的王健平老师、美丽大方的赵艺老师、谦虚谨慎的关老健老师，感谢各位老师在这三年对我的悉心教导。还记得赵艺老师曾经对我说过的一句话："如果你在研究生这三年坚持（好好学习）下来的话，那么以后的路就容易走了。"我一直把这句话当做座右铭，铭记于心，作为学习和生活的动力。

我要特别感谢中山大学李小五老师，通过旁听李老师的模态逻辑以及子结构逻辑课，以及平时跟他的交流，我奠定了比较好的逻辑学功底，受益匪浅。在此对李老师表示感谢。

我也要感谢马明辉先生。马先生是清华大学的一位逻辑学博士。我是在看了他的论文"走向模型论的模态逻辑"后，给他发了邮件，向他寻求有关参考资料，并就熊明老师关于"建立完备的极小分级时态系统"的想法向马先生请教，当时他在荷兰留学，我们就经常通过电子邮件联系，几乎每天一封邮件，就各自的看法进行交流。尽管至今我在分级时态这个话题上还没有取得突破性进展，但是通过与马先生的交流讨论，我也学会了如何思考问题，受益不少。

另外，我还要感谢邓雄雁、陈敏等师兄师姐，何意添等同学，感谢他们三年来对我的关心和照顾，感谢他们对我的理解和包容，使我学会以一颗感恩的

心去重新思考学习和生活。同时，我也要感谢何小琳、刘德华等师弟师妹，他们在考博方面对我给予了关心与帮助。借此机会，我还要感谢在求学路上所有给过我关心和帮助的人。

最后我要特别感谢我的家人和亲友们对我一贯的支持和理解，使我能顺利完成学业。其中，我要特别感谢我的母亲，她一直都默默地支持我，教导我，给予我信心和勇气，以及生活的动力。

范杰

2011 年 5 月

华南师范大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名： 日期: 年 月 日

学位论文使用授权声明

本学位论文作者完全了解华南师范大学有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权华南师范大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密☐，在________年解密后适用本授权书。

2、不保密☑。

(请在以上相应方框内打“✓”)

作者签名： 日期: 年 月 日

导师签名： 日期: 年 月 日