分级模态的元理论初探

范杰

北大哲学系2011级博士生, 2012.3.20

研究背景

- “分级模态”（Graded modalities）一词是指给模态词分级，确切地说，是给模态词所表达的可通达世界的数目分级。L. F. Goble[10] 最先引入了分级模态词 N_i（$i \in \mathbb{N}$），每个模态词表达不同的必然性程度。例如公式 $N_m\varphi \wedge N_n\psi$ $(m > n)$，它的直观解释是 φ 和 ψ 都是必然的，但是 φ 比 ψ 更必然。受 Tarski 数字量词的启发，K. Fine[9] 引入了所谓的数字模态词：$\Diamond_k$ $(k \in \mathbb{N})$，这些模态词刻画数字可能性。Fine 在论文的开头部分就说到：标准模态逻辑处理命题在至少一个可能世界中为真的概念，这使得我们很自然地考虑命题在至少 k 个可能世界中为真的情况（其中 k 是任意非负整数）。随后，他建立了几个完备的分级模态系统。

研究背景

- Ordinary modal logic deals with the notion of a proposition being true in at least one possible world. This makes it natural to consider the notion of a proposition being true in k possible worlds for any nonnegative integer k. Such a notion would stand to Tarski's numerical quantifiers as ordinary possibility stands to the existential quantifier.

  ——Kit Fine, "In So Many Possible Worlds"

研究背景

- M. Fattorosi-Barnaba & F. De Caro[6] 提出了 T 的分级模态公理化系统 $\overline{T}$，并证明了 $\overline{T}$ 的完全性、紧致性和可判定性结果。De Caro[4] 运用典范模型技术证明了 K^0、$K4^0$、$S5^0$ 等分级模态公理化系统的完全性结果，并重新证明了 [6] 中提出的 $\overline{T}$ 的完全性结果。同时，De Caro 在 [5] 中建立了分级模态谓词逻辑，证明了 K^0、$K4^0$、$S5^0$、T^0 的一阶扩充版本的完全性定理。Fattorosi-Barnaba & C. Cerrato[7] 给出了分级模态公理化系统 $S4^0$，并得出了 $S4^0$ 的完全性和紧致性结果。Cerrato[2] 论证了通常的典范模型方法不适用于对称性系统 KB^0、KBD^0、KBT^0，进而给出了一般典范模型（general canonical models）思想，并运用这一思想证明了包括对称性系统在内的主要分级系统的完全性和紧致性定理。

研究背景

- E. Pacuit [19] 通过引入“典范语句（canonical sentences）”思想，给出了分级模态逻辑弱完全性定理的一种新的证明。
- 1986 年，W. van der Hoek 在和 Fattorosi-Barnaba、De Caro 等人的交流中，提出了将过滤技术运用于分级模态的建议，这一建议后来被 Cerrato 采纳并予以实施。Cerrato[3] 首先论证了通常的过滤技术不适用于对称性系统，然后提出了一般过滤（general filtrations）技术，并运用这一技术证明了 K^0-$S5^0$ 等 15 个主要分级模态系统的可判定性。
- Fattorosi-Barnaba & S. Grassotti [8] 建立了第一个完全的无穷分级模态系统 $K^0_{\omega_1}$，从而使分级模态的研究进入到无穷逻辑的领域。

研究背景

- 互模拟是研究模态逻辑的基本概念。但是，标准模态语言的互模拟概念不保持分级模态逻辑的语义。在新的计算观点下，M. de Rijke [20] 定义了适合于分级模态逻辑的互模拟概念（简称“g-互模”），为分级模态逻辑的模型论研究提供了工具。Rijke 使用 g-互模和选择方法重新证明了有穷模型性，并得出了分级模态逻辑在模型层次上的不变性和可定义性结果。Rijke 的这篇文献堪称分级模态逻辑领域的经典之作，它标志着分级模态逻辑在模型论方面的成熟和完善。
- 马明辉[23] 则从抽象模型论的角度对扩张模态逻辑进行了探讨和研究。

分级模态语言

Definition

分级模态语言 $\mathcal{L}$ 是一集分级模态公式 φ，φ 是由下列形成规则得到的：

$$\varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \to \psi) \mid \Diamond_n\varphi$$

其中 $p \in PV$，$n \in \mathbb{N}$。

任给 $n \in \mathbb{N}$，$\Diamond_n\varphi$ 的直观意思是“φ 在至少 n 个可通达世界中成立”，或读作“φ 在至少 n 个后继中成立”。对偶 $\Box_n\varphi$ 的直观意思是“φ 在少于 n 个后继中不成立”。

这样，$\Diamond_0\varphi$ 的直观意思就是“φ 在至少 0 个可通达世界中成立”，相当于 $\top$；$\Diamond_1\varphi$ 相当于 $\Diamond\varphi$，$\Diamond_1$ 相当于标准可能算子 $\Diamond$。相应的，$\Box_0\varphi$ 相当于 $\bot$，$\Box_1$ 相当于标准必然算子 $\Box$。

分级模态语义

Definition

① $V(p, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w \in \sigma(p)$

② $V(\neg\varphi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad V(\varphi, w) = 0$

③ $V(\varphi \to \psi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad V(\varphi, w) = 0$ 或 $V(\psi, w) = 1$

④ $V(\Diamond_n \varphi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\{w' \in W : w' \in R(w) \ \& \ V(\varphi, w') = 1\}| \geqslant n$

$\sigma(p)$ 表示所有使得 p 在其中为真的世界构成的集合，简称 p 的点集。因此，$w \in \sigma(p)$ 意思是 p 在世界 w 中为真。同时，$|X|$ 表示集合 X 的基数。称 φ 在 w 点上为真或在 w 点上可满足，如果 $V(\varphi, w) = 1$。

分级模态系统

Definition

极小系统 $Gr(K)$ 是包含下列公理模式，并且在下列初始规则下封闭的最小集合：

$Ax.1$ 所有重言式的代入特例

$Ax.2$ $\Diamond_n\varphi \to \Diamond_m\varphi \quad (n \geqslant m)$

$Ax.3$ $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond_n\varphi \to \Diamond_n\psi) \quad (n \in \mathbb{N})$

$Ax.4$

$\Diamond!_0(\varphi \wedge \psi) \to ((\Diamond!_{n_1}\varphi \wedge \Diamond!_{n_2}\psi) \to \Diamond!_{n_1+n_2}(\varphi \vee \psi)) \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{N})$

MP：从 φ 和 $\varphi \to \psi$ 推出 ψ

RN：$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash \Box\varphi$

分级模态系统

Corollary

$(THM1)\quad \vdash \Diamond_{n+1}\varphi \to \Diamond_n\varphi$

$(THM2)\quad \vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box_n\varphi \to \Box_n\psi)$

$(THM3)\quad \vdash \Diamond_n(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond_n\varphi \wedge \Diamond_n\psi$

$(THM4)\quad \vdash \Diamond!_n\varphi \wedge \Diamond!_m\varphi \to \bot \qquad (n \neq m)$

$(THM5)\quad \vdash \Box_n\neg\varphi \leftrightarrow \Diamond!_0\varphi \triangledown \Diamond!_1\varphi \triangledown \cdots \triangledown \Diamond!_{n-1}\varphi$ （$\triangledown$ 表示“不相容析取”）

$(THM6)\quad \vdash \neg\Diamond_n(\varphi \vee \psi) \to \neg\Diamond_n\varphi$

$(THM7)\quad \vdash \Diamond_{n+m}(\varphi \vee \psi) \to \Diamond_n\varphi \vee \Diamond_{m+1}\psi$

$(THM8)\quad \vdash \Diamond!_n\varphi \wedge \Diamond_m\varphi \to \bot \qquad (m > n)$

$(THM9)\quad \vdash \Diamond_n(\varphi \wedge \psi) \wedge \Diamond_m(\varphi \wedge \neg\psi) \to \Diamond_{n+m}\varphi$

$(THM10)\quad \vdash \Diamond!_0(\varphi \wedge \psi) \wedge \Diamond_n\varphi \wedge \Diamond_m\psi \to \Diamond_{n+m}(\varphi \vee \psi)$

分级模态系统

Corollary

任给 $n \in \mathbb{N}$,

① 若 $\vdash \varphi \to \psi$，则 $\vdash (\Diamond_n\varphi \to \Diamond_n\psi) \wedge (\Box_n\varphi \to \Box_n\psi)$.

② 若 $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$，则 $\vdash (\Diamond_n\varphi \leftrightarrow \Diamond_n\psi) \wedge (\Box_n\varphi \leftrightarrow \Box_n\psi)$.

③（等价置换规则）若 ϕ 是 φ 的子公式且 $\vdash \psi \leftrightarrow \phi$，则 $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi[\psi/\phi]$，其中 $\varphi[\psi/\phi]$ 是用 ψ 置换 φ 中特定的 ϕ 得到的结果。

④ 若 $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$，则 $\vdash \Diamond!_n\varphi \leftrightarrow \Diamond!_n\psi$.

⑤ $\vdash \Diamond_n\varphi \leftrightarrow \neg\Box_n\neg\varphi$.

分级模态系统

$$(D^0)\quad \Box\varphi \to \Diamond\varphi \qquad (T^0)\quad \varphi \to \Diamond\varphi \qquad (B^0)\quad \varphi \to \Box\Diamond\varphi$$

$$(4^0)\quad \Diamond\Diamond_n\varphi \to \Diamond_n\varphi \qquad (5^0)\quad \Diamond_n\varphi \to \Box\Diamond_n\varphi$$

$$(Ax.5)\quad \Box(\varphi \to \Diamond!_m\varphi) \to \neg\Diamond!_n\varphi \qquad (\tfrac{n}{m} \notin \mathbb{N})$$

$$(Ax.6)\quad \Diamond_{pm}(\psi \wedge \Diamond!_m\psi \wedge \Diamond_n(\varphi \wedge \Diamond_m\psi)) \to \Diamond_{pn}\varphi \quad (m \neq 0)$$

$$Gr(KD) := Gr(K) + D^0 \qquad Gr(KT) := Gr(K) + T^0$$

$$Gr(KB) := Gr(K) + B^0 \qquad Gr(K4) := Gr(K) + 4^0$$

$$Gr(K5) := Gr(K) + 5^0 \qquad Gr(KDB) := Gr(KD) + B^0$$

$$Gr(KD4) := Gr(KD) + 4^0 \qquad Gr(KD5) := Gr(KD) + 5^0$$

$$Gr(K45) := Gr(K4) + 5^0 \qquad Gr(KD45) := Gr(KD4) + 5^0$$

$$Gr(KTB) := Gr(KT) + B^0 \qquad Gr(K4B) := Gr(K4) + B^0$$

$$Gr(S4) := Gr(KT) + 4^0 + (Ax.5) + (Ax.6)$$

$$Gr(S5) := Gr(KT) + 5^0$$

引理的证明

将所有极大一致集构成的类记为 Θ。

Lemma

令 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_h \in \Theta$ $(h \geqslant 2)$ 且两两不同。则存在 $\psi_1, \cdots, \psi_h \in \mathcal{L}$，使得：$\psi_i \in \Gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ 且 $\vdash \bigwedge\{\neg(\psi_i \wedge \psi_j) : 1 \leqslant i < j \leqslant h\}$。

Lemma

令 $\Gamma \in \Theta$。

(a) 若 $n, m \in \mathbb{N}$ 且 $\Diamond!_n\varphi, \Diamond!_m\varphi \in \Gamma$，则 $n = m$。

(b) 任给 $\varphi \in \mathcal{L}$，下列命题有且仅有一个成立：

① 任给 $n \in \mathbb{N}$，$\Diamond_{n+1}\varphi \in \Gamma$

② 存在惟一的 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\Diamond!_n\varphi \in \Gamma$。

(c) 令 $n \in \mathbb{N}$。若 $\vdash \varphi \to \psi$ 且 $\Diamond!_n\psi \in \Gamma$，则存在惟一的 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\Diamond!_m\varphi \in \Gamma$ 且 $m \leqslant n$。

函数的引入

为了刻画分级这一思想，需要引入一个重要函数。

Definition

令 $\Gamma, \Delta \in \Theta$，$\varphi \in \mathcal{L}$。定义函数 f：$\Theta \times \Theta \to \omega + 1$ 如下：

$$f(\Gamma, \Delta) = \begin{cases} \omega & \text{若 } \varphi \in \Delta, \text{则 } \Diamond_{n+1}\varphi \in \Gamma \\ min\{n \in \mathbb{N} : \varphi \in \Delta \ \& \ \Diamond!_n\varphi \in \Gamma\} & \text{否则。} \end{cases}$$

函数的引入

说明：① 据前面的引理和公理集合论的相关知识，易知 f 是良定义的。

② $f(\Gamma, \Delta)$ 表示 Γ 可通达到的 Δ 的副本数目。[1]

③ 函数 f 对极大一致集的重复次数进行了规定，因此它在极大一致集之间建立了某种分级方面的联系。注意 $f(\Gamma, \Delta)$ 既可以看作是序数，也可以看作是集合。

[1]所谓 Δ 的副本，就是说和 Δ 具有同样真值指派的那些世界（即极大一致集），换句话说，是和 Δ 使得同样的语句在其中取值相同的那些世界，更简单的说，它（们）和 Δ 证实了同样的语句。特别地， Δ 是 Δ 自身的一个副本，所以任一世界的副本总是存在的。

关系的引入

为了证明的方便，本文对 Fine[9] 中所定义的一个重要关系 R_k 进行修改。R_k（k 是任意自然数）定义如下：任给 $\Gamma, \Gamma' \in \Theta$ 以及 $\varphi \in \mathcal{L}$，

$\Gamma R_k \Gamma' \quad iff \quad (\varphi \in \Gamma' \ \Rightarrow \ \Diamond_k \varphi \in \Gamma)$

据 R_k 的定义，易得：$\Gamma R_k \Gamma' \quad iff \quad (\Box_k \varphi \in \Gamma \ \Rightarrow \ \varphi \in \Gamma')$

$\Gamma R_k \Gamma'$ 的直观解释是："至少存在 k 个 Γ' 类的世界（即 Γ' 的副本），这些世界都是从 Γ 可通达的。" 这个 R_k 和前面定义的函数 f 的联系可以用如下引理表示：

关系的引入

Lemma

任给 $\Gamma, \Gamma' \in \Theta$ 以及 $k \in \mathbb{N}$，都有：$\Gamma R_k \Gamma' \quad \textit{iff} \quad f(\Gamma, \Gamma') \geqslant k$。

关系的引入

Proof.

$k=0$ 时该引理显然成立，只需考虑 $k \geqslant 1$ 的情形。

“$\Rightarrow$”：若 $f(\Gamma, \Gamma') < k$，则存在 $l < k$，使得 $f(\Gamma, \Gamma') = l$。据 f 的定义，有：存在 φ，$\varphi \in \Gamma'$ 且 $\Diamond!_l\varphi \in \Gamma$。据后者，易得 $\Diamond_{l+1}\varphi \notin \Gamma$。又 $k \geqslant l+1$，因此 $\Diamond_k\varphi \notin \Gamma$，矛盾于 $\varphi \in \Gamma'$ 和 $\Gamma R_k \Gamma'$。

“$\Leftarrow$”：若 $\Gamma R_k \Gamma'$ 不成立，则存在 φ，使得 $\varphi \in \Gamma'$ 且 $\Diamond_k\varphi \notin \Gamma$。若 $f(\Gamma, \Gamma') \geqslant k$，考虑两种情形：

情形 a：$f(\Gamma, \Gamma') = \omega$。据 f 的定义、$\varphi \in \Gamma'$ 和 $k-1 \in \mathbb{N}$，有 $\Diamond_k\varphi \in \Gamma$。矛盾于 $\Diamond_k\varphi \notin \Gamma$。

情形 b：$f(\Gamma, \Gamma') = m$ 且 $m \in \mathbb{N}$。则 $\Diamond!_m\varphi \in \Gamma$，从这个可以得出 $\Diamond_m\varphi \in \Gamma$。再据 $m \geqslant k$，有 $\Diamond_k\varphi \in \Gamma$。矛盾于 $\Diamond_k\varphi \notin \Gamma$。 □

关系的引入

上述引理更进一步表明了 $f(\Gamma, \Gamma')$ 的直观意思，即 Γ 所通达到的 Γ' 的副本数目。记 R_1 为 R，则从上述引理很容易得出：

Corollary

$\Gamma R \Gamma'$ *iff* $f(\Gamma, \Gamma') \neq 0$。（其中 $\Gamma, \Gamma' \in \Theta$）

关系的引入

下面我们将表述模态逻辑中一个熟知且非常重要的引理。

Lemma

令 $\Gamma \in \Theta$，$\varphi \in \mathcal{L}$。若 $\Diamond\varphi \in \Gamma$，则存在 $\Gamma' \in \Theta$，使得 $\Gamma R \Gamma'$ 且 $\varphi \in \Gamma'$。

Proof.

参见 P. Blackburn *et al.* [1] 中的引理 4.20。请注意：虽然我们这里不是在典范模型中对它进行证明，但由于 R_k 定义的特殊性，且 $\Diamond_1$ 相当于 $\Diamond$，实际上证明引理所需要的条件都满足，因此该引理成立。 □

关系的引入

据前面的推论和引理，我们可以得出一个非常重要的结果，该结果在后面将会多次被用到：[2]

Corollary

令 $\Gamma \in \Theta$，$\varphi \in \mathcal{L}$。若 $\Diamond\varphi \in \Gamma$，则存在 $\Gamma' \in \Theta$，使得 $f(\Gamma, \Gamma') \neq 0$ 且 $\varphi \in \Gamma'$。

[2]参见 De Caro [4]。在他的文章中，为了证明推论这个结果，De Caro 需要证明两个重要引理，并且对于该结果的证明也是运用了联立归纳法，比较复杂；而我们在本文中通过定义 R_k，大大简化了它的证明过程。

关系的引入

我们还可以得出进一步的结论。比如，上述推论的逆显然是成立的。事实上，据 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 的定义，可得到更一般的结论：

Corollary

令 $\Gamma \in \Theta$，$\varphi \in \mathcal{L}$。若存在 $\Gamma' \in \Theta$，使得 $f(\Gamma, \Gamma') \geqslant k$ 且 $\varphi \in \Gamma'$，则 $\Diamond_k \varphi \in \Gamma$。

关系的集合论性质

另外，根据集合论的知识，我们可以将 $\Gamma R_k \Gamma'$ 记为 $\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \in R_k$。因此，从 R_k 的定义，我们还可得出下列有趣的引理：$\subseteq$ 相对于 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 不是良基的。首先，我们给出如下定义：

Definition

称 $\subseteq$ 相对于 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 是良基的，如果不存在无穷序列 $\cdots \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0$。

关系的集合论性质

接下来证明我们的声称，即

Lemma

存在无穷序列 $\cdots \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0$。

Proof.

不失一般性，我们只需证明：

（▲）令 $k, l \in \mathbb{N}$。若 $k \geqslant l$，则 $R_k \subseteq R_l$。

任给 $\Gamma, \Gamma' \in \Theta$，若 $\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \in R_k$，即 $\Gamma R_k \Gamma'$。要证 $\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \in R_l$，即证 $\Gamma R_l \Gamma'$。令 $\varphi \in \Gamma'$，则由 $\Gamma R_k \Gamma'$ 和 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 的定义，有 $\Diamond_k \varphi \in \Gamma$。又 $k \geqslant l$，有 $\Diamond_l \varphi \in \Gamma$。再根据 R_k $(k \in \mathbb{N})$ 的定义，得 $\Gamma R_l \Gamma'$。因此 $R_k \subseteq R_l$，从而（▲）得证，进而引理得证。 □

关系的集合论性质

从上述引理，易得

Lemma

$(X=\{R_0,R_1,\cdots,R_k,\cdots\},\subseteq)$ $(k\in\mathbb{N})$ 是全序集，但不是良序集。

Proof.

显然 $\subseteq$ 是自返、反对称和传递的，又任给 $R_k,R_l\in X$，由于 $k,l\in\mathbb{N}$，总有 $k\geqslant l$ 或者 $k\leqslant l$，从而据上述引理中的（▲），有 $R_k\subseteq R_l$ 或者 $R_l\subseteq R_k$。因此 $(X,\subseteq)$ 是全序集。但根据上述引理，易得：X 作为自身的非空子集没有最小元，因此 $(X,\subseteq)$ 不是良序集。 □

可满足集族

为了证明方便，我们定义一个重要概念：可满足集族。

Definition

可满足集族

令 $\Gamma \in \Theta$。定义 Γ 的可满足集族 $SF(\Gamma)$ 如下：

$$SF(\Gamma) := \cup\{\{\Delta\} \times f(\Gamma, \Delta) : \Delta \in \Theta\}$$

说明：$SF(\Gamma)$ 的直观形式是具有特定性质的卡氏积的并。具体地说，每个极大一致集 Δ 的副本都重复了 $f(\Gamma, \Delta)$ 次，所有的这些都组合起来就构成了 $SF(\Gamma)$。由于卡氏积是有序对的集合，所以 $SF(\Gamma)$ 中的元素都是一些形如 $\langle \Delta, n \rangle$（$n \in \mathbb{N}$）的有序对，其中 $n \in f(\Gamma, \Delta)$ 或者说 $n < f(\Gamma, \Delta)$（$\because$ 据公理集合论的知识，序数上的小于关系等价于属于关系），据 f 的定义，这是合理的。

完全性

Theorem

任给 $\varphi \in \mathcal{L}$，$n \in \mathbb{N}$ 以及 $\Gamma \in \Theta$，

$$\Diamond_n \varphi \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad |\{\Delta \in SF(\Gamma) : \varphi \in \Delta\}| \geqslant n$$

完全性

现在我们准备证明 $Gr(K)$ 的完全性定理。分两步：第一步，建立典范模型；第二步，证明真值引理。在第一步时，我们采用 Henkin 方法，即在 $Gr(K)$ 的典范模型 $M^{\Lambda} = \langle W^{\Lambda}, R^{\Lambda}, V^{\Lambda} \rangle$ 中，对于典范世界集 W^{Λ} 中的每个元素我们考虑极大 Λ 一致集，并且，由于我们要考虑到分级，我们必须取每个极大一致集的副本；典范关系 R^{Λ} 被合适的定义，需要考虑到分级观念；典范赋值 V^{Λ} 满足真值引理中命题变元的情形，即“属于当且仅当在其中为真”。在第二步时，证明：“属于当且仅当在其中为真”这一属性适用于所有分级模态公式。

完全性

有了这些分析，我们可以定义 $Gr(K)$ 的典范模型如下：

Definition

（$Gr(K)$ 的典范模型）

称 $M^\Lambda = \langle W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda \rangle$ 是 $Gr(K)$ 的典范模型，如果

(1) $W^\Lambda = \{\langle \Gamma, i \rangle : \Gamma \in \Theta, i < \omega\}$

(2) $\langle \Gamma, i \rangle R^\Lambda \langle \Delta, j \rangle \quad \Leftrightarrow \quad j < f(\Gamma, \Delta)$

(3) $V^\Lambda(p, \langle \Gamma, i \rangle) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p \in \Gamma$

完全性

从上述定义，容易证明下面的结论：

Corollary

$\langle \Gamma, i\rangle R^{\Lambda}\langle \Delta, j\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \Delta, j\rangle \in SF(\Gamma)$

Proof.

若 $\langle \Gamma, i\rangle R^{\Lambda}\langle \Delta, j\rangle$，则据 R^{Λ} 的定义，有 $j < f(\Gamma, \Delta)$，再据可满足集族的定义，得 $\langle \Delta, j\rangle \in SF(\Gamma)$。反过来，若 $\langle \Delta, j\rangle \in SF(\Gamma)$，则 $j < f(\Gamma, \Delta)$，据 R^{Λ} 的定义，得 $\langle \Gamma, i\rangle R^{\Lambda}\langle \Delta, j\rangle$。 □

完全性

下面证明真值引理，即证明：

Lemma

任给 $\langle \Gamma, i \rangle \in W^\Lambda$，以及 $\varphi \in \mathcal{L}$，都有

$$V^\Lambda(\varphi, \langle \Gamma, i \rangle) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \Gamma$$

Proof.

施归纳于 φ 的结构。$\varphi = p \in PV$。据 V^Λ 的定义显然。

$\varphi = \neg\psi$ 以及 $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$ 的情形据语义定义，极大一致性和归纳假设易得。

$\varphi = \Diamond_n\psi$。此时，我们有：$V^\Lambda(\Diamond_n\psi, \langle \Gamma, i \rangle) = 1$ *iff* $|\{\langle \Delta, j \rangle \in W^\Lambda : \langle \Gamma, i \rangle R^\Lambda \langle \Delta, j \rangle \ \&\ V^\Lambda(\psi, \langle \Delta, j \rangle) = 1\}| \geqslant n$ *iff* $|\{\langle \Delta, j \rangle \in W^\Lambda : \langle \Delta, j \rangle \in SF(\Gamma) \ \&\ \psi \in \Delta\}| \geqslant n$ *iff* $\Diamond_n\psi \in \Gamma$，得证。 □

完全性

至此，我们有了 $Gr(K)$ 的完全性定理。

Theorem

$Gr(K)$ 相对于所有框架的类是完全的。

对应定理

我们在前面提到，分级模态系统是相应标准模态系统的分级扩充。而我们都知道，对应定理是标准模态逻辑的一个重要结果。那么，分级模态逻辑的对应定理是否也成立呢？也就是说，在某些分级模态公式和一阶公式之间是否也有某种对应关系呢？回答是肯定的。事实上，我们可以得到一个有趣的结果：分级模态逻辑的框架与相应标准模态逻辑的框架是相同的，前者对后者的扩充仅仅是落在语法的层面上。

对应定理

Theorem

（对应定理）

(1) D^0 对应于持续性，

(2) T^0 对应于自返性，

(3) B^0 对应于对称性，

(4) 4^0 对应于传递性，

(5) 5^0 对应于欧性。

对应定理

$\boxed{\text{证明}}$以 (4) 为例。不妨定义 $V'(\varphi) := \{w \mid V(\varphi, w) = 1\}$。

任给 $\langle W, R\rangle$。即证：

$\langle W, R\rangle \vDash 4^0 \Leftrightarrow \langle W, R\rangle \vDash \forall xyz\,(xRy \wedge yRz \to xRz)$。假设 $\langle W, R\rangle \nvDash 4^0$。则存在框架 $\langle W, R\rangle$ 上的赋值 V，$w \in W$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，使得

① $V(\Diamond\Diamond_n p, w) = 1$ 且

② $V(\Diamond_n p, w) = 0$

据 ①，存在 $v \in W$，使得 wRv 且

③ $V(\Diamond_n p, v) = 1$

据 ③，有：$|\{u \in W : vRu \;\&\; V(p, u) = 1\}| \geqslant n$，即 $|R(v) \cap V'(p)| \geqslant n$。若 $R(v) \subseteq R(w)$，则 $|R(w) \cap V'(p)| \geqslant |R(v) \cap V'(p)| \geqslant n$，即

对应定理

$\mid \{u \in W : wRu \ \& \ V(p,u) = 1\} \mid \geqslant n$

即 $V(\Diamond_n p, w) = 1$，矛盾于 ②。

$\therefore \ \langle W, R \rangle \nvDash \forall xyz\,(xRy \wedge yRz \to xRz)$。

假设 $\langle W, R \rangle \nvDash \forall xyz\,(xRy \wedge yRz \to xRz)$。则存在 $w, v, u \in W$，使得 wRv, vRu 但 $\sim wRu$。令赋值 V（相应的 V'）满足：$\mid R(v) \cap V'(p) \mid \geqslant n$ 且 $\mid R(w) \cap V'(p) \mid < n$。因为 $R(v) \nsubseteq R(w)$，所以 V'（相应的 V）的定义是合理的。据 $\mid R(v) \cap V'(p) \mid \geqslant n$，有 ③，再据 wRv，有 ①。另一方面，据 $\mid R(w) \cap V'(p) \mid < n$，有 ②，因此 $\langle W, R \rangle \nvDash 4^0$ 为所求。

一致性定理

注意到我们前面谈到了极大 Λ 一致集。但是，如果 Λ 不是一致的系统，则可以证得不存在极大 Λ 一致集。而这不是我们所想要的，因为我们在 Λ 的完全性定理的证明中很明显用到了极大 Λ 一致集这一重要概念。因此，我们必须证明 Λ 是一致的系统。当我们确实证明了系统 Λ 的一致性时，我们才可以谈论“Λ 一致集”和“极大 Λ 一致集”，从而为我们前面对于极大一致集的运用提供合法性依据。

一致性定理

Definition

Λ 是一致的 $\Leftrightarrow$ $\nvdash_{\Lambda} \bot$。

证明前面提到的任意分级模态系统的一致性，可以运用语义的方法（即可靠性定理）直接证明。但我们这里要采用一种语形的证明方法：删分级模态词方法。这种方法有点类似于文献中的删模态法（参见李小五 [?]，pp.13-14）。即：定义一个删分级模态算子的映射，然后将 $Gr(\Lambda)$ 的一致性化归为经典命题逻辑 PC 的一致性。而 PC 的一致性是我们在经典命题逻辑中已知的结论。

一致性定理

Proof.

递归定义一个删分级模态算子的映射 $\varsigma : \mathcal{L} \to L_1$ 如下：

$\varsigma(p) = p$ （任给 $p \in PV$）

$\varsigma(\neg\varphi) = \neg\varsigma(\varphi)$

$\varsigma(\varphi \to \psi) = \varsigma(\varphi) \to \varsigma(\psi)$

$\varsigma(\Diamond_n \varphi) = \varsigma(\varphi)$ （任给 $n \in \mathbb{N}$）

逐一检查公理 $Ax.1$-$Ax.6$、D^0、T^0、B^0、4^0、5^0 以及规则 MP、RN，易证：

（♣）任给 $\varphi \in \mathcal{L}$，若 $\vdash_{Gr(\Lambda)} \varphi$，则 $\vdash_{PC} \varsigma(\varphi)$。

假设 $Gr(\Lambda)$ 不一致，即 $\vdash_{Gr(\Lambda)} \bot$，则据（♣），有 $\vdash_{PC} \bot$，与 PC 的一致性矛盾，因此 $Gr(\Lambda)$ 是一致的。从而 $Gr(\Lambda)$ 的一致性定理得证。 $\square$

真扩充定理

据各个分级模态系统的可靠性定理和完全性定理，我们容易得到分级模态系统之间的一条扩充链：

$$Gr(K) \subseteq Gr(KD) \subseteq Gr(KT) \left\{ \begin{array}{l} \subseteq Gr(S4) \\ \subseteq Gr(KTB) \end{array} \right\} \subseteq Gr(S5)$$

现在我们要证明的是：这条扩充链实际上是真扩充链。其证明的关键就在于反模型定理。为了证明这一重要定理，首先我们必须给出反模型的定义。

Definition

（反模型） 令 Λ 是分级模态系统，$\varphi \in \mathcal{L}$。
称 $\mathfrak{M}$ 是 φ 的 Λ 反模型，如果 $\mathfrak{M}$ 是 Λ 的模型，并且 $\mathfrak{M}$ 是 φ 的反模型，即 $\mathfrak{M} \vDash Th(\Lambda)$ 且 $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$。

真扩充定理

注意我们在前一节已经证明了本文所提及的各个分级模态系统的一致性定理，因此 Λ 必有模型。

Lemma

（反模型引理）若存在 φ 的 Λ 反模型，则 $\varphi \notin Th(\Lambda)$。

Proof.

假设存在 φ 的 Λ 反模型，记该模型为 $\mathfrak{M}$。据反模型定义，有 $\mathfrak{M} \vDash Th(\Lambda)$ 且 $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$。若 $\varphi \in Th(\Lambda)$，则 $\mathfrak{M} \vDash \varphi$，矛盾于 $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$，因此 $\varphi \notin Th(\Lambda)$。 □

真扩充定理

下面我们来表述并证明反模型定理。

Theorem

(1) 存在公理 D^0 的 $Gr(K)$ 反模型。

(2) 存在公理 T^0 的 $Gr(KD)$ 反模型。

(3) 存在公理 B^0 的 $Gr(KT)$ 反模型。

(4) 存在公理 4^0 的 $Gr(KT)$ 反模型。

(5) 存在公理 5^0 的 $Gr(S4)$ 反模型。

(6) 存在公理 5^0 的 $Gr(KTB)$ 反模型。

真扩充定理

Proof.

以 (4) 为例。(4) 建立一个自返但非传递的模型 $\mathfrak{M}_1 = \langle W, R, V \rangle$ 如下：$w^{\circlearrowleft}_{\neg p} \longrightarrow v^{\circlearrowleft}_{\neg p} \longrightarrow u^{\circlearrowleft}_{i_p} \quad (i = 0, \cdots, n-1)$。则任给 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，都有 wRv 且 vRu_i 但 $\sim wRu_i$，$\therefore$ w 不是传递点。因此 R 不满足传递性，但很容易看出 R 是自返的。$\therefore$ $\mathfrak{M}_1$ 是一个 $Gr(KT)$ 模型。另一方面，我们易得 $\sigma(p) = \{u_0, \cdots, u_{n-1}\}$ 以及 $vRu_0, \cdots, vRu_{n-1}$，因此我们有 $|\{u : vRu \ \& \ V(p,u) = 1\}| \geqslant n$，即 $V(\Diamond_n p, v) = 1$。据 wRv，有 ① $V(\Diamond\Diamond_n p, w) = 1$。又由于 $R(w) = \{w, v\}$，$V(p, w) = 0$ 且 $V(p, v) = 0$，$\therefore |\{u : wRu \ \& \ V(p,u) = 1\}| = 0 \leqslant n-1 < n$，即 ② $V(\Diamond_n p, w) = 0$。据 ①和 ②，有：$V(\Diamond\Diamond_n p \to \Diamond_n p, w) = 0$，$\therefore$ $\mathfrak{M}_1 \nvDash 4^0$。据反模型定义，$\mathfrak{M}_1$ 是 4^0 的 $Gr(KT)$ 反模型。 □

真扩充定理

从反模型定理和反模型引理易知，在本节开头提到的扩充链实际上是一种真扩充链，即如下系统对之间存在一种真包含关系。

Theorem

（真扩充定理）

$$Gr(K) \subset Gr(KD) \subset Gr(KT) \left\{ \begin{array}{l} \subset Gr(S4) \\ \subset Gr(KTB) \end{array} \right\} \subset Gr(S5)$$

标准翻译

下面我们来讨论分级模态逻辑的模型论性质，包括紧致性、Löwenheim-Skolem 性质、不变性结果、互模拟等。前面我们在讨论分级模态逻辑的语义时，我们给分级可能算子 $\Diamond_n$ 的语义定义（见定义 2.1.5④）是：

$$V(\Diamond_n\varphi, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\{w' \in W : w' \in R(w) \,\&\, V(\varphi, w') = 1\}| \geqslant n$$

为了表述的方便，我们定义满足关系 $\Vdash$ 如下：

$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad iff \quad V(\varphi, w) = 1$ （其中 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$， $w \in W$， $\varphi \in \mathcal{L}$）

因此，对于分级可能算子 $\Diamond_n$ 的语义，我们可以采用如下等价的定义（我们称之为“$\Diamond_n$ 的语义定义 2”）：

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n\varphi \quad iff \quad \exists v_1 \cdots v_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} (v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} (wRv_i \wedge \mathfrak{M}, v_i \Vdash \varphi))$$

标准翻译

Definition

令 $\mathcal{L}_1$ 为可数的一阶语言，$\mathcal{ML}$ 是标准模态语言。我们可以定义一个映射 $ST_x : \mathcal{ML} \to \mathcal{L}_1$ 如下：[a]

任给 $p \in PV$，$ST_x(p) = Px$

$ST_x(\neg\varphi) = \neg ST_x(\varphi)$

$ST_x(\varphi \to \psi) = ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi)$

$ST_x(\Diamond\varphi) = \exists y(xRy \wedge ST_y(\varphi))$

[a] 有些文献称 ST_x 为“标准翻译”，参见 Blackburn *et al.* [1] 定义 2.45。

标准翻译

据标准翻译的定义和一阶逻辑的知识，我们可以证明，标准模态语言与一阶语言在模型层次上有下列局部对应结果：

Theorem

任给标准模态公式 φ，模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ 以及 W 上的点 w，都有：

$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(\varphi)[w]$

标准翻译

据上述定理，我们可以将一阶逻辑的一些重要的模型论性质，如紧致性和 Löwenheim-Skolem 性质转移到标准模态逻辑，在此我们只表述标准模态逻辑的这些性质，其证明类似于后面关于分级模态逻辑相应性质的证明。

Theorem

（标准模态逻辑的紧致性定理和 *Löwenheim-Skolem* 定理）

(1) （紧致性定理）令 Σ 是任意标准模态公式集。如果 Σ 的每个有穷子集都是可满足的，那么 Σ 本身也是可满足的；

(2) （*Löwenheim-Skolem* 定理）令 Σ 是任意标准模态公式集。如果 Σ 有模型，那么 Σ 有可数模型，即 Σ 有一论域为可数集合的模型。

标准翻译

实际上，我们同样可以将一阶逻辑的紧致性和 Löwenheim-Skolem 性质转移到分级模态逻辑。首先，从 $\Diamond_n$ 的语义定义 2，我们很容易将标准模态语言的标准翻译推广到分级模态语言，即

Definition

（分级模态语言的标准翻译）令 $\mathcal{L}_1$ 为可数的一阶语言。定义分级模态语言 $\mathcal{L}$ 的标准翻译 $GST_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_1$ 如下：

任给 $p \in PV$，$GST_x(p) = Px$

$GST_x(\neg\varphi) = \neg GST_x(\varphi)$

$GST_x(\varphi \to \psi) = GST_x(\varphi) \to GST_x(\psi)$

$GST_x(\Diamond_n\varphi) = \exists y_1 \cdots y_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(y_i \neq y_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n}(xRy_i \wedge GST_{y_i}(\varphi)))$

标准翻译

同样很容易证明，分级模态语言和带等词的一阶语言在模型层次上有下列局部对应结果：

Theorem

任给分级模态公式 φ，模型 $\mathfrak{M}=\langle W,R,V\rangle$ 以及 W 上的点 w，都有：

$\mathfrak{M},w\Vdash\varphi \quad iff \quad \mathfrak{M}\vDash GST_x(\varphi)[w]$

$\boxed{\text{证明}}$ 施归纳于 φ 的结构。

(i) $\varphi=p\in PV$，此时 $GST_x(\varphi)=Px$。显然有 $\mathfrak{M}\vDash GST_x(\varphi)[w]$ iff $\mathfrak{M}\vDash Px[w]$ iff $w\in\sigma(p)$（$\because$ P 在 $\mathfrak{M}$ 中的解释是 $\sigma(p)$）iff $\mathfrak{M},w\Vdash p$ iff $\mathfrak{M},w\Vdash\varphi$。

(ii) $\varphi=\neg\phi$ 和 (iii) $\varphi=\varphi_1\to\varphi_2$ 的情形，据可满足关系 $\Vdash$ 的定义和归纳假设易得。

标准翻译

(iv) $\varphi = \Diamond_n \phi$，此时

$GST_x(\varphi) = \exists y_1 \cdots y_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(y_i \neq y_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n}(xRy_i \wedge GST_{y_i}(\phi)))$。则有：

$\mathfrak{M} \vDash GST_x(\varphi)[w]$

iff $\exists y_1 \cdots y_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(y_i \neq y_j) \wedge \mathfrak{M} \vDash \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n}(xRy_i \wedge GST_{y_i}(\phi))[w])$

iff $\exists v_1 \cdots v_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} wRv_i \wedge \mathfrak{M} \vDash \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} GST_{y_i}(\phi)[v_i])$（$\because$ 关系符 R 在 $\mathfrak{M}$ 中的解释是二元关系 R）

iff $\exists v_1 \cdots v_n(\bigwedge_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} wRv_i \wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi)$（由归纳假设）

iff $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n \phi$

iff $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$，为所求。

标准翻译

据上述定理，我们可以将一阶逻辑的紧致性和 Löwenheim-Skolem 性质转移到分级模态逻辑，即

Theorem

（分级模态逻辑的紧致性定理和 *Löwenheim-Skolem* 定理）

(1) （紧致性定理）令 Σ 是任意分级模态公式集。如果 Σ 的每个有穷子集都是可满足的，那么 Σ 本身也是可满足的；

(2) （*Löwenheim-Skolem* 定理）令 Σ 是任意分级模态公式集。如果 Σ 有模型，那么 Σ 有可数模型，即 Σ 有一论域为可数集合的模型。

证明 (1) 的证明如下：假设分级模态公式集 Σ 的每个有穷子集都是可满足的，考虑集合 $S = \{GST_x(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma\}$。据假设 Σ 的每个有穷子集都是可满足的以及上述定理，可得：S 的每个有

标准翻译

穷子集也都是可满足的。注意到 S 是一个一阶公式集，因此据一阶逻辑的紧致性，S 本身可满足。再根据上面的定理，易得 Σ 本身可满足。

(2) 的证明如下：假设分级模态公式集 Σ 有模型，即存在模型 $\mathfrak{M}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中的点 w，使得 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$。同样考虑集合 $S = \{GST_x(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma\}$。注意到 S 是一个一阶公式集。据上面的定理，易知：$\mathfrak{M} \vDash S[w]$，即 S 有模型。据一阶逻辑的 Löwenheim-Skolem 性质，S 有可数模型，即存在可数模型 $\mathfrak{N}$ 以及 $\mathfrak{N}$ 中的点 v，使得 $\mathfrak{N} \vDash S[v]$。再根据上面的定理，有 $\mathfrak{N}, v \Vdash \Sigma$，即 Σ 有可数模型。

不变性结果

下面我们研究分级模态逻辑在模型层次的不变性结果。我们首先介绍标准模态逻辑在模型层次的不变性结果，然后将这些结果转移到分级模态逻辑。首先定义标准模态逻辑中模型构造的三种方法：不交并、生成子模型和有界态射，并表述模型层次上各自的不变性结果，其证明参见 Blackburn *et al.* [1] 的第二章（命题 2.3, 2.6, 2.14）。

不变性结果

Definition

（不交并）称两个模型是不交的，如果它们的论域（即可能世界集）没有公共元素。令 $\mathfrak{M}_i = \langle W_i, R_i, V_i \rangle (i \in I)$ 是两两不交的模型。则这些模型的不交并为 $\biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i = \langle W, R, V \rangle$，其中 $W = \cup_{i \in I} W_i$，$R = \cup_{i \in I} R_i$，且 V 满足：任给 $p \in PV$，都有 $V(p) = \cup_{i \in I} V_i(p)$。

根据不交并的定义，我们有如下不变性结果：

Theorem

标准模态公式在不交并下不变，即：令 $\mathfrak{M}_i (i \in I)$ 和 $\biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ 如上定义。则任给标准模态公式 φ 以及 $w \in W_i$，有

$\mathfrak{M}_i, w \Vdash \varphi$ *iff* $\biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w \Vdash \varphi$。

不变性结果

Definition

（生成子模型）令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的生成子模型（记为 $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$），如果 $W' \subseteq W$，$R' = R \cap (W' \times W')$，任给 $p \in PV$，$V'(p) = V(p) \cap W'$ 以及 W' 在有穷的 R 步内封闭（即若 $w \in W'$ 且 wRv，则 $v \in W'$）。

根据生成子模型的定义，我们有如下不变性结果：

Theorem

标准模态公式在生成子模型下不变。即：令 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 如上定义。则任给标准模态公式 φ 以及 $w \in W'$，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *iff* $\mathfrak{M}', w \Vdash \varphi$。

不变性结果

Definition

（有界态射）令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。称映射 $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ 是有界态射，如果 (i) 任给 $p \in PV$，$\mathfrak{M}, w \Vdash p$ *iff* $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash p$；$(ii)$ 若 wRv，则 $f(w)R'f(v)$；(iii) 若 $f(w)R'v'$，则存在 $v \in W$，使得 wRv 且 $f(v) = v'$。

同样，根据有界态射的定义，我们有如下不变性结果：

Theorem

标准模态公式在有界态射下不变。即：令 f 是模型 $\mathfrak{M}$ 到模型 $\mathfrak{M}'$ 的有界态射，则任给标准模态公式 φ 以及 $w \in W$，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *iff* $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \varphi$。

不变性结果

下面我们开始将上述标准模态逻辑中模型构造的方法和不变性结果转移到分级模态逻辑。首先考察不交并和生成子模型。我们可以很容易得知，不交并和生成子模型都不改变原模型中可能世界之间的可通达关系，同时，由于生成子模型的论域在原来的关系下是有穷步封闭的，而不交并的任意构成部分都是不交并的生成子模型，我们考虑的分级模态逻辑又是在有穷基数（即可通达世界集的基数是有穷的）的范围内，因此标准模态逻辑的这些模型构造自动适合分级模态逻辑。

不变性结果

我们以生成子模型为例，来证明分级模态公式在生成子模型下不变，即下列不变性结果：

Theorem

分级模态公式在生成子模型下不变。即：令 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V' \rangle \rightarrowtail \mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$。则任给分级模态公式 φ 以及 $w \in W'$，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *iff* $\mathfrak{M}', w \Vdash \varphi$。

$\boxed{\text{证明}}$施归纳于 φ 的结构。只需考虑分级可能算子的情形，即 $\varphi = \Diamond_n \phi$。先假设 $\mathfrak{M}', w \Vdash \Diamond_n \phi$，即

$\exists v_1 \cdots v_n \in W'(\bigwedge_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(wR'v_i \wedge \mathfrak{M}', v_i \Vdash \phi))$

（见 $\Diamond_n$ 的语义定义 2），据生成子模型的定义和归纳假设，易得：

$\exists v_1 \cdots v_n \in W(\bigwedge_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(wRv_i \wedge \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi))$，

即 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n \phi$。

不变性结果

反之，假设 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n \phi$，即 $\exists v_1 \cdots v_n \in W(\bigwedge_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(wRv_i \wedge \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi))$，据 $w \in W'$和 W' 在有穷的 R 步内封闭，有 $v_1, \cdots, v_n \in W'$，因此任给 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $wR'v_i$。据 $v_1, \cdots, v_n \in W'$ 和归纳假设，任给 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $\mathfrak{M}', v_i \Vdash \phi$，整理所得的结果，即 $\exists v_1 \cdots v_n \in W'(\bigwedge_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}(v_i \neq v_j) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(wR'v_i \wedge \mathfrak{M}', v_i \Vdash \phi))$，因此 $\mathfrak{M}', w \Vdash \Diamond_n \phi$，为所求。

不变性结果

接下来考察有界态射。下述例子说明了标准模态逻辑的有界态射概念并不保持分级模态公式的语义。

Example

考虑模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$，其中

(1) $W = \{w, v_1, v_2\}$，$R = \{\langle w, v_1\rangle, \langle w, v_2\rangle\}$，$V(p) = \{v_1, v_2\}$，

(2) $W' = \{w', v'\}$，$R' = \{\langle w', v'\rangle\}$，$V'(p) = \{v'\}$.

现在，定义映射 $f : W \to W'$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} w', & x = w, \\ v', & x = v_i, \text{其中 } i \in \{1,2\}。\end{cases}$$

易证所定义的 f 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}'$ 的有界态射。但另一方面，很明显 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_2 p$ 但 $\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond_2 p$。

不变性结果

因此，我们需要定义适合于分级模态逻辑的有界态射概念，我们称之为“分级有界态射”，简称为“g-有界态射”。通过分析上述例子，我们可以发现，分级模态公式 $\Diamond_2 p$ 的语义在有界态射 f 下之所以不被保持，关键在于 w 和 w' 这两个点可通达世界的数目不相等。基于这一考虑，我们定义“g-有界态射”如下。

首先，为了定义和证明的方便，我们需要给出一些技术性的记法：若 w 是可能世界，X 是可能世界集，R 是可通达关系，我们用 $wR_{all}X$ 表示任给 $x \in X$，都有 wRx；若 φ 是公式，X 是可能世界集，X 所在的模型是 $\mathfrak{M}$，我们用 $X \Vdash \varphi$ 表示任给 $x \in X$，都有 $\mathfrak{M}, x \Vdash \varphi$（简记为：$x \Vdash \varphi$）。下面我们来定义“$g$-有界态射”。

不变性结果

Definition

（g-有界态射）（参见马明辉[23]）令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ 是两个模型。称映射 $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ 是 g-有界态射，如果下列条件成立：(i) 如果 $f(\{w\}) = \{w'\}$，则任给 $p \in PV$，$\mathfrak{M}, w \Vdash p$ *iff* $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash p$；

(ii) 如果 $f(X) = Y$，则 $|X| = |Y|$；

(iii) 如果 $wR_{all}X$，则 $w'R'_{all}f(X)$，其中 $w' \in f(\{w\})$；

(iv) 如果 $w'R'_{all}Y$ 且 $f(\{w\}) = \{w'\}$，则存在 $X \subseteq_{fin} W$，使得 $f(X) = Y$ 且 $wR_{all}X$；

(v) 如果 $f(X) = Y$，则任给 $x \in X$，都存在 $y \in Y$，使得 $f(\{x\}) = \{y\}$；并且任给 $y \in Y$，都存在 $x \in X$，使得 $f(\{x\}) = \{y\}$。

不变性结果

由 g-有界态射的定义，我们有如下不变性结果：

Theorem

分级模态公式在 g-有界态射下不变。即：令 f 是模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 到模型 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 的 g-有界态射使得 $f(\{w\}) = \{w'\}$，则任给分级模态公式 φ，都有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *iff* $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$。

$\boxed{\text{证明}}$假设 f 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}'$ 的 g-有界态射使得 $f(\{w\}) = \{w'\}$。施归纳于 φ 的结构。

$\varphi = p \in PV$。据假设和定义 5.2.9(i) 显然。

$\varphi = \neg\phi$ 和 $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$ 的情形据可满足关系 $\Vdash$ 的定义和归纳假设易得。

不变性结果

$\varphi = \Diamond_n \phi$。先假设 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n \phi$，则存在 $X \subseteq W$，使得 $|X| = n$，$wR_{all}X$ 且 $X \Vdash \phi$。据假设，$wR_{all}X$ 和定义 5.2.9(iii)，有 $w'R'_{all}f(X)$。进而由 $|X| = n$，$f(X) = f(X)$ 和定义 5.2.9(ii)，可得 $|f(X)| = |X| = n$。又据 $f(X) = f(X)$ 和定义 5.2.9(v)，有：任给 $y \in f(X)$，都存在 $x \in X$，使得 $f(\{x\}) = \{y\}$。进而根据 $x \in X$ 和 $X \Vdash \phi$，有 $x \Vdash \phi$。据后者，$f(\{x\}) = \{y\}$ 以及归纳假设，有 $y \Vdash \phi$。再据 y 的任意性，有 $f(X) \Vdash \phi$。这样我们证得了：存在 $f(X) \subseteq W'$，使得 $|f(X)| = n$，$w'R'_{all}f(X)$ 且 $f(X) \Vdash \phi$，因此 $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond_n \phi$。

不变性结果

反之，假设 $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond_n \phi$，则存在 $Y \subseteq W'$，使得 $|Y| = n$，$w' R'_{all} Y$ 且 $Y \Vdash \phi$。据假设，$w' R'_{all} Y$ 和定义 5.2.9(iv)，存在 $X \subseteq_{fin} W$，使得 $f(X) = Y$ 且 $wR_{all}X$。进而由 $f(X) = Y$，$|Y| = n$ 和定义 5.2.9(ii)，可得 $|X| = |Y| = n$。又据 $f(X) = Y$ 和定义 5.2.9(v)，有：任给 $x \in X$，都存在 $y \in Y$，使得 $f(\{x\}) = \{y\}$。进而根据 $y \in Y$ 和 $Y \Vdash \phi$，有 $y \Vdash \phi$。据后者，$f(\{x\}) = \{y\}$ 以及归纳假设，有 $x \Vdash \phi$。再据 x 的任意性，有 $X \Vdash \phi$。这样我们证得了：存在 $X \subseteq W$，使得 $|X| = n$，$wR_{all}X$ 且 $X \Vdash \phi$，即 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_n \phi$。

互模拟

下面我们讨论分级模态逻辑的互模拟（简称为“g-互模”），运用 g-互模这一工具可得到分级模态逻辑中的 Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果。我们首先介绍标准模态逻辑的互模拟，得出标准模态逻辑中的 Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果，然后将这些结果转移到分级模态逻辑。

互模拟

Definition

（互模拟）令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。称 $Z \subseteq W \times W'$ 为 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}'$ 之间的互模拟（记为：$Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$），当且仅当下列条件成立：$(i)$ $Z \neq \varnothing$；
(ii) 若 wZw'，则任给 $p \in PV$，$\mathfrak{M}, w \Vdash p$ *iff* $\mathfrak{M}', w' \Vdash p$；
(iii) 若 wZw' 且 wRv，则存在 $v' \in W'$，使得 vZv' 且 $w'R'v'$；
(iv) 若 wZw' 且 $w'R'v'$，则存在 $v \in W$，使得 vZv' 且 wRv。
如果有 $Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$ 且 wZw'，则我们表示为 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$，意思是 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{M}', w')$ 这两个点模型之间有互模拟关系 Z。
如果存在互模拟 Z 使得 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$，则我们表示为 $\mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$，有时简记为 $w \rightleftharpoons w'$，我们也称 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{M}', w')$ 互为互模拟模型。

互模拟

根据互模拟的定义，我们有如下不变性结果（证明参见 Blackburn *et al.*[1]，定理 2.20）：

Theorem

标准模态公式在互模拟下不变。即：令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。则任给 $w \in W$，$w' \in W'$，若 $w \rightleftharpoons w'$，则 $w \equiv w'$（即任给标准模态公式 φ，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *iff* $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$）。

互模拟

以上是标准模态逻辑的互模拟，下面我们将这些结果转移到分级模态逻辑。仍然沿用前面例子中的模型，我们来说明标准模态逻辑的互模拟不保持分级模态公式的语义。（这也说明了 $\Diamond_n$ $(n > 1)$ 在标准模态语言中是不可定义的。）

Example

考虑模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$，其中

(1) $W = \{w, v_1, v_2\}$，$R = \{\langle w, v_1\rangle, \langle w, v_2\rangle\}$，$V(p) = \{v_1, v_2\}$，

(2) $W' = \{w', v'\}$，$R' = \{\langle w', v'\rangle\}$，$V'(p) = \{v'\}$.

现在定义 $Z = \{\langle w, w'\rangle, \langle v_1, v'\rangle, \langle v_2, v'\rangle\}$，易证 Z 是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 之间的互模拟关系，但另一方面，很明显 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_2 p$ 但 $\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond_2 p$。

互模拟

实际上，我们对于上述例子可以做出如下的理解：分级模态公式的语义在标准模态逻辑的有界态射概念下不被保持，而有界态射是一种特殊的互模拟，因此，自然也就有分级模态公式的语义在（一般性的）互模拟下不被保持。

因此，我们需要定义适合于分级模态逻辑的互模拟概念，我们称之为"分级互模拟"，简称为"g-互模"。如同前面例子后面的说明，分级模态公式 $\Diamond_2 p$ 的语义在互模拟 Z 下之所以不被保持，关键在于 w 和 w' 这两个点可通达世界的数目不相等。基于这一考虑，我们定义"g-互模"如下。

互模拟

Definition

（g-互模）令 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 和 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 是两个模型。称关系序列 $Z = (Z_1, Z_2, \cdots)$ 是 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}'$ 之间的 g-互模（记为：$Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}'$），如果

(i) $Z_1 \neq \varnothing$ 且任给 $i \geqslant 1$，都有 $Z_i \subseteq \wp^{<\omega}(W) \times \wp^{<\omega}(W')$；$(ii)$ 若 $\{w\}Z_1\{w'\}$，则任给 $p \in PV$，$\mathfrak{M}, w \Vdash p$ iff $\mathfrak{M}', w' \Vdash p$；$(iii)$ 若 XZ_iY，则 $|X| = |Y| = i$；(iv) 若 $\{w\}Z_1\{w'\}$，$wR_{all}X$ 且 $|X| = i \geqslant 1$，则存在 $Y \subseteq_{fin} W'$，使得 $w'R'_{all}Y$ 且 XZ_iY；(v) 若 $\{w\}Z_1\{w'\}$，$w'R'_{all}Y$ 且 $|Y| = i \geqslant 1$，则存在 $X \subseteq_{fin} W$，使得 $wR_{all}X$ 且 XZ_iY；(vi) 若 XZ_iY，则任给 $x \in X$，都存在 $y \in Y$，使得 $\{x\}Z_1\{y\}$；并且任给 $y \in Y$，都存在 $x \in X$，使得 $\{x\}Z_1\{y\}$。

互模拟

如果有 $Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}'$ 且 $\{w\}Z_1\{w'\}$，则我们表示为 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}', w'$ ，意思是 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{M}', w')$ 这两个点模型之间有 g-互模拟关系 Z。如果存在互模拟 Z 使得 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}', w'$，则我们表示为 $\mathfrak{M}, w \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}', w'$，有时简记为 $w \rightleftharpoons_g w'$，我们也称 $(\mathfrak{M}, w)$ 和 $(\mathfrak{M}', w')$ 互为 g-互模模型。

根据 g-互模的定义，我们很容易得到分级模态逻辑在模型层次上的如下性质：g-互模蕴涵分级模态等价。换句话说，g-互模保持分级模态公式的语义。

Theorem

分级模态公式在 g-互模下不变。即：若 $w \rightleftharpoons_g w'$，则 $w \equiv_g w'$ (即任给分级模态公式 φ，有 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *iff* $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$)。

互模拟

$\boxed{\text{证明}}$设 $w \rightleftharpoons_g w'$，即：有互模拟 Z 使得 $Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons_g \mathfrak{M}'$ 且 $\{w\}Z_1\{w'\}$。施归纳于 φ 的结构。只需考虑分级可能算子的情形，即 $\varphi = \Diamond_i \phi$。$i = 0$ 时结论显然成立。下设 $i \geqslant 1$。

假设 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond_i \phi$。则存在 $X \subseteq_{fin} W$，使得 $|X| = i \geqslant 1$，$wR_{all}X$ 且 $X \Vdash \phi$。由 $\{w\}Z_1\{w'\}$，$wR_{all}X$，$|X| = i \geqslant 1$ 和定义 5.3.6(iv)，有：存在 $Y \subseteq_{fin} W'$，使得 $w'R'_{all}Y$ 且 XZ_iY。任给 $y \in Y$，由 XZ_iY 和定义 5.3.6(vi)，可得：存在 $x \in X$，使得 $\{x\}Z_1\{y\}$。据 $X \Vdash \phi$ 和 $x \in X$，有 $x \Vdash \phi$。进而由 $\{x\}Z_1\{y\}$，$x \Vdash \phi$ 和归纳假设，得 $y \Vdash \phi$。再据 y 的任意性，有 $Y \Vdash \phi$。又由 XZ_iY，$|X| = i$ 和定义 5.3.6(iii)，有 $|Y| = |X| = i$。这样我们证得了：存在 $Y \subseteq_{fin} W'$，使得 $|Y| = i$，$w'R'_{all}Y$ 且 $Y \Vdash \phi$，因此 $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond_i \phi$。逆方向同理可证。

互模拟

很容易证明不交并、生成子模型、g-有界态射都是 g-互模。我们以 g-有界态射为例：

Corollary

令 f 是模型 $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ 到模型 $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ 的 g-有界态射使得 $f(\{w\}) = \{w'\}$，则有 $w \rightleftharpoons_g w'$。

$\boxed{\text{证明}}$ 只需令 $Z_i = \{\langle X, f(X)\rangle \mid X \subseteq_{fin} W \text{ 且 } |X| = i\}$。可以证得 g-互模定义中的 6 个条件都成立。

未来可以做的工作

- 超滤扩充：在讨论分级模态逻辑的模型构造时，我们只谈到三种方法：不交并、生成子模型、g-有界态射，但没有提及另一种模型构造——超滤扩充。因此，我们可以研究适合于分级模态逻辑的超滤扩充，并尝试证明分级模态逻辑在超滤扩充下的不变性结果。
- Goldblatt-Thomason 定理：标准模态逻辑在模型上的不变性结果、Van Benthem 刻画定理以及可定义性结果已经推广到了分级模态逻辑。但是，标准模态逻辑在框架层次上的一些性质，如 Goldblatt-Thomason 定理还没有被推广到分级模态逻辑，即一阶可定义框架类是分级模态可定义的充分必要条件。

未来可以做的工作

- 应用：分级模态逻辑在其他领域也有许多研究和应用。比如，在认知逻辑中，可以运用分级模态理论来研究不确定的知识；在计算机科学领域，可以研究分级模态逻辑的计算复杂性和自动推理等问题。

未来可以做的工作

- 分级时态逻辑：Arthur Prior 最早从模态逻辑出发提出了时态逻辑，并建立了第一个完备的标准时态逻辑系统。Goble和Kit Fine 从标准模态逻辑出发建立了完备的分级模态逻辑系统。那么，为什么不可以将分级模态和时态逻辑的思想结合起来，建立分级时态逻辑系统呢？我们知道，标准时态逻辑在计算机等领域已有很大应用，而分级时态逻辑作为时态逻辑的分级扩充，我相信它在计算机等领域会有更大的应用。

- P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. Modal Logic[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- C. Cerrato. General Canonical Models for Graded Normal Logics (Graded Modalities IV)[J]. Studia Logica, 1990, 49: 241-252.
- C. Cerrato. Decidability by Filtrations for Graded Normal Logics (Graded Modalities V)[J]. Studia Logica, 1994, 53: 61-74.
- F. De Caro. Graded Modalities II[J]. Studia Logica, 1988, 47: 1-10.
- F. De Caro. Normal Predicative Logics with Graded Modalities[J]. Studia Logica, 1988, 47: 11-22.
- M. Fattorosi-Barnaba and F. De Caro. Graded Modalities I[J]. Studia Logica, 1985, 44: 197-221.

- M. Fattorosi-Barnaba and C. Cerrato. Graded Modalities III[J]. Studia Logica, 1988, 47: 99-110.
- M. Fattorosi-Barnaba and S. Grassotti. An Infinitary Graded Modal Logic (Graded Modalities VI)[J]. Mathematical Logic Quarterly, 1995, 41: 547-563.
- K. Fine. In So Many Possible Worlds[J]. Notre Dame Journal of Formal Logic, 1972, 13: 516-520.
- L. F. Goble. Grades of Modality[J]. Logique et Analyse, 1970, 13: 323-334.
- R. Goldblatt. Logics of Time and Computation[M]. CSLI Lecture Notes No. 7, Second Edition, Leland Stanford Junior University, 1992.

W. van der Hoek and J.-J. Ch. Meyer. Graded Modalities in Epistemic Logic[J]. Logical Foundations of Computer Science -Tver'92 (Lecture Notes in Computer Science), Springer, 1992: 503-514.

W. van der Hoek and M. de Rijke. Counting Objects[J]. Journal of Logic and Computation, 1995, 5: 325-345.

Y. Kazakov and I. Pratt-Hartmann. A Note on the Complexity of the Satisfiability Problem for Graded Modal Logics[EB/OL]. New York: Cornell University Library, 2009[2011-05-17]. http://arxiv.org/abs/0905.3108v1.

LI Xiaowu（李小五）. A Course in Modal Logic[M]. Guangzhou: Sun Yat-sen University Press, 2009

A. Montanari and A. Policriti. A Set-Theoretic Approach to Automated Deduction in Graded Modal Logics[EB/OL].

1997[2011-05-17].
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.51.205.

A. Nenkova. A Tableau Method for Graded Intersections of Modalities: A Case for Concept Languages[J]. Journal of Logic, Language and Information, 2002, 11: 67-77.

H. J. Ohlbach, R. A. Schmidt and U. Hustadt. Translating Graded Modalities into Predicate Logic[J]. Published in Wansing,H. (eds), Proof Theory of Modal Logic, Applied Logic Series 2, Kluwer, 1996: 253-291.

E. Pacuit. Weak Completeness of Graded Modal Logic[J]. unpublished manuscript, ILLC, University of Amsterdam, 2005.

M. de Rijke. A Note on Graded Modal Logic[J]. Studia Logica, 2000, 64: 271-283.

S. Tobies. A PSpace Algorithm for Graded Modal Logic[J]. Published in Ganzinger,H. (eds), Automated Deduction –CADE-16, 16th International Conference on Automated Deduction, LNAI 1632, Trento, Italy, July 7-10, Springer-Verlag, 1999: 52-66.

S. Tobies. PSpace Reasoning for Graded Modal Logics[J]. Journal of Logic and Computation, 2000: 10, 1-22.

马明辉. 走向模型论的模态逻辑[J]. 逻辑学研究，2009(1): 62-77.