

## 范杰：非偶然算子的逻辑研究（2016）

称一个公式是非偶然的（non-contingent），如果它必然为真，或者它必然为假。而称一个公式是偶然的（contingent），如果它不是非偶然的，也就是说，如果它既可能为真，也可能为假。非偶然算子和偶然算子在不同的语境中有不同的意思。比如，在信念语境中，“一个公式是非偶然的”意为主体对该公式是否为真有看法，即主体或者相信该公式为真，或者相信该公式为假，而“一个公式是偶然的”意为主体在信念上对该公式的真假不确定（agnostic），即主体既不相信该公式为真，也不相信该公式为假；在认知语境中，“一个公式是非偶然的”意为主体知道该公式是否为真，而“一个公式是偶然的”意为主体对该公式的真值无知（ignorant）。

尽管非偶然算子和偶然算子都可以通过必然算子或可能算子来定义，然而，正如文献中所讨论的，必然（和可能）算子不一定能通过非偶然（和偶然）算子来定义。本文提出一个“几乎可定义模式”**AD**，它告诉我们，必然算子在什么情况下可以用非偶然算子来定义。这个模式可以避免文献中关于“如何用非偶然算子定义必然算子”的讨论中所提出的几个方案的不足。受**AD**的启发，本文提出适合于非偶然逻辑（即以非偶然算子为唯一初始模态词的逻辑）的互模拟概念。基于该互模拟概念，我们将得到非偶然逻辑在标准模态逻辑中和一阶逻辑中的两个刻画结果。

非偶然逻辑不是正规模态逻辑，因为它没有“模态词在实质蕴涵下封闭”这一性质，即  $\Delta(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Delta\phi \rightarrow \Delta\psi)$  不是有效式。正如本文将证明的，在非自反的模型类上，非偶然逻辑的表达力都要严格地弱于标准模态逻辑；而且，许多通常的框架性质都不是非偶然逻辑可定义的，因此不存在这些框架性质的刻画公理。非偶然逻辑的这些特征都加大了该逻辑在各个框架类上公理化问题的难度，尤其对于该逻辑在对称框架类上的公理化来说。尽管自从 20 世纪 60 年代以来，文献中已经有了比较多的关于非偶然逻辑的公理化结果，但对称框架上的公理化仍是未知的。另外，即使在已有的公理化结果中，也缺乏一种一致的方式来证明这些公理系统的完全性。

非偶然逻辑也出现在认知逻辑领域，不过是以“无知逻辑”（logics of ignorance）这一术语出现（van der Hoek & Lomuscio:2003,van der Hoek & Lomuscio:2004,Steinsvold:2008）。在那儿，“ $\phi$  是非偶然的”意为“主体知道是否  $\phi$ ”，而“ $\phi$  是偶然的”则意为“主体对  $\phi$  无知”。由于没有意识到非偶然逻辑的工作，（van der Hoek & Lomuscio, 2003）建立了无知逻辑的一个极小系统 **Ig**，并在（van der Hoek & Lomuscio, 2004）中给出了一个他们声称是相对于传递框架的类既可靠又完全的公理系统 **Ig + G4**。他们的系统 **Ig** 实质上也是非偶然逻辑的一个极小系统。作者们在文章中还提出了一些开问题，其中包括：第一，如何在其他框架类上刻画无知逻辑？第二，自反性不是无知逻辑可定义的。那么，其他框架性质是不是无知逻辑可定义的呢？第三，无知逻辑的互模拟概念是什么？一个在拓扑语义下可靠且完全的无知逻辑系统 **LB** 由（Steinsvold, 2008）给出，其中的拓扑模型相当于 **S4** 的克里

普克模型。

除了前面所说的非偶然逻辑在模型论方面的工作，本文也将建立非偶然逻辑在许多框架类上的公理化系统。受模式 **AD** 的启发，本文找到一种新的相当一致的方法，该方法可以一揽子处理这些系统的完全性。在这些完全性证明中，对称框架类上的情形最为困难，它需要用到‘对称闭包+终点副本’的方法。自反框架类和对称框架类上的特征公理也是运用模式 **AD** 得来的，这两条公理对于非偶然逻辑在这两个框架类上的完全公理化分别起着至关重要的作用。由于非偶然逻辑在对称框架上的完全性证明不能简单地推广到多模态情形，因此本文也将处理多模态情形下这一逻辑在对称框架上的完全公理化问题。本文还将考虑动态的非偶然逻辑，包括分别加入公开宣告算子和活动模型算子，通过找到相应的归约公理，从而得到两个完全的公理系统。在此之后，本文也将与非偶然逻辑和无知逻辑的已有工作进行对比和比较，证明 (van der Hoek & Lomuscio, 2004) 的系统 **Ig + G4** 相对于传递框架的类是不可靠的。最后，(Steinsvold, 2008) 的拓扑语义被提升到邻域语义，非偶然逻辑在邻域语义下的一些特性被考虑。本文的工作也建立起非偶然逻辑和无知逻辑这两个研究领域的桥梁。另外，本文也回答了 (van der Hoek & Lomuscio, 2004) 的三个开问题。