报告内容简介

一个带有相对化公共知识和群体隐含知识的公开宣告逻辑系统 $PAL(RC,D,E)$

(北京大学哲学系 03 级博士生　郭美云　10323817)

1　引言

公开宣告逻辑（ Public Announcement Logic，简称 PAL ）是 Jan.A.Plaza 建立的第一个动态认知逻辑系统 Jan.A.Plaza[1989]，他在 1989 年的 ISMIS(International Symposium on Methodologies for Intelligence Systems) 的会议上提交的一篇论文中建立的一个公共宣告逻辑系统不仅能对主体间的知识分布进行静态描述和认知推理，而且还可以刻画主体之间交流过程中的知识变化并进行推理。然而，由于该论文并未正式发表，当时影响不大。直到 1996 年随着 J.van Benthem 的著作《 Exploring Logical Dynamics 》和阿姆斯特丹逻辑语言和计算中心（ Institute of Logic,Language and Computation，简称 ILLC ）斯宾洛莎项目（ Spinoza Project ）– Logic in Action 的推动下，动态认知逻辑吸引了更多的学者加入到它的研究中来。 J.Gerbrandy, W.Groeneveld[1997] 又重新独立发现了公开宣告逻辑。后来的许多动态认知逻辑 A Baltag,L S Moss, S Solecki[1998]、 H.van Ditmarsch, W. van der Hoek,B.Kooi[2005] 一方面考虑了半公开宣告、私下宣告等各种宣告形式，另一方面还考虑加进各种群体知识，但是它们都是在公开宣告逻辑的基础之上通过各种扩张建立起来的。因此，公开宣告逻辑是动态认知逻辑的一个基础系统。从那以后，动态认知逻辑才得到了蓬勃发展。

本文主要采用 B Kooi,J van Benthem[2004] 提出归约的方法，在现有的一个动态认知逻辑的基础系统－公开宣告逻辑 PAL 的基础之上，进一步考虑相对化公共知识和群体隐含知识，建立一个带有群体知识的公开宣告逻辑系统 $PAL(RC,D,E)$ 。

2　语言和语义

定义 5.1（**语言** $L_{PAL(RC,D,E)}$ ）　给定一有限主体集 N 和一有限命题变元集 P，公开逻辑语言 $L_{PAL(RC,D,E)}$ 中的语句归纳定义如下：

$\varphi ::= \ p \ | \ \neg\varphi \ | \ (\varphi\wedge\psi) \ | \ K_i\varphi \ | \ E_B\varphi \ | \ C_B(\varphi,\psi) \ | \ D_B\varphi \ | \ [\varphi]\psi \ |$

其中 $K_i\varphi$ 表示主体 i 知道 φ， $[\varphi]\psi$ 表示如果宣告 φ 成功则 ψ 成立； $E_B\varphi$ 表示 φ 是

群体 B（ $B \subseteq N$ ）中的普遍知识； $C_B(\chi, \varphi)$ 表示 φ 相对于 χ 是群体 B 中的公共知识；$D_B\varphi$ 表示 φ 是群体 B 中的隐含知识； $[\varphi]\psi$ 表示如果宣告 φ 成功则 ψ 成立。

定义 5.2（**认知模型**） 给定一有限主体集 N 和一有限命题变元集 P, 一个认知模型是满足下列条件的三元组 $M =< W, R, V >$：

•$W \neq \emptyset$， W 是一个非空的可能世界的集合。

•$R : N \longrightarrow 2^{W*W}$， R 对每个主体指派 W 上的一个等价关系。

•$V : P \longrightarrow 2^W$ ， V 对每个命题变元在每个可能世界上进行赋值。

下面将 $(R_1 \cup ... \cup R_n)$ 记为 R_{E_B} ，则 $R^*_{E_B}$ 表示 $(R_1 \cup ... \cup R_n)$ 的自返传递闭包；将 $(R_1 \cap ... \cap R_n)$ 记为 R_B 。

定义 5.3（**语义**） 给定一个认知模型 $M =< W, R, V >$ 和一个可能世界 $w \in W$，公式 φ 在认知模型 M 中是真的，记作 $(M, w) \models \varphi$，归纳定义如下：

一般定义如前；

$(M, w) \models E_B\varphi$ 当且仅当对所有的 v，如果 $wR_{E_B}v$，那么 $(M, v) \models \varphi$；

$(M, w) \models C_B(\varphi, \psi)$ 当且仅当对所有的 v，如果 $w(R_{E_B} \cap \|\varphi\|^2)^*v$，那么 $(M, v) \models \psi$；

$(M, w) \models D_B\varphi$ 当且仅当对所有的 v，如果 wR_Bv，那么 $(M, v) \models \varphi$；

$(M, w) \models [\varphi]\psi$ 当且仅当如果 $(M, w) \models \varphi$，那么 $(M|_\varphi, w) \models \psi$；

其中 $M|_\varphi :=< W', R', V' >$ 定义如下：

令 $\|\varphi\|_M = \{v \in W | (M, v) \models \varphi\}$

•$W' = \|\varphi\|_M$

•$R' = R \cap (\|\varphi\|_M \times \|\varphi\|_M)$

•$V' = V \cap \|\varphi\|_M$

$(M, w) \models \langle\varphi\rangle\psi$ 当且仅当 $(M, w) \models \varphi$ 并且 $(M|_\varphi, w) \models \psi$。

在第四章可以看到我们通过归约的方法由 $S5(n)$ 的完全性很容易就得出了公开宣告逻辑 PAL 的完全性。那么一个带有群体知识的公开宣告逻辑系统是否也可以归约到一个静态的认知逻辑上去呢？在 PAL 中，归约方法能够顺利进行的最主要原因是，对于个体知识系统中有归约公理 $[\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i[\varphi]\psi)$。

我们可以证明对于群体隐含知识，归约公理 $[\varphi]D_B\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow D_B[\varphi]\psi)$ 依然是成立的。

而对于公共知识的归约公理是不存在的。因为 A.Baltag, L.S. Moss,S. Solecki[1998] 证明在带有公共知识的动态认知逻辑比带有公共知识的静态认知逻辑表达力更强。因此，它是不可能归约到一个带有通常公共知识的静态逻辑系统上去的。而归约方

法不仅使得完全性的证明简单明晰而且能够更为清楚的展示静态向动态的转换。为了解决这个问题， B Kooi, J van Benthem[2004] 提出了一个相对化的公共知识的概念。有了相对化公共知识之后，就容易找到关于相对化公共知识的那条归约公理，$[\varphi]C_B(\psi,\chi)\leftrightarrow C_B(\varphi\wedge[\varphi]\psi,[\varphi]\chi)$ 。于是，公共知识就能用归约的办法来处理了。

3 公理系统

定义 5.4（**证明系统** PAL(RC,D,E) ） 给定一有限主体集 N 和一有限命题变元集 P ，逻辑 $PAL(RC,D,E)$ 的证明系统 PAL(RC,D,E) 由下列公理和推演规则组成：

(1) 逻辑系统 $S5^B_m(RC,D,E)$ 的所有公理

(2)$[\varphi]p\leftrightarrow(\varphi\rightarrow p)$

(3)$[\varphi]\neg\psi\leftrightarrow(\varphi\rightarrow\neg[\varphi]\psi)$

(4)$[\varphi](\psi\wedge\chi)\leftrightarrow([\varphi]\psi\wedge[\varphi]\chi)$

(5)$[\varphi]K_i\psi\leftrightarrow(\varphi\rightarrow K_i[\varphi]\psi)$

(6)$[\varphi]D_B\psi\leftrightarrow(\varphi\rightarrow D_B[\varphi]\psi)$

(7)$[\varphi]C_B(\psi,\chi)\leftrightarrow C_B(\varphi\wedge[\varphi]\psi,[\varphi]\chi)$

(6)$[\varphi][\psi]\chi\leftrightarrow[\varphi\wedge[\varphi]\psi]\chi$

推演规则：

(1) 从 $\{\varphi,\varphi\rightarrow\psi\}$ ，可以得到 ψ 。（分离规则）

(2) 从 φ ，可以得到 $K_i\varphi$ 。

(3) 从 φ ，可以得到 $[\psi]\varphi$ 。

(4) 从 φ ，可以得到 $C_B(\chi,\varphi)$ 。

(5) 从 φ ，可以得到 $D_B\varphi$ 。

4 完全性证明

定义 5.5（**翻译**） 翻译是一个满足下列条件的从 $L_{PAL(RC,D,E)}$ 语言的公式集到 $L_{S^m_B(RC,D,E)}$ 语言的公式集的函数：

$t(p)=p$

$t(\neg\varphi)=\neg t(\varphi)$

$t(\varphi\wedge\psi)=t(\varphi)\wedge t(\psi)$

$t(K_i\varphi) = K_i t(\varphi)$

$t(D_B\varphi) = D_B t(\varphi)$

$t(C_B(\chi, \varphi)) = C_B(t(\chi), t(\varphi))$

$t([\varphi]p) = t(\varphi \to p)$

$t([\varphi]\neg\psi) = t(\varphi \to \neg[\varphi]\psi)$

$t([\varphi](\psi \wedge \chi)) = t([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\chi)$

$t([\varphi]K_a\psi) = t(\varphi) \to K_a t([\varphi]\psi)$

$t([\varphi]D_B\psi) = t(\varphi) \to D_B t([\varphi]\psi)$

$t([\varphi]C_B(\psi, \chi) = C_B(t(\varphi) \wedge t([\varphi]\psi), t([\varphi]\chi))$

$t([\varphi][\psi]\chi) = t([\varphi \wedge [\varphi]\psi]\chi)$

定义 5.6（**复杂度**） 复杂度是一个从逻辑 $PAL(RC, D, E)$ 的语言公式集到自然数集的一个函数， $c : L_{PAL(RC,D,E)} \longrightarrow N$ 定义如下：

$c(p) = 1$

$c(\neg\varphi) = 1 + c(\varphi)$

$c(\varphi \wedge \psi) = 1 + max(c(\varphi), c(\psi))$

$c(K_a\varphi) = 1 + c(\varphi)$

$c(D_B\varphi) = 1 + c(\varphi)$

$c(C_B(\psi, \chi)) = 1 + max(c(\chi), c(\psi))$

$c([\varphi]\psi) = (4 + c(\varphi)) \times c(\psi)$

引理 5.1 对于公式 $\varphi, \psi, \chi \in L_{PAL(RC,D,E)}$，

1. 对于 $\psi \in$sub(φ)， $c(\varphi) \geq c(\psi)$。

2.$c([\varphi]p) > c(\varphi \to p)$。

3.$c([\varphi]\neg\psi) > c(\varphi \to \neg[\varphi]\psi)$。

4.$c([\varphi](\psi \wedge \chi)) > c([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\chi)$

5.$c([\varphi]K_i\psi) > c(\varphi \to K_i[\varphi]\psi)$

6.$c([\varphi]D_B\psi) > c(\varphi \to D_B[\varphi]\psi)$

7.$c([\varphi]C_B(\psi, \chi)) > c(C_B(\varphi \wedge [\varphi]\psi, [\varphi]\chi))$

8.$c([\varphi][\psi]\chi) > c([\varphi \wedge [\varphi]\psi]\chi)$

引理 5.2（**翻译的正确性**） 对任一公式 $\varphi \in PAL(RC, D, E)$ 来说，都有：

$$\vdash \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$$

定理 5.1（**完全性定理**）对任一公式 $\varphi \in PAL(RC, D, E)$，如果 $\models \varphi$，那么 $\vdash \varphi$。

证明：假设 $\models \varphi$，则由 $\vdash_{\mathbf{PAL(RC,D,E)}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ 和可靠性定理有 $\models t(\varphi)$，而 $t(\varphi)$ 中不含任何行动模态算子的公式，由 $S5^m_B(RC, D, E)$ 的完全性有 $\vdash_{\mathrm{S5}^m_B(RC,D,E)}$ t(φ)，$S5^m_B(RC, D, E)$ 则是 PAL(RC,D,E) 的一个子系统，因此同样有 $\vdash_{\mathbf{PAL(RC,D,E)}} t(\varphi)$ ，又由引理 5.2$\vdash_{\mathbf{PAL(RC,D,E)}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$，所以 $\vdash \varphi$。

5 总结

尽管可以把 $PAL(RC, D, E)$ 翻译到 $S5^m_B(RC, D, E)$ 中去，但和 $S5^m_B(RC, D, E)$ 不同，公开宣告逻辑 $PAL(RC, D, E)$ 并不是一个正规的模态逻辑系统，因为它对普遍代入规则不封闭。例如 $[p]p$ 系统中的内定理，而 $\vdash [p \wedge \neg K_i p](p \wedge \neg K_i p)$ 则相反，它是矛盾式。这也表明宣告模态是不能在 L_K 中通过真值联结词定义出来的。因为如果可以的话， $PAL(RC, D, E)$ 应该和 $S5(n)$ 一样是正规模态逻辑系统。因此，在这个意义上说，$PAL(RC, D, E)$ 是一个比 $S5^m_B(RC, D, E)$ 更强的逻辑。

有意思的是，我们前面提到 $\vdash [p \wedge \neg K_i p](p \wedge \neg K_i p)$ 在公开宣告逻辑系统中是矛盾式，它的直观意思是说如果对一个原子命题 p 并且某成员不知道 p 这一事实作公开宣告成功的话，那么宣告以后该复合命题所断定的事实就不再成立了，因为该成员已经通过公开宣告知道了原子命题 p。这和我们通常认为凡是宣告一个命题之后都可以成为公共知识并且依然为真的直观不符，而正是用逻辑形式化的方法揭示出我们通常的这一直观是有问题的。有了公开宣告逻辑以后，使我们对原来历史上的很多悖论有了新的分析工具，目前公开宣告逻辑已经运用到泥孩子智力游戏和考试悖论等认知问题的动态分析中去。

当然这里的公开宣告逻辑系统 $PAL(RC, D, E)$ 并不能处理半公开宣告、私下宣告等其它宣告形式，因此，它对很多其它认知行动还不能处理。半公开宣告、私下宣告等其它宣告形式在行动模型逻辑（ Action Model Logic ）中可以通过行动模型和认知模型耦合的办法来处理。公开宣告逻辑在行动模型逻辑中可以表示为一种特殊的情形，因此，行动模型逻辑是一种比公开宣告逻辑更强的逻辑，这是我们后面要研究的内容。

从上面可以看出，公开宣告逻辑首先为了实现静态向动态的转换，是通过引入行动模态算子的办法，把宣告作为一种模态来处理。但是最后在完全性的证明中，是利用翻译的方法，把公开宣告逻辑翻译到原来的静态认知逻辑系统中去，通过一个静态认知逻辑的完全性来证明了一个动态认知逻辑的完全性。公开宣告逻辑的这种方

法在动态认知逻辑中很具有代表性。从这我们也可以看出，动态认知逻辑是立足于已有的模态逻辑，吸收最新模态逻辑的研究成果，是模态逻辑在认知领域的一个应用，它对于研究人的动态化的认知过程和人工智能都有重要意义。

6 参考文献

1 、 Jan.A.Plaza,1989,Logics Of Public Announcement ,Proceedings 4th International Symposium on Methodologies for Intelligence Systems.

2 、 J.van Benthem,1996, **Exploring Logical Dynamics[M]**, ESLI Publications, Stanford.

3 、J.Gerbrandy,W.Groeneveld,1997,Reasoning about Information Change.Journal of Logic,Language and Information,6:147-169,1997.

4 、 A Baltag,L S Moss, S Solecki,1998, The Logic of public announcements, Common knowledge and Private Suspicious[A].Morgan Kaufmann,Los Altos(eds.).**Proceedings TARK 1998[C]**.1998.43-56.

5 、B Kooi, J van Benthem, 2004,Reduction Axioms for Epistemic Actions[A].Renate Schmidt, Ian Pratt-Hartmann,Mark Reynolds, Heinrich Wansing(eds.).**Advances in Modal Logic[C]**. 2004.197-211.

6 、 H.van Ditmarsch, W. van der Hoek,B.Kooi,2005,**Dynamic Epistemic Logic[M]**, Springer,Manuscript.