模态分体论

李大柱

北大哲学系

2017.6.6

分体论的产生

古希腊时期 $\Longrightarrow$ 中世纪 $\Longrightarrow$ 二十世纪初

- 莱斯涅夫斯基 (*Leśniewski*)
  - 《广义集合论基础》(Foundations of the General Theory of Sets)(1916)
  - 提出"Mereology"一词(1927)
  - 《数学基础》(Foundations of Mathematics)(1927-1931)
- 伦纳德(*Lenoard*)和古德曼(*Goodman*)
  - 《个体演算》(The Calculus of Individuals)(1940)

分体论的目的

分体论被构建的目的是替代集合论，莱斯涅夫斯基对集合论不满的原因：

- 其个人的唯名论立场
- 罗素悖论
- 对集合论的补救工作有些牵强

研究对象

整体与部分是一个日常生活中经常用到的概念，然而，并非所有可用“整体”和“部分”表述的关系都是分体论研究的对象。可以说，日常语言中没有一个术语可以准确表达分体论研究的对象。这里，从英语中的一些例子入手，来分析分体论的研究范围。

例子

(1) The handle is part of the mug.

(2) The remote control is part of the stereo system.

(3) The left half is your part of the cake.

(4) The US is part of North America.

(5) That corner is part of the living room.

(6) The outermost points are part of the perimeter.

(7) The first act was the best part of the play.

(8) Set $\{a\}$ is part of $\{a, b\}$.

例子

(9) The clay is part of the statue.

(10) Gin is part of martini.

(11) The goalie is part of the team.

标准系统

分体论的标准系统基本上可以看做是一些一阶理论。具体而言，其语言仅有两个二元谓词 P 和 $\equiv$。其中，Pxy 指 x 是 y 的部分。这里，采用 P 的逆关系 R 来进行表述，即 Rxy 指 y 是 x 的部分。

标准系统

在给出具体系统之前，先引入一些定义。

真部分 $PPxy ::= Rxy \wedge \neg x \equiv y$

重叠 $Oxy ::= \exists z(Rxz \wedge Ryz)$

下层重叠 $Uxy ::= \exists z(Rzx \wedge Rzy)$

原子 $Ax ::= \neg \exists y PPxy$

除了这些定义以外，R 还可以定义其他关系，比如相等关系、真扩张关系和不交关系等等。此外，分体论标准系统的初始谓词可以有其他选择，PP 、O 等都可以作为初始谓词来定义其他关系。

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & u \arrow[dll] \arrow[drr] & & & & \\
 & & & x \arrow[dll] \arrow[drr] & & & & y \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\
 & z_1 \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & & & & z & & & & z_2 \\
 {} & & {} & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

$F.1$

标准系统

$M.1$ $\forall x Rxx$ (*Reflexivity*)

$M.2$ $\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$ (*Transitivity*)

$M.3$ $\forall x \forall y (Rxy \wedge Ryx \rightarrow x \equiv y)$ (*Antisymmetry*)

$M.4$ $\forall x \forall y (PPxy \rightarrow \exists z (Rxz \wedge \neg Ozy)$ (*Supplementation*)

$M.5$ $\forall x \forall y (\neg Rxy \rightarrow \exists z (Ryz \wedge \neg Ozx))$ (*Strong Supplementation*)

$M.6$ $\forall x \forall y (Uxy \rightarrow \exists z \forall w (Ozw \leftrightarrow (Owx \vee Owy)))$ (*Finite Sum*)

$M.7$ $\forall x \forall y (Oxy \rightarrow \exists z \forall w (Rzw \leftrightarrow (Rxw \wedge Ryw)))$ (*Finite Product*)

$M.10$ $\exists x \alpha \rightarrow \exists z \forall w (Owz \leftrightarrow \exists x (\alpha \wedge Owx))$ (*Fusion*)

标准系统

分体论的标准系统由这些公式生成，其中，

GM 系统 $::= M.1 + M.2 + M.3$

MM 系统 $::= GM + M.4$

EM 系统 $::= GM + M.5$

CEM 系统 $::= EM + M.6 + M.7$

GEM 系统 $::= EM + M.10$

此外，给出下列两个公式：

M.11 $\forall x \exists y(Ay \wedge Rxy)$ $(Atomicity)$

M.12 $\forall x \exists y PPxy$ $(Atomlessness)$

其中，$M.11$ 表达的是任意对象都存在一个部分是原子；$M.12$ 表达的是任意对象都存在真部分。二者中的任何一个可以作为公理加入以上任意一个系统，但二者不可兼容。

研究现状

在国内，目前的研究还相对较少，但也取得了一些成果，比如台湾学者蔡行健（Tsai Hsing-chien）研究了分体论中的一些概念以及一些标准系统的可判断定性结果，其中 GEM 系统具有可判定性，GM 系统、MM 系统和 EM 系统不具有可判定性等等。此外，还有学者以分体论作为工具去研究哲学问题，如晨星昏星问题。

研究现状

在国外，对分体论的研究相对较多，取得的成果也更为多元化，既有哲学方面的，又有逻辑学方面的。比如，P. Hovda 根据分体论中一些术语在不同文献中的不同定义针对 GEM 系统给出了一些等价系统，Juan Comesana 讨论了 GEM-框架中对象的数量问题。另外，还有一些从哲学角度对分体论标准系统中的一些概念，如 *Fusion*、*Sum* 和对外延性等等的讨论。

另外，有一些学者使分体论和拓扑理论结合，加上“接壤”算子（*Contact*），并从模态逻辑角度对地域间位置关系的推理进行研究，比如 Yavor Nenov 和 Carsten Lutz 等。但是，其中所涉及的分体论理论基本上仅限于 GM 系统，并且所用的语言比较繁琐。

分体论和集合论的相似之处

大体而言，一个整体与其部分之间的关系类似于一个集合与其子集之间的包含关系，后者也是一个偏序关系。从这个观点出发，分体论与集合论之间存在一些类似，具体如下。

- "和"与“并”；“积”与“交”
- 外延性
- *Complementation*（$\forall x \forall y(\neg Rxy \rightarrow \exists z \forall w(Rzw \leftrightarrow (Ryw \wedge \neg Owx))))$）与“差”
- *Fusion* 与一般概括性原则
- 一个类似于康托定理的定理：任给一个名字 a，如果它命名了一些两两不交的对象 a_1，a_2，……，a_n，……（$n > 1$），那么 a 中存在比 a_1，a_2，……，a_n，…… 更多的集合。

分体论系统与集合论有着诸多类似。实际上，*Tarski* 于 1935 年已经证明，GEM 系统中整体与部分的关系同构于一个非空集合与其非空子集之间的包含关系，二者都可以看成一个除去零元的完备布尔代数。

分体论和集合论的不同

- 研究对象不同（集合、元素 VS. 整体、部分）
- 哲学立场不同（实在论 VS. 唯名论；不断定抽象对象存在 VS. 断定抽象对象存在）
- 具体内容上的不同

具体内容上的不同

首先，集合论中允许空集 $\emptyset$ 的存在，但“空对象”(*null item*) 本身作为一个抽象对象在分体论标准系统中并未获得承认。假如空对象 N 存在，那么任给对象 o，有 RoN。并且，任给一个对象 o，如果 $o \neq N$，那么 $\neg RNo$。根据 *Strong Supplementation*，o 有一个与 N 不交的部分 o''，然而这与 $\forall xRxN$ 相矛盾。另外，*Finite Product* 只刻画了两个对象重叠的情况，并未定义两个不重叠（即重叠的部分仅有空对象）的对象的积；在 *Fusion* 中，性质 α 必须是可满足的。

其次，在集合论中，全体集合的集合 **V** 的存在导致了罗素悖论和基数悖论，因此 *ZF* 系统不允许这样的 **V** 存在。然而，由于 GEM 对 *Fusion* 中的 α 几乎没有任何限制，所以可取 α 为一个有效式，比如 $\forall y(Rxy \vee \neg Rxy)$。进而，就会存在一个包含所有对象的整体存在，这与 *ZF* 系统有着很大的不同。

分体论未产生与罗素悖论、基数悖论相似的悖论的原因，具体如下。

首先，考虑基数悖论。GEM 系统构造一个整体的方式与集合论中构造一个集合的方式有着很大的不同，这在很大程度上使得分体论避开了基数悖论。这里，只考虑有穷的情况下的 GEM 系统。

在 *ZF* 系统中，任给一个自然数 n，就会存在集合 X 且 $|X| = n$。但是，这一结果在 GEM 中并不成立。比如，根据 *Fusion* 和 *Strong Supplementation*，一个整体 W 不可能包含且仅包含两个不同的对象。实际上，在 AGEM 中，如果原子的数量是 n，那么整体中包含 $2^n - 1$ 个对象。

其中，有三点需要注意。首先，不同的原子是不交的，并且当 $n > 1$ 时，$2^n - 1 > n$。这验证了莱斯涅夫斯基所证明的类似于康托尔定理的定理。

其次，集合论中，根据自然数的定义，n 的基数是 n。因此，分体论不能按照集合论中自然数的定义去定义自然数。

最后，$2^n - 1$ 是一个基数为 n 的集合 X 的幂集的基数（除去空集）。大概的说，在 GEM 中从两两不交的 n 个对象 $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$ 出发去构造一个整体的方式，类似于去得到集合 $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ 的幂集（除去空集）的方式。从这一点出发，一些两两不交的对象的整体，类似于这些对象组成的集合的幂集（除去空集）。可见，任给最大整体中的一个对象 a，根据 *Fusion*，总存在其中的另一个对象 b 与之相交，因此莱斯涅夫斯基所证的与康托尔定理类似的定理在这里并不适用。

除了基数悖论，全集的存在也会导致罗素悖论，即给定一个集合 $S = \{x|x \notin x\}$，那么会有 $S \in S$ 当且仅当 $S \notin S$。然而，在 GEM 系统中并不存在相应的悖论，考虑以下几种情况。

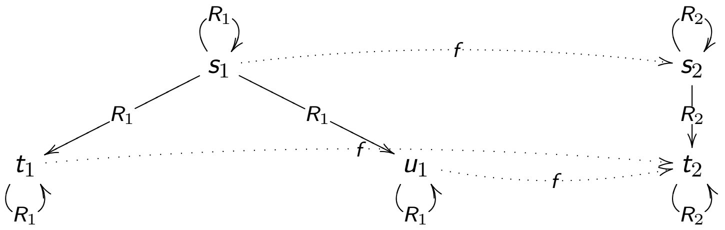
1. 对于任意对象 x，x 是 s 的部分，当且仅当，x 不是 x 的部分；
2. 对于任意对象 x，x 与 s 重叠，当且仅当，x 不与 x 重叠；
3. 对于任意对象 x，x 是 s 的真部分，当且仅当，x 不是 x 的真部分。

由于在 GEM 中，“R”、“O”和“PP”都可以单独充当初始谓词，因此罗素悖论如果在分体论中存在，其可能是这几种情况。在第一种情况中，由于“R”具有自返性，所以 s 是空对象，而空对象不被 GEM 系统承认，所以这种情况是不可能的；在第二种情况中，“O”本身也具有自返性，因此这种情况也不可能；在第三种情况中，所有对象都不是自身的真部分，因此 s 是一个比“最大的”对象还要大的对象，这种情况不可能出现，所以也不会引起悖论。

可见，经典的分体论系统 GEM 和集合论存在诸多类似，也能避免集合论中的悖论。然而，其理论本身存在着一些限制，比如前文提及的“基数”方面的限制等，也许正是因为这些原因，莱斯涅夫斯基并未在构建出分体论理论后去进一步用其来定义数学概念，也更谈不上去使其成为数学的基础。

不可定义性

只用 □ 不能定义分体论标准系统中的所有公理，以 M.4 为例。考虑框架 $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ 和 $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$。



$F_1 =< W_1, R_1 >$ $F_2 =< W_2, R_2 >$

定义函数 $f: W_1 \to W_2$，其中 $f(s_1) = s_2$，$f(t_1) = f(u_1) = t_2$。此时，在 F_1 中，如果 $R_1 o_1 v_1$，则 F_2 中有 $R_2 f(o_1) f(v_1)$；在 F_2 中，如果有 $R_2 f(o_1) v_2$，那么在 F_1 中有 $v_1 \in W_1$ 使得 $f(v_1) = v_2$ 且 $R_1 o_1 v_1$。可见，f 是一个从 F_1 到 F_2 的 p-同态。对于任意只有模态算子 $\Box$ 和 $\Diamond$ 的命题逻辑公式 φ，如果 $F_1 \vDash \varphi$ 则 $F_2 \vDash \varphi$。

语言和语义

这里，需要引入新的语言，即 $\mathcal{L}_{\Box,\boxbar}$。

定义 (语言 $\mathcal{L}_{\Box,\boxbar}$)

给定一个可数无穷的命题变元集，定义语言 $\mathcal{L}_{\Box,\boxbar}$ 为

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid \Box\varphi \mid \boxbar\varphi \qquad (p \in)$$

此外，在该语言下引入新的模态词 $\blacksquare$ 和 $\Box_u$，定义如下：

$$\blacksquare\varphi ::= \Box\varphi \wedge \boxbar\varphi$$

$$\Box_u\varphi ::= \Box\varphi \wedge \boxbar\neg\varphi$$

定义 (模型 M)

语言 $\mathcal{L}_{\Box,\boxminus}$ 上的模型 M 也为三元组 $\langle W, R, V\rangle$，其中

- W 是一个非空的对象集；
- $R \subseteq W \times W$ 是“部分”关系；
- $V :\to 2^W$ 是一个赋值函数。

定义 (可满足关系)

公式在模型上的可满足关系定义如下：

$$
\begin{array}{lll}
M, w \vDash \top & & \text{恒成立} \\
M, w \vDash p & \Longleftrightarrow & w \in V(p) \\
M, w \vDash \neg\varphi & \Longleftrightarrow & M, w \nvDash \varphi \\
M, w \vDash \varphi \wedge \psi & \Longleftrightarrow & M, w \vDash \varphi \text{ 且 } M, w \vDash \psi \\
M, w \vDash \Box\varphi & \Longleftrightarrow & \text{对任意的 } v \in W, \text{ 如果 } Rwv, \text{ 则 } M, v \vDash \varphi \\
M, w \vDash \boxminus\varphi & \Longleftrightarrow & \text{对任意的 } v \in W, \text{ 如果 } M, v \vDash \varphi, \text{ 那么 } Rwv
\end{array}
$$

根据 $\Box_u$ 和 $\blacksquare$ 的定义可得：

$$
\begin{array}{lll}
M, w \vDash \Box_u\varphi & \Longleftrightarrow & \text{对任意的 } v \in W, M, v \vDash \varphi \\
M, w \vDash \blacksquare\varphi & \Longleftrightarrow & \text{对任意的 } v \in W, \ M, v \vDash \varphi \text{ 当且仅当 } Rwv
\end{array}
$$

模态对应

对于任意框架 $F=\langle W,R\rangle$，

Reflexivity	对应于 $\Box p\to p$
Transitivity	对应于 $\Box p\to\Box\Box p$
Antisymmetry	对应于 $\Diamond(\boxbar\neg p\wedge p)\to p$

对于任意 GM-框架 $F=\langle W,R\rangle$，

Atomicity	对应于 $\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p$
Atomlessness	对应于 $\blacksquare p\to\Diamond\neg\boxbar p$
Supplementation	对应于 $p\wedge\Diamond(\neg p\wedge\blacksquare q)\to\Diamond\Box\neg q$
Strong Supplementation	对应于 $\blacksquare p\to\Box_u(\neg p\to\Diamond\Box\neg p)$

对于任意 EM-框架 $F = \langle W, R \rangle$，

Finite Product	对应于	$\blacksquare p \to \Box_u(\blacksquare q \to (\Diamond(p \wedge q) \leftrightarrow \Diamond\blacksquare(p \wedge q)))$
Finite Sum	对应于	$\Diamond\blacksquare p \wedge \Diamond\blacksquare q \to \Diamond_u(\boxbar(p \vee q) \wedge \Box(\Diamond p \vee \Diamond q))$
Fusion	对应于	$p \to \Diamond_u(\boxbar p \wedge (\Diamond\Box q \to \Diamond_u(p \wedge \Diamond q)))$

模态分体系统

在给出各个模态分体论理论之前，先分别介绍语言 $\mathcal{L}_{\boxbar}$ 的最小的逻辑系统 K^* 和 $\mathcal{L}_{\Box,\boxbar}$ 下的最小的正规逻辑系统 $K^{\sim}$。

其中，系统 K^* 较为简单。具体而言，除了布尔重言式，它的公理模式只有一条：$\boxbar\varphi \wedge \boxbar(\neg\varphi \wedge \psi) \to \boxbar\psi$；除了 MP 规则，它的推理规则只有：如果 $\vdash \varphi$，则 $\vdash \boxbar\neg\varphi$。

关于 K^*，有两条定理。

定理 (5.1.1)

对于任意 $\mathcal{L}_{PM}$ 中的公式 φ，定义 φ^* 是把 φ 中的 $\Box$ 统一换成 $\Box\neg$ 后得到的。对于一个 K 的模型 $M=\langle W,R,V\rangle$，定义 $M^*=\langle W,W^2\backslash R,V\rangle$。那么，

(1) $K\vdash\varphi$ 当且仅当 $K^*\vdash\varphi^*$;

(2) $M,s\vDash\varphi$ 当且仅当 $M^*,s\vDash\varphi^*$;

(3) $\vDash\varphi$ 当且仅当 $\vDash\varphi^*$ 。

定理 (5.1.2)

K^* 具有可靠性，完全性，可判定性和紧致性。

在给出 K^* 系统后，进一步给出 $K^{\sim}$ 的公理系统。其公理系统不仅含有关于 $\Box$ 和 $\boxbar$ 的公理，还有模态算子 $\Box_u$ 的公理。除去布尔重言式，它的公理具体如下：

A1 $\mathbf{K}$;

A2 $\Box_u\varphi \to \varphi$;

A3 $\Box_u\varphi \to \Box_u\Box_u\varphi$;

A4 $\varphi \to \Box_u\Diamond_u\varphi$;

A5 $\boxbar\varphi \wedge \boxbar\psi \to \boxbar(\varphi \vee \psi)$;

A6 $\boxbar\bot$.

其推理规则有：

R1 如果 $\vdash \varphi \to \psi$ 且 $\vdash \varphi$，那么 $\vdash \psi$ （MP 规则）

R2 如果 $\vdash \varphi$，那么 $\vdash \Box\varphi$ (必然化规则)

R3 如果 $\vdash \varphi \to \psi$，那么 $\vdash \boxbar\psi \to \boxbar\varphi$

定理 (5.1.3)

$K^{\sim}$ 是 K^{*} 的真扩张。

定理 (5.1.4)

对于任意的 $\mathcal{L}_{PM}$ 中的公式 φ，如果 $K \vdash \varphi$，那么 $K^{\sim} \vdash \varphi^{*}$。其中，$\varphi^{*}$ 是把 φ 中出现的 $\Box$ 换成 $\boxminus\neg$ 后得到的公式。

命题 (5.1.5)

$\Box\varphi \wedge \boxminus\psi \rightarrow \Box_{u}(\psi \rightarrow \varphi)$ 是 $K^{\sim}$ 的内定理。

定理 (可靠性)

对于任意任意公式 φ 和框架 $F = \langle W, R\rangle$，如果 $K^{\sim} \vdash \varphi$，那么 $F \vDash \varphi$。

定理 (完全性)

对于任意的 Φ 和 φ，如果 $\Phi \nvdash \varphi$，那么 $\Phi \nvDash \varphi$。

在以上结果中，关于 $K^{\sim}$ 完全性的证明最为复杂。为证其完全性，需先引入如下概念。

定义 (广义模型 M_g)

广义模型 M_g 是一个四元组 $\langle W, R, S, V\rangle$，其中：

- $R \cup S = W^2$;
- $M_g, x \Vdash \Box\varphi$ *iff* 对于任意 $y \in W$, 如果 Rxy, 则 $M_g, y \Vdash \varphi$;
- $M_g, x \Vdash \boxminus\varphi$ *iff* 对于任意 $y \in W$, 如果 Sxy, 则 $M_g, y \Vdash \neg\varphi$.

其中，$F_g = \langle W, R, S\rangle$ 称为一个广义框架。

在广义模型的基础上，引入 $K^{\sim}$ 的广义典范模型。

定义 ($K^{\sim}$ 的广义典范模型)

$K^{\sim}$ 的广义典范模型 $M_g^c = \langle W^c, R^c, S^c, V^c \rangle$ 是一个四元组，其中

- W^c 是语言 $\mathcal{L}_{\Box,\boxminus}$ 中的所有极大一致集形成的集合;
- R^cxy iff $\Box x \subseteq y$;
- S^cxy iff $\boxminus\neg x \subseteq y$;
- $x \in V^c(p)$ iff $p \in x$.

其中，$\Box x = \{\varphi | \Box\varphi \in x\}$，$\boxminus\neg x = \{\varphi | \boxminus \neg\varphi \in x\}$。此外，由于 $\Box_u\varphi = \Box\varphi \wedge \boxminus\neg\varphi$，在 M_g^c 中引入新的关系 T^c，T^cxy 当且仅当 $\Box_u x \subseteq y$，其中 $\Box_u x = \{\varphi | \Box_u\varphi \in x\}$。

在 $K^{\sim}$ 的广义典范模型 $M_g^c = \langle W^c, R^c, S^c, V^c \rangle$ 中，有如下引理。

引理 (真值引理)

设 $M_g^c = \langle W^c, R^c, S^c, V^c \rangle$ 为 $K^{\sim}$ 的广义典范模型，对于任意的公式 φ 及 $x \in W^c$，$x \in V^c(\varphi)$ 当且仅当 $\varphi \in x$。

命题

在广义典范框架 $F_g^c = \langle W^c, R^c, S^c \rangle$ 上，有如下结果：

1. $T^c = R^c \cup S^c$;
2. T^c 是等价关系。

引理 (存在引理)

在广义典范框架 $F^c_g = \langle W^c, R^c, S^c \rangle$ 上，有如下结果：

1. 对于任意 $x \in W^c$，如果 $\Diamond\varphi \in x$，则存在 x 的一个 R^c-从属集 y 使得 $\varphi \in y$;
2. 对于任意 $x \in W^c$，如果 $\neg \boxminus \neg\varphi \in x$，则存在 x 的一个 S^c-从属集 y 使得 $\neg\varphi \in y$.

在此，引入广义典范模型的生成模型。

定义 (生成广义典范模型)

$M^c_{gx} = \langle W^c_x, R^c_x, S^c_x, V^c_x \rangle$ 是广义典范模型 $M^c_g = \langle W^c, R^c, S^c, V^c \rangle$ 的生成典范广义模型，当且仅当，

1. $W^c_x = \{y \in W^c | T^c xy\}$;
2. $R^c_x = R^c \cap W^{c2}_x$;
3. $S^c_x = S^c \cap W^{c2}_x$;
4. $V^c_x(\varphi) = \{y \in W^c_x \text{ 且 } \varphi \in y\}$.

易见，$R^c_x \cup S^c_x = T^c = W^{c2}_x$，且命题 5.1.9 ，5.1.10 和 5.1.11 在 M^c_{gx} 上成立。此外，对于任意的 $\Box_u \varphi$ 和 $v \in W^c_x$，如果 $v \in V^c_x(\Box_u \varphi)$，那么对于任意的 $y \in W^c_x$，都有 $y \in V^c_x(\varphi)$ 。

定理 (广义完全性)

对于任意的 Φ 和 φ，如果 $\Phi \nvdash \varphi$，那么存在一个广义模型使得 $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ 可满足。

然而，给出广义完全性还不够，因为生成广义典范模型中的 R^c_x 和 S^c_x 交集可能非空。为了解决这个问题，引入如下引理。

引理 (重要引理)

对于任一生成广义典范模型 $M^c_{gx} = \langle W^c_x, R^c_x, S^c_x, V^c_x\rangle$，存在一个与其模态等值的模型 $\underline{M^c_{gx}} = \langle \underline{W^c_x}, \underline{R^c_x}, \underline{S^c_x}, \underline{V^c_x}\rangle$。其中，$\underline{R^c_x}$ 和 $\underline{S^c_x}$ 交集为空。

可知，$\underline{M^c_{gx}} = \langle \underline{W^c_x}, \underline{R^c_x}, \underline{S^c_x}, \underline{V^c_x}\rangle$ 是 $K^{\sim}$ 的模型。因此，有如下结果。

定理 (完全性)

对于任意的 Φ 和 φ，如果 $\Phi \nvdash \varphi$，那么 $\Phi \nvDash \varphi$。

对 $K^{\sim}$ 进行扩张，形成各个模态分体系统。具体定义如下：

MGM: $K^{\sim} + \mathbf{4} + \mathbf{T} + \Diamond(\boxbar\neg\varphi \wedge \varphi) \rightarrow \varphi$;

MMM: $MGM + \varphi \wedge \Diamond(\neg\varphi \wedge \blacksquare\psi) \rightarrow \Diamond\Box\neg\psi$;

MEM: $MGM + \blacksquare\varphi \rightarrow \Box_u(\neg\varphi \rightarrow \Diamond\Box\neg\varphi)$;

MCEM: $MEM + \blacksquare\varphi \rightarrow \Box_u(\blacksquare\psi \rightarrow (\Diamond(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow$
$\Diamond\blacksquare(\varphi \wedge \psi))) + \Diamond\blacksquare\varphi \wedge \Diamond\blacksquare\psi \rightarrow \Diamond_u(\boxbar(\varphi \vee \psi) \wedge \Box(\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi))$;

MGEM: $MEM + \varphi \rightarrow \Diamond_u(\boxbar\varphi \wedge (\Diamond\Box\psi \rightarrow \Diamond_u(\varphi \wedge \Diamond\psi)))$.

此外，对于 $X \in \{GM, MM, EM, CEM, GEM\}$，$AMX$ 指 $MX + \Box\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\Box\varphi$；$\tilde{A}MX$ 指 $MX + \blacksquare\varphi \rightarrow \Diamond\neg\boxbar\varphi$。

关于模态分体系统的可靠性，有如下结果。

定理 (可靠性)

任给 $X \in \{GM, MM, EM, CEM, GEM\}$，$MX$ 系统在 X 框架上是有效的；AMX 系统在 AX 框架上是有效的；$\tilde{A}MX$ 相对于 $\tilde{A}X$ 框架上是有效的。

模态分体系统的完全性问题比较复杂，这里仅给出 MGM 系统的完全性结果。

定理 (MGM 的不完全性)

系统 MGM 不是框架完全的。

欲证 MGM 系统的不完全性，只需找到一个公式，其在 MGM-框架上有效，又独立于 MGM 系统。这里，考虑 $\Diamond \boxminus \varphi \to \boxminus\varphi$。（实际上，这一公式对应于传递性。）

首先，证明 $\Diamond \boxminus \varphi \to \boxminus\varphi$ 在 MGM-框架上的有效性。

命题

$\Diamond \boxminus \varphi \to \boxminus\varphi$ 在任一 MGM-框架上是有效的。

Proof.

任给一个 GM 框架 $F = \langle W, R\rangle$，假设 $F \nvDash \Diamond \boxminus \varphi \to \boxminus\varphi$，则存在 F 上的一个赋值 V 及 $w \in W$，使得 $\langle F, V\rangle, w \vDash \Diamond \boxminus \varphi \wedge \neg \boxminus \varphi$。根据 $\langle F, V\rangle, w \vDash \Diamond \boxminus \varphi$ 可知，存在 $v \in W$，Rwv 且对于任意的 $u \in V(\varphi)$，都有 Rvu。由于 GM 框架具有传递性，所以对于任意的 $u \in V(\varphi)$，都有 Rwu，从而 $w \in V(\boxminus\varphi)$，这与 $\langle F, V\rangle, w \vDash \neg \boxminus \varphi$ 矛盾。 $\square$

其次，证明 $\Diamond \boxbar \varphi \to \boxbar\varphi$ 独立于 MGM 系统，从而证明了其不是 MGM 系统的内定理。

命题

$\Diamond \boxbar \varphi \to \boxbar\varphi$ 独立于系统 *MGM*。

Proof.

构造一个广义框架 $F_g = \langle W, R, S\rangle$，其中

- $W = \{u, v\}$
- $R = \{\langle u, u\rangle, \langle v, v\rangle, \langle u, v\rangle\}$
- $S = \{\langle u, v\rangle, \langle v, u\rangle\}$

可见，$R \cup S = W^2$。

$\Diamond \boxbar \varphi \to \boxbar\varphi$ 在 F_g 上不是有效式。给出 F_g 上的一个赋值 V，$V(\varphi) = \{v\}$。此时，$\langle F_g, V\rangle, u \nvDash \Diamond \boxbar \varphi \to \boxbar\varphi$。

另外，MGM 在该框架上是有效的。 $\square$

然而，关于 MGM 的完全性，有如下结果。

定理

$\Diamond \boxbar \varphi \to \boxbar\varphi + MGM$ 在 GM 框架上是完全的。

参考文献 I

- 周北海, 模态逻辑导论, 北京大学出版社, 1997.
- 刘壮虎, 素朴集合论, 北京大学出版社, 2001.
- 邢滔滔, 数理逻辑, 北京大学出版社, 2008.
- 张洪铭， 胡泽洪, 分体论视角下的名称同一性问题——以晨星 -昏星悖论为例, 世界哲学, 4 (2015), pp. 82–91.
- B. Caplan and B. Bright, *Fusions and ordinary physical objects*, Philosophical Studies, 125 (2005), pp. 61–83.
- J. Comesana, *Could there be exactly two things?*, Synthese, 162 (2008), pp. 31–35.

参考文献 II

- W. Contributors, *Mereology*, Wikipedia, The Free Encyclopedia., 2017.
- T. W. Ebbinghaus H.D., Flum J., *Mathematical Logic*, Springer, 2008.
- S. Evnine, *Constitution and composition: Three approaches to their relation*, ProtoSociology, 27 (2011), p. 212–235.
- K. Fine, *The problem of mixture*, Pacific Philosophical Quarterly, 76 (1995), p. 266–369.

参考文献 III

- P. S. Gargov G. and T. T., *Modal environment for boolean speculations*, in Mathematical Logic and its Applications, D. Scordev, ed., Plenum Press, 1987, pp. 253–263.
- V. Goranko, *Completeness and incompleteness in the bimodal base $\mathcal{L}(r,-r)$*, in Mathematical Logic, P. P. Petkov, ed., Plenum Press, 1990, p. 311–326.
- V. Goranko, *Mereology*, in Mathematical Logic, P. P. Petkov, ed., Springer, 1990, pp. 311–326.
- ———, *Modal definability in enriched language*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 31 (1990).

参考文献 IV

- W. H. Holliday, *On the modal logic of subset and superset: Tense logic over medvedev frames*, Studia Logica, 105 (2017), pp. 13–35.
- P. Hovda, *What is classical mereology?*, J Philos Logic, 38 (2009), pp. 55–82.
- T. Hsing-chien, *Decidability of mereological theories*, Logic and Logical Philosophy, 18 (2009), p. 45–63.
- ——, *More on the decidability of mereological theories*, Logic and Logical Philosophy, 20 (2011), p. 251–265.
- ——, *A comprehensive picture of the decidability of mereological theories*, Studia Logica, 101 (2013), p. 987–1012.

参考文献 V

- I.J.Humberstone, *Inaccessible worlds*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 24 (1983), pp. 346–352.
- T. Jech, *Set Theory*, Springer, 2002.
- E. Lowe, *Mereological extensionality, supplementation, and material constitution*, Monist, 96 (2013), pp. 131–148.
- V. Lowe, *Professor goodman's concept of an individual*, Philosophical Review, 62 (1953), p. 117–126.
- C. Lutz and F. Wolter, *Modal logics of topological relations*, Logical Methods in Computer Science, 2 (2006), pp. 1–41.

参考文献 VI

- P. Needham, *Macroscopic mixtures*, Journal of Philosophy, 104 (2007), p. 26–52.
- Y. Nenov and D. Vakarelov, *Modal logics for mereotopological relations*, Advances in Modal Logic, 7 (2008), pp. 249–272.
- B. Pickel, *There is no 'is' of constitution*, Philosophical Studies, 147 (2010), p. 193–211.
- C. Pontow, *A note on the axiomatics of theories in parthood*, Data & Knowledge Engineering, 50 (2004), p. 195–213.

参考文献 VII

- N. Rescher, *Axioms for the part relation*, Philosophical Studies, 6 (1955), p. 8–11.
- D. H. Sanford, *Fusion confusion*, Analysis, 63 (2003), pp. 1–4.
- ——, *Can a sum change its parts?*, Analysis, 71 (2011), pp. 235–239.
- R. Sharvy, *Mixtures*, Philosophy and Phenomenological Research, 44 (1983), p. 227–239.
- P. Simons, *Stanisław leśniewski*, in The Stanford Encyclopedia of Philosophy, E. N. Zalta, ed., Metaphysics Research Lab, Stanford University, winter 2015 ed., 2015.

参考文献 VIII

- P. M. Simons, *Parts. A Study in Ontology*, Clarendon Press, 1987.
- A. Tarski, *Zur grundlegung der booleschen algebra. i*, Fundamenta Mathematicae, 24 (1935), p. 177–198.
- H. Tsai, *A comprehensive picture of the decidability of mereological theories*, Studia Logica, (2013), pp. 987–1012.
- ——, *Decidability of general extensional mereology*, Studia Logica, (2013), pp. 619–636.
- H. Tsai and A. Varzi, *Atoms, gunks and the limits of "composition"*, Erkenn, 81 (2016), pp. 231–235.

参考文献 IX

- R. URBANIAK, *Leśniewski's Systems of Logic and Foundations of Mathematics*, Springer, 2013.
- J. VAN BENTHEM, *Minimal deontic logics*, Bulletin of the Section of Logic, 8 (1979), pp. 36–42.
- J. VANBENTHEM, *Modal Correspondence Theory*, University of Amsterdam, 1976.
- A. VARZI, *Mereology*, in The Stanford Encyclopedia of Philosophy, E. N. Zalta, ed., Metaphysics Research Lab, Stanford University, winter 2016 ed., 2016.

谢　谢