新弗雷格主义简介(2)

刘靖贤

新弗雷格主义的渊源和基石

渊源：达米特及其学生

- Dummett
  - Wright
  - Boolos
  - Heck

基石：弗雷格定理

二阶逻辑 + 休谟原则 → 二阶算术

主要内容

一. 数学内容

二. 二阶逻辑

三. 抽象原则

一. 数学内容

1. 原始递归算术

2. 一阶皮亚诺算术

3. 二阶皮亚诺算术

4. 类型论和集合论

0. Robinson算术

Robinson算术的公理，记为Q或Q*

$\neg x'=\mathbf{0}$	$\neg x'=\mathbf{0}$
$x'=y'\rightarrow x=y$	$x'=y'\rightarrow x=y$
$y=\mathbf{0}\vee\exists x(x'=y)$	$\neg x<\mathbf{0}$
$x+\mathbf{0}=x$	$x<y'\leftrightarrow x<y\vee x=y$
$x+y'=(x+y)'$	$y=\mathbf{0}\vee\exists x(x<y\wedge x'=y)$
$x\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$	$x+\mathbf{0}=x$
$x\times y'=(x\times y)+x$	$x+y'=(x+y)'$
	$x\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$
	$x\times y'=(x\times y)+x$

归纳公理(模式)，记为I：$(\varphi(\mathbf{0})\wedge\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(x')))\rightarrow\forall x\varphi(x)$

1. 原始递归算术

Q或Q*	**Robinson算术**	
Q_2或$I\Delta_0$	**Nelson-Wilkie算术**	Q和Q_2可以相互解释
Q_3或$I\Delta_0$ (exp)	**Kalmar算术**	引入幂函数或阶乘函数
Q_4或$I\Delta_0$ (supexp)	**Gentzen算术**	证明切割消去定理
……		
Q_ω	**Grzegorczyk算术**	引入所有原始递归函数

2. 一阶皮亚诺算术

$\mathrm{I}\Delta_0$	**Nelson-Wilkie算术**	
$\mathrm{I}\Sigma_1$	**Parsons算术**	证明所有原始递归函数的存在性和唯一性
$\mathrm{I}\Sigma_2$	**Ackermann算术**	证明**Ackermann**函数的存在性和唯一性
……		
$\mathrm{I}\Sigma_n$或 P^1	一阶皮亚诺算术	

3. 二阶皮亚诺算术

概括公理(CA): $\exists X\forall x(Xx\leftrightarrow\varphi(x))$

分离原则(SP): $\neg\exists x(\varphi(x)\wedge\psi(x))\rightarrow\exists X(\forall x(\varphi(x)\rightarrow Xx)\wedge\forall x(\psi(x)\rightarrow\neg Xx))$

归纳公理(I_0): $X0\wedge\forall x(Xx\rightarrow Xx')\rightarrow\forall xXx$

Δ_1^0-CA + I_0	RCA_0	构造主义
Π_1^0-SP + I_0	WKL_0	有穷还原主义
Δ_0^1-CA + I_0	ACA_0	直谓主义
Σ_1^1-SP + I_0	ATR_0	直谓还原主义
Π_1^1-CA + I_0	Π_1^1-CA_0	非直谓性
……	……	
Π_n^1-CA + I_0 或 P^2	二阶皮亚诺算术	

4. 类型论和集合论

P^1	一阶皮亚诺算术
P^2	二阶皮亚诺算术
……	
P^ω 或 PM	类似于类型论

ZFC	Zermelo-Frankel 集合论
NBG	von Neumann-Bernays-Gödel 集合论
MK	Morse-Kelly 集合论
	大基数

二. 二阶逻辑

推出皮亚诺公理的两种策略：

Wright和Hale

- 放弃公理V，使用休谟原则

Boolos和Heck

- 坚持公理V，从其推出休谟原则

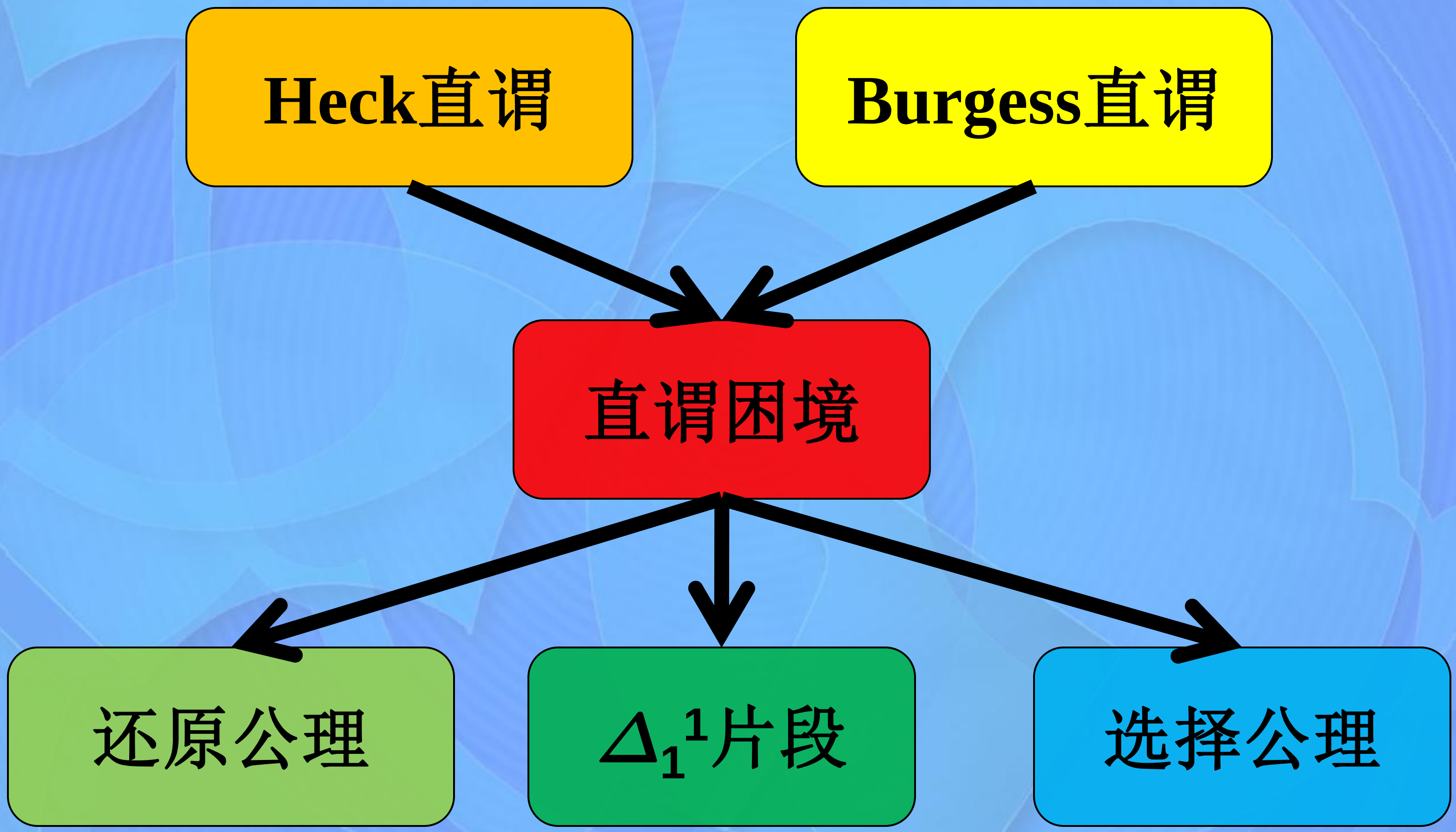
二. 二阶逻辑

1. 直谓二阶逻辑

2. 正二阶逻辑

3. 模态二阶逻辑

1. 直调二阶逻辑



Heck直谓

Heck（1996）的模型论证明：

（**1**）模式形式的公理**V**与简单直谓概括公理是一致的

（**2**）模式形式的公理**V**与分支直谓概括公理是一致的

模式形式的公理**V**：

$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]=\varepsilon[\lambda x\ \psi(x)]\leftrightarrow\forall x(\varphi(x)\leftrightarrow\psi(x))$

简单直谓概括公理：

$\exists X\forall x(Xx\leftrightarrow\varphi(x))$ （其中$\varphi(x)$不包含约束二阶变元）

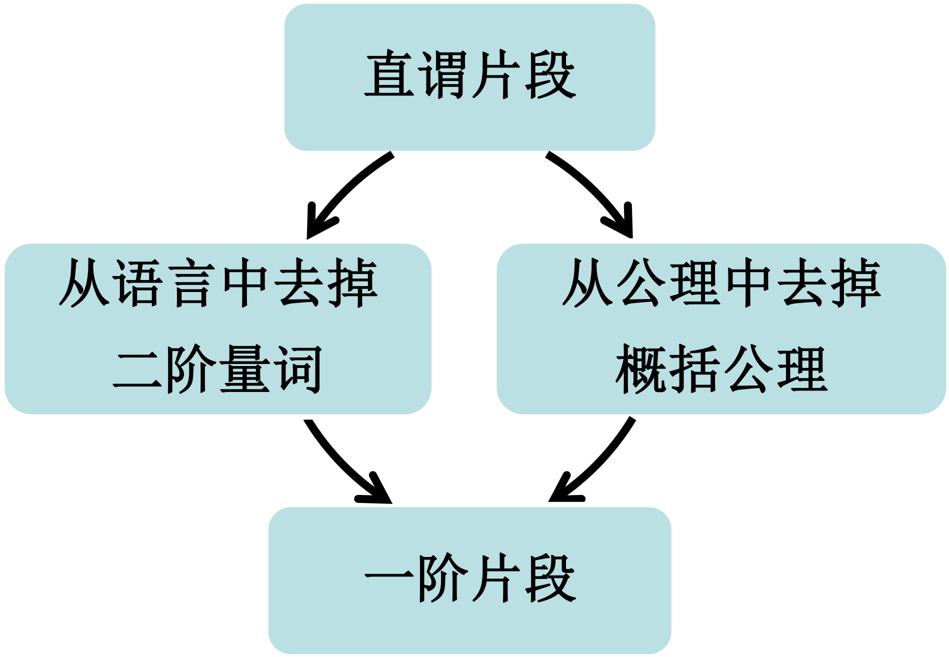
分支直谓概括公理：

$\exists X_n\forall x(X_nx\leftrightarrow\varphi(x))$

（其中$\varphi(x)$不包含高于**n-1**层约束的二阶变元或者高于**n**层的自由二阶变元）

一阶片段

Heck的证明受到**Parsons**证明的启发



Parsons（**1987**）的模型论证明：一阶片段是一致的
Burgess（**1998**）的证明论证明：一阶片段是一致的

解释

（1）**Heck(1996)**证明：

将量词相对化到 $\mathrm{Num}(x) \leftrightarrow \exists F(x=\#F)$

简单直谓概括公理和休谟原则可以解释**Robinson**算术

（2）**Heck(2010)**证明：

按照**0**、后继和自然数的弗雷格定义

分支直谓概括公理和**Log**可以解释**Robinson**算术

Log：$\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow \#[\lambda x\ \varphi(x)]=\#[\lambda x\ \psi(x)]$

Boolos(1998)认为**Log**是逻辑真理。

弗雷格定义

Heck(2000)指出：

弗雷格认为算术和解析都是分析的，而欧几里德几何是先天综合的。
但是解析可以解释欧几里德几何，欧几里德几何岂不也是分析的？

"解释"仅仅表明：在解析中可以证明那些看起来像欧几里德公理的东西

（**1**）"实数的三元有序组"是对于点的合适定义吗？
如果不是，则这种解释并没有表明在解析中可以证明几何真理。

（**2**）弗雷格的定义真的表达了算术概念的通常意义吗？
如果没有，则弗雷格并没有表明在逻辑中可以证明算术真理。

弗雷格方案的一个重要部分是：表明算术基本概念确实是逻辑概念。

Burgess直谓

Burgess（**2005, 124-138**）的证明论证明：
公理形式的公理**V**与直谓概括公理是一致的

公理形式的公理**V**是：
$\varepsilon X=\varepsilon Y\leftrightarrow\forall z(Xz\leftrightarrow Yz)$

将其简记为**PV**，将**PV** 加上角标得到$\mathbf{P^1V}$：
$\exists X^{\mathbf{0}}\forall x(X^{\mathbf{0}}x\leftrightarrow\varphi(x))$ （其中$\varphi(x)$不包含二阶变元）
$\varepsilon X^{\mathbf{0}}=\varepsilon Y^{\mathbf{0}}\leftrightarrow\forall z(X^{\mathbf{0}}z\leftrightarrow Y^{\mathbf{0}}z)$

直谓分层

P^nV是在$P^{n-1}V$的基础上增加如下公理而得到的：

$\exists X^{n-1}\forall x(X^{n-1}x\leftrightarrow\varphi(x))$

（其中$\varphi(x)$不包含**n-1**层约束的二阶变元或者自由二阶变元）

$\varepsilon X^{n-2}=\varepsilon Y^{n-1}\leftrightarrow\forall z(X^{n-2}z\leftrightarrow Y^{n-1}z)$

$\varepsilon X^{n-1}=\varepsilon Y^{n-1}\leftrightarrow\forall z(X^{n-1}z\leftrightarrow Y^{n-1}z)$

Burgess的直谓分层是一致的：

（**1**）任给**n = 1, 2, 3 …**，P^nV一致性的证明需要**Genzen**算术**(Q_4)**

（**2**）$P^\omega V$一致性的证明需要Q_5 或者 $I\Delta_0$**(super^{2}exp)**。

解释

Burgess（2005, 87-109）证明：
PV可以解释Robinson算术，P^2V可以解释Kalmar算术（Q_3）

Ganea（2007）证明：
P^1V和Robinson算术可以相互解释

Visser（2009）证明：
P^2V和Kalmar算术可以相互解释

困境

Linnebo表明(Linnebo 2004)：

相对于弗雷格的定义，直谓概括公理与休谟原则不能推出后继公理，即任何自然数都有一个后继

Heck表明（Heck 2000, 191-193）：

相对于弗雷格的定义，Π_1^1概括公理和休谟原则足可证明后继公理，但与公理V也足可推出矛盾

休谟原则面临良莠不齐和凯撒问题

非直谓概括公理违反恶性循环原则

但二者可以推出皮亚诺算术

公理V回避良莠不齐和凯撒问题

直谓概括公理可以摆脱恶性循环

但二者无法推出皮亚诺算术

Δ_1^1片段

Wehmeier（1999）表明：

公理形式的公理V与Δ_1^1概括公理是一致的

Ferreira和Wehmeier（2002）共同表明：

模式形式的公理V与Δ_1^1概括公理是一致的。

Walsh（2009）表明：

休谟原则与Δ_1^1概括公理仍然不能推出后继公理

还原公理

（1）**Ferreira**（**2005**）表明：

Heck分支理论与有穷还原公理是一致的

有穷还原公理：

$\forall H_0 \forall F_n(\mathbf{Finite}_0(H_0) \wedge \forall x(F_n x \rightarrow H_0 x) \rightarrow \exists G_0 \forall x(G_0 x \leftrightarrow F_n x))$

（2）**Ferreira** （**2005**）还表明：

Heck分支理论与有穷还原公理可以解释直谓二阶算术（$\mathbf{ACA_0}$）。

利用还原公理，**Ferreira**的定义$\mathbf{N_1}$比**Heck**的定义$\mathbf{N_2}$下降了一个层次

选择公理

（1）**Walsh**（**2009**）表明：

直谓概括公理**+**公理**V+**Σ_1^1选择公理是一致

Σ_1^1选择公理：

$\forall x \exists X \varphi(x, X) \rightarrow \exists R \forall x \varphi(x, (X)_x)$ （其中φ是公式，$(X)_x = \{y | (y, x) \in R\}$）

（2）**Walsh** （**2009**）还表明：

直谓概括公理**+**公理**V+**Σ_1^1选择公理可以解释直谓二阶算术**+** Σ_1^1选择公理

2. 正二阶逻辑

在一般的意义上，悖论的来源被归结为自指、否定和无穷。

所有悖论都与自指相关，但并非所有自指都导致悖论，悖论的产生还需要与否定联系起来；然而，也并非所有否定都导致悖论，导致悖论的否定还要涉及到总体和无穷。（陈波 2005，118-124）

(1) 直谓概括公理不能断言“属于自身”[$\lambda x\ \exists F(x=\varepsilon F \wedge Fx)$]
因此通过消除自指避免了悖论。

(2) 正概括公理可以断言“属于自身”，但不能断言“不属于自身”
因此通过消除否定也避免了悖论。

Positive Fragment of *Grundgesetze*（POV）

语言：

逻辑符号：$\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \perp$　　等词：$=$　　外延符号：ε

一阶变元：$x, y, z, \cdots$　　二阶变元：$X, Y, Z, \cdots$

形成规则:

如果$\varphi(x)$是公式，则$\varepsilon[\lambda x\ \psi(x)]$是项，称为值域的项（**value-range terms**）

公理：

$\exists X\forall x(Xx\leftrightarrow\varphi(x))$　（其中$\varphi(x)$不包含否定词）

$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]=\varepsilon[\lambda x\ \psi(x)]\leftrightarrow\forall x(\varphi(x)\leftrightarrow\psi(x))$

NOTE: $\rightarrow$和$\leftrightarrow$可以用通常的方式定义，

但在概括公理中，定义概念的公式不能包含$\rightarrow$和$\leftrightarrow$

模型

令D是全体自然数的集合
令一阶变元的取值范围是D

令$\mathfrak{F}$是由D自身和D的有限子集构成的集合
令二阶变元的取值范围是$\mathfrak{B}$

对原有结构进行膨胀，增加新的常项**0, 1, 2,** … 指称D中的自然数。
显然，原有模型满足**POV**当且仅当膨胀后的模型满足**POV**。

证明过程

定理1：正概括公理与模式形式的公理V是一致的

1.通过值域的项的赋值证明模式形式的公理**V**成立

（**1**）不包含二阶变元的值域的项

（**2**）包含自由二阶变元的值域的项

（**3**）包含约束二阶变元的值域的项

2. 正概括公理断定的概念都在$\mathfrak{B}$中

（**1**）不包含量词的公式

（**2**）包含一阶全称量词的公式

（**3**）包含一阶存在量词的公式

（**4**）包含二阶全称量词的公式

（**5**）包含二阶存在量词的公式

Rank and Degree

(1)值域的项的高度（**rank**）：
如果$\varphi(x)$不包含值域的项，则$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$的高度是**0**；
如果$\varphi(x)$包含值域的项，其最大高度是**n**，则$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$的高度是**n**+**1**。

将所有值域的项按照高度排成一个ω×ω的序列

(2)值域的项的程度（**degree**）：
如果$\varphi(x)$不包含二阶量词，$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$的高度是**0**；
如果$\varphi(x)$包含值域的项，其最大程度是**n**，则$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$的程度是**n**+**1**。

将所有值域的项按照程度排成一个ω×ω的序列。

(1)不包含二阶变元的值域的项

令$L(m,n)$是一个配对函数，$M(m,n)=2L(m,n)$

（1）对于高度为0的第一个值域的项，它的赋值是自然数$M(0, 0)$。

（2）归纳证明

①假设：在整个高度的序列中$t=\varepsilon[\lambda x\ \alpha(x)]$前面的值域的项都有赋值。

②再假设：如果$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$和$\varepsilon[\lambda x\ \psi(x)]$在$t$的前面，则$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$和$\varepsilon[\lambda x\ \psi(x)]$的赋值相同当且仅当$\forall x(\varphi(x)\leftrightarrow\psi(x))$。

①如果存在t前面的值域的项$s=\varepsilon[\lambda x\ \beta(x)]$，并且$\alpha(x)$和$\beta(x)$等价，则可以把$s$的值赋给$t$。

②如果不存在这样的s，则把$M(m,n)$赋给t，其中m是t的高度，n是最小的没有被$M(m,n)$赋值的自然数。

二阶变元的取值范围

一个集合A属于二阶变元的取值范围$\mathfrak{B}$，
当且仅当，A是有限集或者$A=D$。

①如果A是空集，则存在公式$\perp$使得$A=\varepsilon[\lambda x\ \perp]$。
②如果A是非空有限集，则存在公式$\varphi(x)$使得$A=\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$，
  其中$\varphi(x)$形如$x=c_1\vee\cdots\vee x=c_n$，$c_1, \cdots, c_n$是通过膨胀得到的常项。
③如果A是D，则存在$x=x$使得$A=\varepsilon[\lambda x\ x=x]$。

一个集合A属于二阶变元的取值范围$\mathfrak{B}$，
当且仅当，存在一个公式$\varphi(x)$使得$A=\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$，
其中$\varphi(x)$不包含除x外的一阶自由变元、二阶自由变元和否定词。

(2)包含自由二阶变元的值域的项

对于$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$，其中$\varphi(x)$包含的自由二阶变元为$X_1,\cdots,X_n$，
可以找到一个解释I,
I把集合B_i赋值给X_i，并且B_i是$\varepsilon[\lambda x\ \beta_i(x)]$，其中$\beta_i(x)$不包含任何二阶变元。

把出现在$\varphi(x)$中X_i分别替换为$\beta_i(x)$，由此得到$\varphi'(x)$，并且$\varphi'(x)$与$\varphi(x)$等价。
将已经赋值的$\varepsilon[\lambda x\ \varphi'(x)]$的指称赋给$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$

(3)包含约束二阶变元的值域的项

令$N(m,n)=\mathbf{4}L(m,n)+\mathbf{1}$。

（**1**）对于程度为**0**的值域的项，它的赋值前面已经给出。

（**2**）归纳证明

①假设：在整个程度的序列中$t=\varepsilon[\lambda x\ \alpha(x)]$前面的项都有赋值。

②再假设：如果$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$和$\varepsilon[\lambda x\ \psi(x)]$在$t$的前面，则$\varepsilon[\lambda x\ \varphi(x)]$和$\varepsilon[\lambda x\ \psi(x)]$的赋值相同当且仅当$\varphi(x)$和$\psi(x)$等价。

①如果存在t前面的值域的项$s=\varepsilon[\lambda x\ \beta(x)]$，并且$\alpha(x)$和$\beta(x)$等价，则可以把$s$的值赋给$t$。

②如果不存在这样的s，则把$N(m,n)$赋给t，其中m是t的程度，n是最小的没有被$N(m,n)$赋值的自然数。

项的赋值

个体域	由膨胀所得到个体常项	不包含二阶变元的值域的项的指称	包含二阶变元的值域的项的指称
0		0	
1			1
2		2	
3	3		
4		4	
5			5
6		6	
7	7		
8		8	
9			9
10		10	
11	11		
……	……	……	……

(1)不包含量词的公式

① 如果$\varphi(x)$是原子公式，
则$\varphi(x)$形如$\perp$、$x=x$或$x=t$，其中t为项
因此$\varphi(x)$定义了空概念、大全概念或单元概念的存在，它们属于$\mathfrak{B}$ 。

② 如果$\varphi(x)$只包含$\wedge$和$\vee$，
则$\varphi(x)$形如$x=x\vee\perp$，$x=t\vee\perp$，$x=x\wedge\perp$，$x=t\wedge\perp$，$x=x\vee x=t$，
$x=t\vee x=t'$，$x=x\wedge x=t$，$x=t\wedge x=t'$，
以及在此基础上形成的更为复杂的组合
因此$\varphi(x)$定义了大全概念或者有限概念的存在，它们也都属于$\mathfrak{B}$ 。

(2) 包含一阶全称量词的公式

如果$\phi(x)$形如$\forall y\psi(x, y)$,
则它所定义的概念可以看作是集合$\{x: \forall y\psi(x, y)\}$,

这个集合可以看作是所有$\{x: \psi(x, y)\}$ 的交集，其中y的取值为所有自然数，
即 $\{x: \psi(x, 0)\} \cap \{x: \psi(x, 1)\} \cap \{x: \psi(x, 2)\} \cap \ldots.$

每个 $\{x: \psi(x, y)\}$ 所定义的概念都在$\mathfrak{B}$中
$\mathfrak{B}$中集合的任意交集仍在$\mathfrak{B}$中
因此， $\forall y\psi(x, y)$ 所定义的概念属于$\mathfrak{B}$

(3)包含一阶存在量词的公式

如果$\phi(x)$形如$\exists y\psi(x, y)$, 则消去存在量词,

由此得到的$\psi(x, y)$可以定义一个二元关系$\mathbf{R} \subset \mathbf{D} \times \mathbf{D}$

$\psi(x, y)$ 形如: (a) $x = t \wedge y = t'$, (b) $x = t \vee y = t'$, (c) $x = y$, 或在此基础上形成的更为复杂的组合.

(a)所定义的集合为$\{(t, t')\}$，其投射是有限集，属于$\mathfrak{B}$

(b)所定义的集合为$\{(t, 0), (t, 1), (t, 2), \ldots, (0, t'), (1, t'), (2, t'), \ldots\}$，其投射是大全集，也属于$\mathfrak{B}$

(c)所定义的集合为$\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots\}$，其投射是大全集，属于$\mathfrak{B}$

所以，$\exists y\psi(x, y)$ 所定义的概念在$\mathfrak{B}$中

(4) 包含二阶全称量词的公式

如果$\phi(x)$形如$\forall Y\psi(x, Y)$
则它所定义的概念可以看作是集合$\{x: \forall Y\psi(x, Y)\}$

这个集合可以看作是所有$\{x: \psi(x, Y)\}$的交集，其中Y的取值范围是$\mathfrak{B}$中的集合，即$\{x: \psi(x, Y_1)\} \cap \{x: \psi(x, Y_2)\} \cap \{x: \psi(x, Y_3)\} \cap \ldots$.

因为二阶自由变元可以替换为一个不包含量词和否定词的一阶公式，
所以二阶全称量词的情况与一阶全称量词的情况类似。

(5) 包含二阶存在量词的公式

如果$\phi(x)$形如$\exists Y\psi(x, Y)$, 则消去二阶存在量词，

由此得到的$\psi(x, Y)$，可以定义一个二元关系$S \subset D \times \wp(D)$

$\psi(x, Y)$ 形如: (A) $Yt' \vee x = t$, (B) $Yt' \wedge x = t$, (C) Yx, 或者在此基础上形成的更为复杂的组合.

(A) 所定义的集合是$\{(x, Y): x = t$ 且 $t' \in Y\}$，其投射是有限集，属于$\mathfrak{B}$

(B) 所定义的集合是$\{(x, Y): x = t$ 或 $t' \in Y\}$，其投射是大全集，属于$\mathfrak{B}$

(C) 所定义的集合是$\{(0, Y_0): 0 \in Y_0\} \cup \{(1, Y_1): 1 \in Y_1\} \cup \{(2, Y_2): 2 \in Y_2\} \cup \ldots$ 其投射是大全集，也属于$\mathfrak{B}$

因此，$\exists Y\psi(x, Y)$所定义的概念在$\mathfrak{B}$中

解释

定理2： POV可以解释Robinson算术

（1）POV可以解释Szmielew-Tarski集合论

（2）Burgess（2005, 90-105）表明：

① Szmielew-Tarski集合论可以解释“两类理论”

② “两类理论”可以解释Robinson算术

（3）根据解释的传递性，POV可以解释Robinson算术

解释

Szmielew-Tarski集合论公理：

(1)外延公理： $\mathbf{ß}x\wedge\mathbf{ß}y\wedge\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y$

(2)空集公理： $\exists x(\mathbf{ß}x\wedge\forall y(y\notin x))$

(3)附加公理： $\mathbf{ß}u\rightarrow\exists x(\mathbf{ß}x\wedge\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in u\vee z=v))$

其中$\mathbf{ß}x$表示x是集合。

“两类理论”的公理是：

(Q1) $\neg x'=\mathbf{0}$

(Q2) $x'=y'\rightarrow x=y$

(R1) $\exists R\forall x\forall y\neg Rxy$

(R2) $\forall R\forall u\forall v\exists S\forall x\forall y(Sxy\leftrightarrow Rxy\vee(x=u\wedge y=v))$

局限

弗雷格对后继关系和自然数的定义都包含了否定词：

$Pxy \leftrightarrow \exists F \exists w(Fw \wedge y = \#F \wedge x = \#[\lambda z\, Fz \wedge z \neq w])$

$\mathbf{N}n \leftrightarrow \forall F(\forall x(P\mathbf{0}x \rightarrow Fx) \wedge \forall x \forall y(Fx \wedge Pxy \rightarrow Fy) \rightarrow Fn) \vee \mathbf{0} = n$

在证明后继公理时需要用到强数学归纳法：

$\forall F(F\mathbf{0} \wedge \forall x \forall y(\mathbf{N}n \wedge Fx \wedge Pxy \rightarrow Fy) \rightarrow \forall x(\mathbf{N}x \rightarrow Fx))$

从弗雷格的定义很容易得到：

$\forall F(F\mathbf{0} \wedge \forall x \forall y(Fx \wedge Pxy \rightarrow Fy) \rightarrow \forall x(\mathbf{N}x \rightarrow Fx))$，

然后将其中的F例示为$\mathbf{N}x \wedge Fx$就可以得到强数学归纳法。

公式$\mathbf{N}x \wedge Fx$包含否定词，

从正概括公理的角度，这个公式不能定义一个概念，因此不能例示F。

问题(1)

如果将直谓概括公理和正概括公理结合起来，则仍然可以推出罗素悖论：

(1)由正概括公理可得$\exists G\forall x(Gx\leftrightarrow\exists F(x=\varepsilon F\wedge Fx))$

(2)由直谓概括公理可得$\exists H(Hx\leftrightarrow\neg Gx)$

因此仍然可以断定"不属于自身"这个概念的存在。

在多类语言中可以区分正概念和直谓概念

(1)将直谓概括公理限制为"$\varphi(x)$既不包含二阶量词，也不包含正概念"

(2)将正概括公理限制为"$\varphi(x)$既不包含否定词，也不包含直谓概念"

由此得到的多类理论不会导致悖论。

是否存在一种将直谓概括公理和正概括公理结合起来的方式，使得既可以按照弗雷格定义推出皮亚诺算术，又不会导致悖论？

问题(2)

Q是否能够解释POV？

Burgess的PV
我的POV
Robinson算术(Q)
Nelson-Wilkie算术(Q2)

如果可以解释, 则以上四者将处于相同的一致性强度的层次。

不确定的可扩展性

达米特曾将弗雷格逻辑主义失败的原因归结为概念的不确定的可扩展性:

> 悖论所揭示的并不是与外延不一致的概念的存在，而是所谓的不确定的可扩展的概念的存在。
>
> …… 显然，弗雷格的错误并不在于认为概念的外延是逻辑的，因为它确实是逻辑的。他的错误也不在于假定所有限定的概念都有一个外延，因为任何由确定的总体定义的概念都可以给出一个确定的子总体（**subtotality**）。我们可以说，弗雷格的错误在于假定存在一个包含了所有概念的外延的总体，而这些概念却是由这些外延定义的；更为一般地说，他的错误在于对不确定的可扩展的概念的存在没有产生丝毫怀疑。（**Dummett 1991, 316-317**）

不确定的可扩展性

二阶量词的取值范围是所有概念，但这些概念都是不确定地扩展的，如果强行给这个不确定的范围限定边界，就会导致悖论。

正概括公理和公理**V**的一致性说明：

（**1**）并非像达米特所认为的那样，一个关于不确定可扩展性概念的理论是直觉主义的；

（**2**）而是当我们谈论概念时，排中律不是有效的

虽然概念F存在，但它的否定$\neg F$不能定义一个概念的存在

弗雷格是否会接受对概括公理的限制？

Boccuni认为：

> 一种语言的逻辑特征在这种语言能够谈论的和不能谈论的之间做出明确区分，无论被谈论的对象是什么——独立于心灵的存在（柏拉图主义），或者构造性存在（构造主义），亦或根本不存在（唯名论）。 …… 可表达的概念当然可以存在，不过这要取决于人们的本体论偏好；对于那些不可表达的概念，即使语言不能谈论它们，也可以存在。（**Boccuni 2010, 327**）

根据弗雷格的柏拉图主义，所有的概念都是存在的

但并非所有的概念都是可谈论的，因为谈论那些不可谈论的东西将导致矛盾

所以对概括公理的限制与弗雷格的柏拉图主义是不冲突的

3. 模态二阶逻辑

"新弗雷格主义两大学派"：

苏格兰学派

- 代表人物：Wright和Hale

斯坦福学派

- 代表人物：Zalta和Linsky

小结

1. 限制概括公理

- 例如直谓概括公理，正概括公理

2. 增加其他公理

- 例如还原公理，选择公理

3. 改变背景逻辑

- 例如模态逻辑，自由逻辑

三. 抽象原则

解决“良莠不齐”问题的两种策略：

渐进的方式

- **Wright和Weir: 一致性，保守性，稳定性**

一般的方式

- **Kit Fine： *The Limits of Abstraction***

Inflation and Hyperinflation

抽象原则的一般形式：

$\forall F \forall G(\sum F = \sum G \leftrightarrow E(F,G))$

其中$\sum$是作用于概念的抽象算子，$E(,)$是概念之间的等价关系

（**1**）膨胀问题：

概念的等价类的数目超出对象的数目（例如公理**V**）

（**2**）超膨胀问题：

抽象原则的数目超出对象的数目

Thanks！