分枝类型论与可构成集

杨睿之
北京大学哲学系

[摘要] 罗素悖论的发现使弗雷格为数学寻找逻辑基础的努力受到重创。分枝类型论是罗素自己提供的一种解决方案。可构成集则是集合论中所定义的概念。它由哥德尔提出并用于证明连续统假设相对 ZF 的一致性。本文将探寻两者的内在联系，并由此讨论罗素与哥德尔的不同哲学立场对于他们数学实践的影响。

1 研究的出发点

1.1 哲学立场

我既不是典型的实在论者也不是反实在论者，我也不是逻辑主义、直觉主义、形式主义或者结构主义的忠实簇拥。如果必须用"某某主义"来概括我的哲学立场，实用主义 (pragmatism) 会是一个比较接近的表达。也就是说，面对具体的问题时，依据经验，如果某种哲学理论的效果比较好，我就会倾向于接受这种哲学理论。但是在数学哲学中，"实用主义" 并不是一个正式称呼。

对数学哲学的思考中，关于哲学理论与数学实践之间相互关系有两种态度。夏皮罗 (Shapiro, 2000) 将其归结为："哲学优先" 原则 (philosophy-first principle)；与 "哲学最后" 原则 (philosophy-last-if-at-all principle)。

前者认为哲学决定正确的数学实践。例如，柏拉图基于其哲学立场，认为数学对象是永恒不变的理念世界中的对象，并由此认为几何学家的工作是错误的。因为几何学家会说 "画一根直线"、"平移/旋转图形" 等动态语言。又如，毕达哥拉斯学派认为世间万物是成比例的，所以拒绝承认 "不成比例" 的数，如 $\sqrt{2}$，的存在。反实在论者则根据其哲学立场，禁止在数学中使用非直谓性定义。直觉主义者禁止使用排中律。这种态度在哲学家中是主流。

而数学家往往不愿意让哲学理论来限制其数学实践，他们往往持第二种态度。他们认为数学实践有自己的生命，不需要哲学来赋予其意义。他们认为哲学从来不曾给数学研究带来什么积极影响，只有消极的限制。在他们看来，应该是

哲学服从于数学而不是相反。即哲学必须调整自己以便与新的数学发现相一致。

我更同情后者，但并不认为哲学必须根据数学来调整自己，或者说哲学的作用只是对已有的数学结果提供解释。我认为，哲学思想为数学实践提供启发与灵感，它是数学直观的源泉之一。缺乏直观的数学实践与使用机器枚举定理无异。事实上，数学家的数学实践总是有一个在先的直观引领的，如物理直观和哲学直观。我认为，不同的哲学理论可以对数学实践产生不同的影响，可能帮助也可能阻碍一些数学发现（本文中要分析的案例正是这一论点的事实例证）。我的态度可以类似地概括为"实践优先"原则。

1.2 研究方式

实用主义的价值判断标准是看一个东西的实际效果如何。实用主义的认识论基础一般是经验主义的。即建立理论或原则和其可能产生的效果之间的联系，靠的是经验归纳的方法。所以，我设想的研究方式就是：搜集大量案例，比较不同哲学立场对于不同数学问题的研究实践的影响；并从这些案例中归纳出一些规律。这是典型的经验科学的研究方式。

哲学理论与数学实践之间有两种层面的联系。一种是理论上的，一个数学哲学理论总会规定一套数学实践的原则，所以正确的做数学的方法可以看作一个真的哲学理论的直接后承。另一种是事实上的影响，即哲学对数学工作的引导、启发或阻碍作用。例如，直觉主义要求在数学证明中不使用排中律，所以直觉主义数学会与经典数学有不同的做法。这是理论上的影响。而围绕直觉主义哲学的讨论，建立了严格的直觉主义逻辑，使人们对于排中律的作用有了更深刻的理解。这是事实上的影响。我们将着眼于后者。即，我们不主要研究直觉主义数学与经典数学的区别，我们把经典数学、直觉主义数学以及对两者的比较都看作数学实践。在此基础上探讨哲学对数学的影响。

下面要分析的就是这样一个案例。它作为一个个案只能证明哲学与数学之间存在那样一种事实上的联系。但还不能从总归纳出这种联系的规律，那还需要更多的案例，是我未来研究的目标。

2 分枝类型论——一般理解

2.1 作为数学基础的类型论

罗素在1901年发现了著名的罗素悖论，并于1902年在与弗雷格的通信(Russell, 1902)中提出了他的发现。

弗雷格在其从逻辑推出数学的工作中是在十分宽松的意义上使用"概念"、"性质"、"类"等术语的，把"类"作为可操作的对象。例如，他将某个概念

$\mathbf{A}$ 的数定义为"与 $\mathbf{A}$ 等数"这一概念的外延(Frege, 1960)[85]；其中概念 $\mathbf{A}$ 与概念 $\mathbf{B}$ 等数定义为：存在 $\mathbf{A}$ 下对象与 $\mathbf{B}$ 下对象的一一关系。$\mathbf{0}$ 定义为"与自身不等"这个概念的数(Frege, 1960)[87]；定义 $\mathbf{1}$ 为概念"等于 $\mathbf{0}$"的数(Frege, 1960)[90]。用集合论的语言来表示就是 $\mathbf{1} = \{X \mid \text{存在双射 } f : X \mapsto \{\mathbf{0}\}\}$ (参见定义A.4、A.11)。如果我们承认 $\mathbf{1}$ 是一个合法的对象，那么我们不难在公理集合论中重演罗素悖论。首先，可以证明 $\mathbf{V} = \bigcup \mathbf{1} = \{x | \exists Y \in \mathbf{1}(x \in Y)\}$ ($\mathbf{V}$ 是所有合法对象的类，参见注A.6)。对任意 $x \in \mathbf{V}$，我们只需要取 $Y = \{x\}$即可。根据并集公理，$\mathbf{V}$ 就是一个合法的对象；又由分离公理 $\mathbf{R} = \{X \in \mathbf{V} | X \notin X\}$ 也是合法的对象。罗素悖论就可以表达如下：如果 $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$，则由其定义，$\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$；同样，若 $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$ 则 $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$。因此，弗雷格基于对"概念"、"集合"、"类"等术语的不加限制的运用而得到的数学基础是不可靠的。

为解决悖论，罗素首先提出了类型论，也就是后来所说的简单类型论。一般(很可能包括罗素自己) 认为简单类型论已经解决了与数学有关的"纯集合论"悖论，但无法解决诸如"最小不可定义序数"悖论等"语义悖论"。

为了解决简单类型论遗留下来的问题，罗素进一步提出了三种可能的方向，即曲折理论 (the zigzag theory)、限制对象规模的理论 (the theory of limitation of size) 以及无类理论 (the no-classes theory)(van Heijenoort, 1967)[150]。现在比较公认的处理悖论最好的数学基础理论——公理化集合论可以被看作限制对象规模理论的延伸 (见(Gödel, 1944)[124])，它禁止把诸如 $\mathbf{V}$、$\mathbf{ON}$ 等"过大"的类作为对象 (集合) 来处理。而分枝类型论则是无类理论方向的具体实现。在分枝类型论中，罗素不预设任何"类"或"概念"的存在，而只是把它们处理成 *façon de parler* (说话方式)。因此，在下一节中我们将性质 (property) 与命题函项 (propositional function) 视为同义。

2.2 简单类型论与悖论

在简单类型论中，罗素将宇宙 (universe) 分成不同的逻辑类型。所谓类型，就是指某个命题函项或性质的意义域 (range of significance)。个体 (individuals) 的总体构成第一类型，个体的属性构成第二类型，个体属性的属性 (即第二类型中对象的属性) 构成第三类型，依此类推。类型论禁止将某一类型的属性运用于更高类型的对象，这种运用被认为是无意义的。由此可以解决纯集合的悖论。

例如，假设 $\mathbf{R} = \{X | X \notin X\}$ 是第 n 类型的属性，则 $\mathbf{R}$ 本身是第 $n+1$ 类型的对象。问 $\mathbf{R}$ 是否有性质 $\mathbf{R}$，即是否 $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$，就是无意义的。

但罗素认为简单类型论无法解决语义悖论 (semantic paradox)，例如"第一个不可定义的序数"悖论。这里所谓"定义"一个对象，即找到一个命题函项（性质)，存在唯一对象满足该性质。假设存在不可定义的序数，那么"第一个不可定

义的序数”，即“第一个 α，对任意序数的性质 P，α 不是唯一满足 P 的序数”就定义了一个“不可定义”的序数。所以，所有序数都可以定义。这与我们关于序数的常识相矛盾，即，语言的公式有特定基数（可数），而序数类无法计数。

罗素认为，产生该悖论的原因是，我们谈论了对象的“所有性质”。而简单类型论并不排斥这种做法。为此，他需要继续对每个类型上的诸性质分层。这就是，分枝类型论。(关于这方面的更多的讨论可以参见(Ramsey, 1931)[1-61]、(科庇, 1988)[452-454]、以及奎因对(Russell, 1908)的评论 (见(van Heijenoort, 1967)[150-152])。)

2.3 分枝类型论

为了排除语义悖论。分枝类型论进一步对每个类型中对象的性质分层。一个一阶性质是关于某个类型的对象的性质；该类型的一个二阶性质仍然是关于这个类型的对象的性质，只是它牵涉到那些一阶性质。对任意 (有穷) 高阶的性质，我们总可以构造更高阶的性质。但对任意类型，我们没有一个涉及其所有性质的性质。所以“不可定义”不是一个合法的公式。我们只能说“第一个再 n 阶之前无法定义的序数”，而这是一个 $n+1$ 性质，该性质唯一确定，即定义了一个序数。

分枝类型论作为无类理论的实现，它所谈论的只是个体和命题函项(propositional function)，罗素也把命题函项称作性质(property)。和简单类型论中一样，类型是命题函项的意义域，也就是命题函项中变元的取值范围。分枝类型论的初始类型也是个体域。而再往上的构造则需要引入阶的概念。

定义 2.1 (阶，非正式) 给定类型 $Type_n$，那些最高以 $Type_n$ 为自由变元取值范围，而最高以 $Type_{n+m}$ 为约束变元 (或常元) 取值范围的命题函项称作 **$\mathbf{m}+1$ 阶命题函项/性质**，或**跨 $\mathbf{m}$ 阶函项/性质**。

当 $m=0$ 时，我们也称该命题函项/性质为**直谓** (predicative) **函项/性质**。

注意，为方便起见，在本文中将只讨论一元的性质。再此基础上定义类型：

定义 2.2 类型，非正式 (i) 定义 $Type_0$ 为个体域。

(ii) 对任意自然数 n，定义 $Type_{n+1}$ 为 $Type_i$ 中对象的 j 阶性质，其中 i, j 是自然数，且 $i+j=n$。

分枝类型谱系的构造可以用下图表示：

对一个命题 (命题函项的值)，如果其中约束变元 (或常元) 取值范围的最高类型为 $Type_n$，那么我们称该命题是 $n+1$ **级**的命题。这样，所有 $Type_{n+1}$ 类型中的命题函项的值都是 $n+1$ 级命题。考虑一个只有自由变元 x, X^1, X^2 的函项 $\varphi(x, X^1, X^2)$：$\forall X^1 \forall X^2 \varphi(x, X^1, X^2)$ 是 $Type_0$ 中对象的 3 阶函

项； $\forall x \forall X^2 \varphi(x, X^1, X^2)$ 是 $Type_1$ 中对象的 2 阶函项； $\forall x \forall X^1 \varphi(x, X^1, X^2)$ 是 $Type_2$ 中对象的直谓函项。它们的值都是 3 级的命题，且都是 $Type_3$ 中对象。

2.4 可化归公理

在数学中，我们说“ n 是自然数”（ $\mathbb{N}(n)$ ）是指 $\forall \varphi\big(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)) \rightarrow \varphi(n)\big)$。然而，这个命题函项在分枝类型论中是不被允许的。因为表面变项 φ 的变域并没有被限制在一个确定的类型下。我们可以改造上述函项，把表面变元 φ 的变域限制为 1 阶函项 (即第二类型中)得到：

$$\forall \varphi^1\big(\varphi^1(0) \wedge \forall x(\varphi^1(x) \rightarrow \varphi^1(Sx)) \rightarrow \varphi^1(n)\big)。 \tag{2.4.1}$$

其中，上标表示函项的阶。不难看出这是一个 2 阶函项。但如果我们将 $\mathbb{N}(n)$ 定义为函项 (2.4.1)，那么我们的归纳原理模式就只能运用于所有一阶函项了：

$$\varphi^1 0 \wedge \forall x(\varphi^1(x) \rightarrow \varphi^1(Sx)) \rightarrow \forall n(\mathbb{N}(n) \rightarrow \varphi^1(n)) \tag{2.4.2}$$

这样，归纳原理就无法运用于自然数的更高阶的函项，例如 $\mathbb{N}(n)$。

$$\forall n, m(\mathbb{N}(n) \wedge \mathbb{N}(m) \rightarrow \mathbb{N}(n+m)) \tag{2.4.3}$$

等数学定理也就无法利用归纳原理得到证明了。

为了解决这一问题，罗素引入了可化归公理 (axiom of reducibility)。可化归公理模式可简单地表述为，任意命题函项都有一个等价的直谓函项。所谓等价就是指满足这两个命题函项的对象相同。根据可化归公理模式，存在一个与 $\mathbb{N}$ 等价的 (一阶) 直谓函项 $\mathbb{N}^1$。根据(2.4.2)，我们可以归纳证明 $\forall n, m(\mathbb{N}^1(n) \wedge \mathbb{N}^1(m) \rightarrow \mathbb{N}^1(n+m))$。又由 $\mathbb{N}^1$ 与 $\mathbb{N}$ 等价，可得(2.4.3)。

奎因认为可化归公理的提出意味着分枝类型论又从无类理论的立场退回到简单类型论(van Heijenoort, 1967)[151]。罗素自己也意识到，可化归公理的引入隐含着对“类”的承认。因为说两个函项是等价的就是说，使这两个函项为真的赋值对象相同，也即属于同一个类 (参见定义??)。罗素也承认，数学中的函项都是外延的 (即任意两个等价的函项，作为对象可以看作是相等的)。如果因此我们只关注类，在可化归公理下，一阶函项就已经定义了所有的关于个体类。依此类推，整个分枝谱系就退化成简单类型谱系了。

但罗素坚持认为，这里用到“类”只是出于“语言上方便”的考虑，并不需要预设类的存在。不同却等价的命题函项毕竟是不同的命题函项； φ 等价于 ψ 但“埃庇米尼得斯断言 φ”未必等价与“埃庇米尼得斯断言 ψ”。这个区分是分枝

类型论得以避免语义悖论的基础。[1]我们马上将看到，某种程度上，它也是 **L** 分层结构构造背后关键的直观。

3 可构成集

根据索洛维(Solovay, 1995)报告哥德尔大约在 1937 年到 1938 年期间发现了连续统假设的一致性证明即定理 B.26。我们将在 ZFC 中复述证明其中对可构成集类 **L** 的构造。

3.1 集合论中的一致性证明

我们关于一阶逻辑和集合论的证明都可以看作 ZF 中的证明（或一组证明）。而由于哥德尔第二不完全性定理，如果我们假设 ZF 是真的（一个哲学信念），那么我们就不能希望在 ZF 或它的任何扩张理论 ST 中对 ZF 或 ST 有一个一致性证明。因此我们只能选择不相信 ZF 真，放弃一切另寻他途；或者相信 ZF 真，从而只能希望一种相对一致性证明。即证明，"如果 ZF 一致，那么 ZF 加某些公理仍保持一致"。我们将更严格地解释这句命题。

哥德尔完全性定理（可靠性）方向提示我们，证明一致性的方法是通过构造模型。

我们在对公式 φ 递归定义它在类（也即公式）M 下的相对化：

定义 3.1

$$\begin{array}{ll} (x=y)^{\mathbf{M}} & \text{即 } x=y; \\ (x\in y)^{\mathbf{M}} & \text{即 } x\in y; \\ (\neg\varphi)^{\mathbf{M}} & \text{即 } \neg(\varphi)^{\mathbf{M}}; \\ (\varphi\wedge\psi)^{\mathbf{M}} & \text{即 } \varphi^{\mathbf{M}}\wedge\psi^{\mathbf{M}}; \\ (\exists x\varphi)^{\mathbf{M}} & \text{即 } \exists x(x\in\mathbf{M}\wedge\varphi^{\mathbf{M}}). \end{array}$$

哥德尔完全性定理（可靠性方向）在这里可以表述为如下形式：

定理 3.2 *对集合论语言句子集 S,T、类 $\mathbf{M}$，如果 $S\vdash\varphi$，那么 $T\vdash S^{\mathbf{M}}$ 蕴含 $T\vdash\varphi^{\mathbf{M}}$。即*

$$\mathrm{ZF}\vdash \mathrm{Prb}_{\ulcorner S\urcorner}\ulcorner\varphi\urcorner\rightarrow\mathrm{Prb}_{\ulcorner T\urcorner}\ulcorner S^{\mathbf{M}}\urcorner\rightarrow\mathrm{Prb}_{\ulcorner T\urcorner}\ulcorner\varphi^{\mathbf{M}}\urcorner。[2]$$

[1]"最小不可定义序数"悖论会不会再次出现？"最小一阶不可定义序数"是一个二阶函项，它有一个一阶的等价函项，该一阶函项定义了该序数。

[2] 我们关于一阶逻辑与一阶理论的元定理都可以看作是集合论的内定理或定理集。这是因为我们可以把一阶逻辑的语法和语义中的对象看作特定的集合。典型的例子就是哥德尔不完全性定理证明中将一阶语言中的符号、表达式、公式集、证明序列等定义为自然数 (哥德尔数)和自然

证明　假设 $S \vdash \varphi$ 且 $T \vdash S^{\mathbf{M}}$，我们对 $S \vdash \varphi$ 的证明序列归纳证明 $T \vdash \varphi^{\mathbf{M}}$。

如果 φ 是一阶公理，例如

$$\varphi = \forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)。 \tag{3.1.1}$$

那么

$$\varphi^{\mathbf{M}} = \forall x\big(\mathbf{M}(x) \to (\alpha \to \beta)\big) \to \big(\forall x(\mathbf{M}(x) \to \alpha) \to \forall x(\mathbf{M}(x) \to \beta)\big)。$$

由于

$$\forall x\Big[\big(\mathbf{M}(x) \to (\alpha \to \beta)\big) \to \Big(\big(\mathbf{M}(x) \to \alpha\big) \to \big(\mathbf{M}(x) \to \beta\big)\Big)\Big]$$

是公理。由 (3.1.1) 分离，可得

$$\vdash \forall x\big(\mathbf{M}(x) \to (\alpha \to \beta)\big) \to \forall x\Big(\big(\mathbf{M}(x) \to \alpha\big) \to \big(\mathbf{M}(x) \to \beta\big)\Big)。$$

注意

$$\forall x\Big(\big(\mathbf{M}(x) \to \alpha\big) \to \big(\mathbf{M}(x) \to \beta\big)\Big) \to \big(\forall x(\mathbf{M}(x) \to \alpha) \to \forall x(\mathbf{M}(x) \to \beta)\big)$$

有形式 (3.1.1)。再利用重言式、分离规则可得 $\vdash \varphi^{\mathbf{M}}$。

对其余一阶公理也类似可证。

如果 $\varphi \in S$，则由 $T \vdash S^{\mathbf{M}}$ 得证。

如果 $S \vdash \psi$ 且 $S \vdash \psi \to \varphi$。则由归纳假设，$T \vdash \psi^{\mathbf{M}}$ 且 $T \vdash (\psi \to \varphi)^{\mathbf{M}}$。而 $(\psi \to \varphi)^{\mathbf{M}} = \psi^{\mathbf{M}} \to \varphi^{\mathbf{M}}$。由分离即可得 $T \vdash \varphi^{\mathbf{M}}$。 □

可靠性定理的另一个形式在这里表示为：

引理 3.3　对集合论语言句子集 S, T、类 $\mathbf{M}$，如果由 T 可证明 $S^{\mathbf{M}}$，则 T 一致蕴含 S 一致。即

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Prb}_{\ulcorner T \urcorner} \ulcorner S^{\mathbf{M}} \urcorner \to \mathrm{Cons}(\ulcorner T \urcorner) \to \mathrm{Cons}(\ulcorner S \urcorner)。 \tag{3.1.2}$$

证明　假设 S 不一致，即 $S \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$。又，$T \vdash S^{\mathbf{M}}$，由定理 3.2，$T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)^{\mathbf{M}}$。故 T 不一致。 □

数集等。在集合论中，我们有更大的选择余地。我们可以把集合论一阶语言的初始符号定义为任意一类集合，只要求它们彼此不是子序列关系。我们不妨就把初始符号定义为自然数，例如令 $\ulcorner\forall\urcorner = 0, \ulcorner \in \urcorner = 2, \ldots$ (本文中，我们用 $\ulcorner\urcorner$ 表示语言对象对应的集合)。我们定义表达式为符号序列，一阶公式和句子是满足特定集合论条件的表达式，而证明是满足特定条件的公式序列。更详细的说明在比较严格的一阶逻辑教材中都可以找到。一个值得说明的事实是，ZF 是具有反身性 (reflection property) 的一阶理论。即，如果 $\mathrm{ZF} \vdash \varphi$，则 $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Prb}_{\ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner} \ulcorner \varphi \urcorner$。

注意，我们在一阶逻辑中熟悉的可靠性定理，可以表示为[1]

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall m \forall \ulcorner S \urcorner \big(\mathrm{Sat}(m, \ulcorner S \urcorner) \to \mathrm{Cons}(\ulcorner S \urcorner)\big)。 \tag{3.1.3}$$

我们可以在 ZF 中证明 $\mathrm{ZF}^{\mathbf{L}}$，即 $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{ZF}^{\mathbf{L}}$，也即 $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Prb}_{\ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner} \ulcorner \mathrm{ZF}^{\mathbf{L}} \urcorner$。但我们没有类似 $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Sat}(m, \ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner)$的结果。因此，我们并没有证明 $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Cons}(\ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner)$。我还是不清楚 (3.1.2) 与 (3.1.3) 之间的关系。根据 (Jech, 2002)[162] (12.16)，对集合论公式 φ, M, E (其中 M 定义了集合 $\ulcorner M \urcorner$， E 定义了 M 上二元关系) 我们可归纳证明：[2]

$$\mathrm{ZF} \vdash \varphi^{M,E}(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \mathrm{Sat}\left((\ulcorner M \urcorner, \ulcorner E \urcorner, [a_1, \dots, a_n]), \ulcorner \varphi \urcorner\right)。 \tag{3.1.4}$$

但如果 S 是无穷句子集 (如 ZF)，我们不能有

$$\mathrm{ZF} \vdash S^{M,E}(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \mathrm{Sat}\left((\ulcorner M \urcorner, \ulcorner E \urcorner, [a_1, \dots, a_n]), \ulcorner S \urcorner\right)。 \tag{3.1.5}$$

因为 $S^{M,E}$ 是一个无穷句子集，不是集合论语言中的句子。这似乎表明了 ZF 不可有穷公理化。

接下来我们就可以在 ZF 中证明： $(\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH})^{\mathbf{L}}$，其中 $\mathbf{L}$ 即可构成集类。我们将定义可构成集类 $\mathbf{L}$，而其后的相对一致性证明将在附录中列出。

3.2 定义可构成集类 L

首先，我们希望在集合论中定义“可定义性”的集合类。

在模型论中，我们说公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 定义了集合论结构 (M, E) 中的 n 元关系 R，当且仅当 $R = \left\{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \,\middle|\, \models_{(M,E)} \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]\right\}$。某个 M 上 n 元关系可定义，当且仅当存在满足前述条件的公式 φ 定义它。

在集合论中，我们说公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 定义了集合 R，即 $\exists y\big(y = R \wedge y = \left\{(x_1, \dots, x_n) \,\middle|\, \varphi(x_1, \dots, x_n)\right\}\big)$ 是集合论定理。对类 $\mathbf{R}$，我们说公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 定义了 n 元关系 $\mathbf{R}$ (即公式 $\psi(x_1, \dots, x_n)$) 即 $\left\{(x_1, \dots, x_n) \,\middle|\, \varphi(x_1, \dots, x_n)\right\} = \mathbf{R}$ 也即 $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)$ 是集合论定理。我们说一个集合 R 可定义，即存在公式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 定义它。

假设在集合论 (如 ZF) 中我们定义“可定义的”集合类为 $\mathbf{D}$。我们知道，由于语言可数， $\mathbf{D}$ 是一个可数集合。而序数类 $\mathbf{ON}$ 是真类。因此总有不可定义的序数。再由序数是良序的，那就有公式 Φ 定义了 第一个不可定义的序数 $\alpha \notin \mathbf{D}$。即 $\exists y\Big(y = \alpha \wedge \forall x\big(x \in y \leftrightarrow \Phi(x)\big)\Big)$ 是 ZF 的定理。又由 ZF 的返身性， $\alpha \in \mathbf{D}$ 是 ZF 定理。于是 ZF 矛盾。

[1]为方便起见，我们令变元 m 隐含地表示该变元取值范围是“集合论语言的结构”。

[2]$[a_1, \dots, a_n]$ 表示任意一个把 v_i 映射到 a_i $(1 \le i \le n)$的 (M, E) 赋值函数。

因此，如果我们相信 ZF 是一致的，我们不能指望在其中定义“可定义”。我们只能希望定义相对的可定义。

首先，我们递归定义集合上 3 元运算 En：

定义 3.4

$$\mathrm{En}(f,A,n)=\begin{cases}\{s\in A^n \mid s(i)=s(j)\} & \text{if } f=\ulcorner v_i=v_j\urcorner,\\ \{s\in A^n \mid s(i)\in s(j)\} & \text{if } f=\ulcorner v_i\in v_j\urcorner,\\ A^n\setminus \mathrm{En}(\ulcorner\beta\urcorner,A,n) & \text{if } f=\ulcorner(\neg\beta)\urcorner,\\ \mathrm{En}(\ulcorner\beta\urcorner,A,n)\cap\mathrm{En}(\ulcorner\gamma\urcorner,A,n) & \text{if } f=\ulcorner\beta\wedge\gamma\urcorner,\\ \{s\in A^n \mid \exists t\in\mathrm{En}(\ulcorner\beta\urcorner,A,n+1)(t\restriction n=s)\} & \text{if } f=\ulcorner\exists v_{n+1}\beta\urcorner,\\ \emptyset & \text{Otherwise.}\end{cases}$$

直观上，$\mathrm{En}(\ulcorner\varphi\urcorner,A,n)$ 表示公式 φ 在集合论模型 $(A,\in)$ 上定义的 n 元关系定义。

定义 3.5 $\mathrm{Df}(A,n)=\{\mathrm{En}(f,A,n)\mid f\in Form\}$。

其中 $Form$ 表示公式 (作为集合) 的集合，它是一个可数集合。因此我们也可以用自然数列举所有 $f\in Form$。

下述定理 (组) 说明，$\mathrm{Df}(A,n)$ 确实包含了所有在 A 可由集合论公式到 A 的相对化定义的 n 元关系。

引理 3.6 对任意至多含自由变元 $x_1,\dots,x_n$ 的公式 φ，有以下定理:

$$\forall A\big[\{s\in A^n|\varphi^A(s(1),\dots,s(n))\}\in\mathrm{Df}(A,n)\big]。$$

证明 对公式 φ 长度归纳： □

定义 3.7

$$\mathcal{D}(A)=\{X\subseteq A \mid \exists n\in\omega\exists s\in A^n\exists R\in\mathrm{Df}(A,n+1)[X=\{x\in A|s^\frown\langle x\rangle\in R\}]\}。$$

直观上，$\mathcal{D}(A)$ 指的是通过利用 A 中元素 (作为常元) 的集合论公式在 A 中的相对化定义的 A 的子集。利用引理 3.6，我们可以证明下述定理。

引理 3.8 对任意至多含自由变元 $v_1,\dots,v_k,x$ 的公式 φ，有以下定理:

$$\forall A\forall v_1,\dots,v_k\in A\big[\{x\in A|\varphi^A(v_1,\dots,v_k,x)\}\in\mathcal{D}(A)\big]。$$

最后，可构成集类的定义如下。

定义 3.9 对 $\alpha \in \mathbf{ON}$ 递归定义 $L(\alpha)$:

(a) $L(0)=\emptyset$。

(b) $L(\alpha+1)=\mathcal{D}(L(\alpha))$。

(c) 对极限序数，$L(\alpha)=\bigcup_{\delta<\alpha} L(\delta)$。

定义 $\mathbf{L}=\bigcup\{L(\alpha)|\alpha \in \mathbf{ON}\}$。

可以看出所谓"可构成"只是指对后继序数 $\alpha+1$，$L(\alpha)+1$ 中元素是 $L(\alpha)$ 的通过利用其中元素的集合论公式在 $L(\alpha)$ 下相对化可定义的子集。但实际上"可构成集"并不是构造主义意义上可以构造出来的，我们将在后面详述。

4 从分枝类型谱系到可构成集类

4.1 对分枝类型谱系的重新定义

为了比较分枝类型谱系与哥德尔的可构成类，我们必须把分枝类型谱系纳入集合论的视野讨论。为此，我们要对分枝类型谱系进行改造。但也不能随意改造，而必须保留其中的核心想法。对此，我列出下列改造原则并为之辩护。

第一条，回到外延。在集合论中，我们只考虑对象的外延。因此，我们把分枝类型谱系中的对象与集合对应起来就是把那些对象的外延性质抽象出来，而不考虑其他因素。以后，我们将只考虑公式定义的类，而不关心公式本身。

第二条，回到集合论的一阶语言。我们知道分支类型论中的命题函项可以是一阶或高阶的公式，但集合论是一个一阶理论，而可构成集类定义中涉及的公式也是指一阶公式。更重要的是，对分枝类型论中的函项，我们可以找到集合论中对应公式，使两者在直观上表达相同意思。例如，一个二阶函项 $\forall P(Px)$ 可以对应为 $x \in T_n \wedge \forall y \in T_{n+1}(x \in y)=\big(x \in T_n \wedge \forall y(x \in y)\big)^{T_{n+1}}$，其中 T_n, T_{n+1} 是类型。

第三条，类型应该是向下兼容的。即较高类型应该包含较低类型。罗素在描述分枝类型谱系的时候没有明确指出类型是否向下兼容。但类型的向下兼容应该符合罗素无类理论的原则，即不预设类的存在，只通过命题函项的逐层构造来产生所需数学对象。另外，这条原则也是第一条原则的自然结果。我们有理由认为，一阶函项定义的类，在二阶函项中也可以定义。

下面我们基于以上原则，在给出类型谱系的重新定义。

定义 4.1 (a) $T_0=\emptyset$;

(b) $P \in T_{n+1}$ 当且仅当有公式 $\varphi(v_1,\ldots,v_k,x)$ 和 T_n 中元素 $a_1,\ldots,a_k$ 使得，$P=\big\{x \in T_n \bigm| \varphi^{T_n}(a_1,\ldots,a_k,x)\big\}$。

为方便起见，我们令个体域为空集。事实上，我们以后可以证明任意两个有穷个体域的谱系可以相互同构嵌入。显然，对所有 T_n 中只含有集合，这符合第一条改造原则。我们这里所涉及到的公式 φ 或 φ^{T_n} 都是集合论语言 (加入常量符号) 的一阶公式。并且可以证明，对任意 $n \leq m$，$T_n \subseteq T_m$。

值得注意的是，上述定义中保留了分枝类型谱系的核心内容。我们要求 T_{n+1} 中的集合 $P = \{x \in T_n \mid \varphi^{T_n}(a_1, \ldots, a_k, x)\}$，即 P 必须确实是某个命题函项的外延。其中 $x \in T_n$ 是要求该命题函项的自由变元取值范围是类型 T_n (如果类型不向下兼容就是指类型 n 及以下的所有类型)，而使用 φ 的相对化 φ^{T_n} 体现了对约束变元取值范围的限制。

4.2 分枝类型谱系与可构成集的对应

定理 4.2 对任意自然数 n，$T_n = L(n)$。[1]

证明 $L(n)$ 定义参见定义B.4。我们对 n 归纳证明：

I. $T_0 = L(0) = 0$。

II. 根据归纳假设，只需证 $T_{n+1} = \mathcal{D}(T_n)$。对任意 $P \in T_{n+1}$，根据定义??及引理B.2可得 $P \in \mathcal{D}(T_n)$。对任意 $P \in \mathcal{D}(T_n)$，由定义B.1，存在 $\langle a_1, \ldots, a_k\rangle \in T_n^k$ 存在 $R \in \mathrm{Df}(T_n, k+1)$ 满足 $P = \{x \in T_n | \langle a_1, \ldots, a_k, x\rangle \in R\}$。$R \in \mathrm{Df}(T_n, k+1)$ 即存在 $m = \sharp\varphi$ 满足 $R = \mathrm{En}(m, T_n, k+1)$。根据定义A.39，$P = \{x \in T_n | \varphi^{T_n}(a_1, \ldots, a_k, x)\}$。因此 $P \in T_{n+1}$。□

由上述定理容易得，分枝类型谱系 $\mathbb{T} = \bigcup_{n\in\omega} T_n = L(\omega)$。下面我们将证明，$\mathbb{T} = L(\omega) = R(\omega)$。

引理 4.3 $\forall X \subseteq A\big(\mathrm{card}(X) < \omega \to X \in \mathcal{D}(A)\big)$。

证明 首先证明，

$$R, S \in \mathrm{Df}(A, n+1) \to R \cup S \in \mathrm{Df}(A, n+1)。\tag{4.2.1}$$

由定义A.39，$R, S \in \mathrm{Df}(A, n+1)$ 即存在 $m_1 = \sharp\varphi_1(v_0, \ldots, v_n), m_2 = \sharp\varphi_2(v_0, \ldots, v_n)$ 满足 $R = \{t \in A^{n+1} | \varphi_1^A(v_0, \ldots, v_n)\}$ 和 $S = \{t \in A^{n+1} | \varphi_2^A(v_0, \ldots, v_n)\}$。则 $R \cup S = \{t \in A^{n+1} | \big(\varphi_1(v_0, \ldots, v_n) \vee \varphi_2(v_0, \ldots, v_n)\big)^A\} \in \mathrm{Df}(A, n+1)$。

[1] 注意，严格地说该定理不是集合论的定理或定理组。因为，定义 4.1也不是一个严格的集合论定义。如果 φ 作为我们所使用的集合论语言中的公式出现，如 $Y = \{x \mid \varphi(x)\}$ 即 $\forall x\big(x \in Y \leftrightarrow \varphi(x)\big)$，我们在该 (有穷) 集合论语言中说不出“存在公式 φ”，也不能像“所有公式 φ”那样处理成命题集合。我们要在形式语言中严格地说出这样的话，只能把公式 φ 处理成对象 $\ulcorner\varphi\urcorner$，就像定义 3.4 - 3.7 中所做的那样。这样看的话该定理就是说 T_n 的严格定义就是 $L(n)$ 的定义。

再对 $m \leq n$ 归纳证明：

$$E_n^m = \big\{t \in A^{n+1} | \exists i \leq m\big(t(i) = t(n)\big)\big\} \in \ \mathrm{Df}(A, n+1)。 \tag{4.2.2}$$

E_n^m 是 A 上的 $n+1$ 关系，表示其中前 m 个对象中有与第 $n+1$ 个对象相同的。
I. $E_n^0 =$

$$\big\{t \in A^{n+1} | \exists i < 0\big(t(i) = t(n)\big)\big\} = \emptyset = \{t \in A^{n+1} | (v_0 \neq v_0)^A\} \in \ \mathrm{Df}(A, n+1)。$$

II. $E_n^{m+1} = \big\{t \in A^{n+1} | \exists i \leq m+1\big(t(i) = t(n)\big)\big\} = E_n^m \cup \big\{t \in A^{n+1} | t(m) = t(n)\big\}$。其中 $\big\{t \in A^{n+1} | t(m) = t(n)\big\} = \big\{t \in A^{n+1} | (v_m = v_n)^A\big\} \in \ \mathrm{Df}(A, n+1)$。而根据归纳假设，$E_n^m \in \ \mathrm{Df}(A, n+1)$。由(4.2.1)，$E_n^{m+1} \in \ \mathrm{Df}(A, n+1)$。

故(4.2.2)得证。又由定义B.1，对任意 $s \in A^n$ 有

$$\mathrm{ran}(s) = \{x \in A | s^\frown\langle x\rangle \in E_n^n\} \in \mathcal{D}(A)$$

$\mathrm{ran}(s)$ 表示序列 s 中出现的 A 中元素。那么，对任意 $X \subseteq A$，若 $\mathrm{card}(X) < \omega$，不妨设 $\mathrm{card}(X) = n$，则存在 $s \in A^n$ 满足 $X = \mathrm{ran}(s) \in \mathcal{D}(A)$。 □

定理 4.4 (a) $\forall n \in \omega\big(L(n) = R(n)\big)$。
(b) $\mathbb{T} = L(\omega) = R(\omega)$。

证明 对自然数 n 归纳证 $\mathrm{card}(L(n)) < \omega$ 且 (a)：
I. $n = 0$。$L(0) = R(0) = 0$ (参见定义A.18及B.4)。
II. 由归纳假设，$\mathrm{card}(L(n)) < \omega$。由定义B.1，$L(n+1) = \mathcal{D}(L(n)) \subseteq \mathcal{P}(L(n))$。则 $\mathrm{card}(L(n+1)) \leq 2^{\mathrm{card}(L(n))} < \omega$。由归纳假设，$L(n) = R(n)$，故只需证 $L(n+1) = \mathcal{P}(L(n))$。已有 $L(n+1) \subseteq \mathcal{P}(L(n))$。对任意 $X \in \mathcal{P}(L(n))$ (即 $X \subseteq L(n)$)，$\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(L(n)) < \omega$，又由引理4.3得 $X \in \mathcal{D}(L(n)) = L(n+1)$。故 $\mathcal{P}(L(n)) \subseteq L(n+1)$。

(b)是(a)的平凡推论。 □

在继续后面的讨论之前，我们先回过头来证明在构造 T_{n+1} 的过程中，我们不必引用 T_n 中的元素参与定义。

定理 4.5 对任意 $A \in R(n+1)$ 存在公式 $\varphi(x)$ 满足 $A = \big\{x \in R(n) | \varphi^{R(n)}(x)\big\}$。

证明 $\mathrm{card}(R(n)) < \omega$，不妨设 $R(n) = \{a_0, \ldots, a_m\}$。$A \subseteq R(n)$，不妨设 $A = \{a_i | i \in I\}$ $(I \subseteq m+1)$。对任意 $i, j \in m+1$ 令

$$\theta_{ij} = \begin{cases} v_i \in v_j & \text{若 } a_i \in a_j; \\ v_i \notin v_j & \text{否则。} \end{cases}$$

令 $\varphi_I(x) =$

$$\exists v_0,\ldots,v_m\Big(\bigwedge_{\substack{i\in m+1\\ j\in m+1}}\theta_{ij}\wedge\bigvee_{k\in I}x=v_k\Big)。$$

可以验证 $A=\{a_i|i\in I\}=\big\{x\in R(n)|\varphi_I^{R(n)}(x)\big\}$

$$=\Big\{x\in R(n)\;\Big|\;\exists v_0,\ldots,v_m\in R(n)\Big(\bigwedge_{\substack{i\in m+1\\ j\in m+1}}\theta_{ij}\wedge\bigvee_{k\in I}x=v_k\Big)\Big\}。\qquad\square$$

以上，我们证明了 (以空集为个体域的) 分枝类型谱系经过外延化改造所得结构 $\mathbb{T}$ 就是所有有穷可构成集的类 $L(\omega)$。而 $L(\omega)=R(\omega)=\mathbf{S}$。因此一个有穷个体域[1]的分枝类型谱系外延化后即坍塌为简单类型谱系。这个结果并不令人意外，因为分枝类型论本就是无类理论的具体化。但这个结果仍然令人沮丧，分枝类型论外延化后似乎完全失去了魅力，我们很难看到它能提供什么比简单类型论更多的对集合论 (将一切外延化的理论) 研究的启发。然而，当我们抛开枷锁，将分枝类型谱系的构造推广至超穷阶后，将会有惊喜等待着我们。

将分枝类型谱系扩展的超穷阶的关键步骤是允许 $\mathbb{T}=\bigcup_{n\in\omega}T_n$ 作为一个类型，不妨令 $T_\omega=\mathbb{T}$。这样，我们就可以用类似定义??的方法继续构造 $T_{\omega+1},T_{\omega+2},\ldots$。在遇到下一个极限序数 $\omega+\omega$ 时，类似地令 $T_{\omega+\omega}=\bigcup_{\alpha<\omega+\omega}T_\alpha$。我们定义分枝类型谱系推广至任意序数阶的结构如下：

定义 4.6 (a) $T_0=\emptyset$。

(b) $T_{\alpha+1}=$

$$\Big\{P\subseteq T_\alpha\;\Big|\;\exists n\in\omega\,\exists a_1,\ldots,a_n\in T_\alpha\text{ 且存在集合论公式 }\varphi(v_1,\ldots,v_n,x)$$
$$\text{使 }\big(P=\{x\in T_n|\varphi^{T_n}(a_1,\ldots,a_n,x)\}\big)\Big\}。$$

(c) 对极限序数 α，令 $T_\alpha=\bigcup_{\delta<\alpha}T_\delta$。

类似定理4.2，我们可以证明若 $T_\alpha=L(\alpha)$，则 $T_{\alpha+1}=L(\alpha+1)$。而极限序数的情况是平凡的。因此我们有

定理 4.7 (a) 对任意序数 α，$T_\alpha=L(\alpha)$。

(b) $\mathbf{T}=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}}T_\alpha=\mathbf{L}$。

后面的讨论中，我们可以方便地以 $L(\alpha)$、$\mathbf{L}$ 代替 T_α 和 $\mathbf{T}$，因为前者与后者是同样的东西。

如果我们将 $R(\alpha)$ (对任意 $\alpha\in\mathbf{ON}$)看作简单类型谱系在任意序数阶上的扩张，那么我们会发现在一些超穷阶上外延化后的分枝类型谱系与简单类型谱系有所不同。

[1]可以证明有穷个体域的类型谱系是以空集为个体域的类型谱系的子结构。

定理 4.8 对任意 $\alpha \geq \omega$ 有：(a) $L(\alpha) \subseteq R(\alpha)$; (b) $\mathrm{card}(L(\alpha+1)) < \mathrm{card}(R(\alpha+1))$。

证明 我们对 $\alpha \geq \omega$ 归纳，同时证明 (a)、(b)：

I. $\alpha = \omega$。见定理4.4。

II. 由归纳假设，$L(\alpha) \subseteq R(\alpha)$。由引理B.3，$L(\alpha+1) = \mathcal{D}(L(\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(L(\alpha)) \subseteq \mathcal{P}(R(\alpha)) = R(\alpha+1)$。由引理B.9，$\mathrm{card}(L(\alpha+1)) = \mathrm{card}(\alpha+1) = \mathrm{card}(\alpha) = \mathrm{card}(L(\alpha))$。而 $\mathrm{card}(R(\alpha+1)) = \mathrm{card}\big(\mathcal{P}(R(\alpha))\big) > \mathrm{card}(R(\alpha))$ (参见定理A.16)。又由 $L(\alpha) \subseteq R(\alpha)$ 得 $\mathrm{card}(R(\alpha)) \geq \mathrm{card}(L(\alpha))$。因此，$\mathrm{card}(R(\alpha+1)) > \mathrm{card}(L(\alpha+1))$。

III. α 是极限序数。由归纳假设，对任意 $\delta < \alpha$ 有 $L(\delta) \subseteq R(\alpha)$。故，$L(\alpha) = \bigcup_{\delta<\alpha} L(\delta) \subseteq \bigcup_{\delta<\alpha} R(\delta) = R(\alpha)$。 □

因此，在无穷后继序数 $\alpha+1$ 阶，存在一些 $R(\alpha+1)$ 中的元素不在 $L(\alpha+1)$ 中。这是因为，在 $L(\alpha+1)$ 的构造中只允许那些能够在 $L(\alpha)$ 中被有穷长度的公式 (可运用 $L(\alpha)$ 中所有元素作为常项) 定义的对象。而这些在扩充了的语言中的公式至多有 $\mathrm{card}(L(\alpha))$。需要注意的是，进入无穷后，在构造 $L(\alpha+1)$ 的过程中，$L(\alpha)$ 中元素作为常项充实到语言中是必须的。类似定理4.5的结果是没有的，否则形成的结构将过于单薄以至于 ZF 无法在其中成立。

虽然，分枝类型谱系与简单类型谱系的超穷扩张在具体阶上有所不同，但我们并不确定所有分枝类型谱系与简单类型谱系超穷扩张中的合法对象是否相同。定理B.10与B.14 表明 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ 与 ZF 是一致的 (如果 ZF 一致的话)。参见定理A.20，由于我们都是在 ZF 下讨论，$\mathbf{V}$ 即 $\mathbf{WF}$。因此，如果 ZF 一致，我们无法得出存在不可构成集，也即无法 (由 ZF) 证明有简单类型谱系 (超穷扩张) 中对象不是分枝类型谱系中对象。同时，如果 ZF 一致，ZF+$\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ 也一致。[1]即我们无法证明所有集合都是可构成的，也即无法证明所有简单类型谱系 (超穷扩张) 中的对象都在分枝类型谱系中出现。

接下来，我们讨论分枝类型论中直谓函项与可化归公理在可构成集类中的体现。分枝类型论中直谓函项与跨 n 阶谓述函项的定义参见定义??及??。我们将该定义对应到外延化并推广到任意序数阶的分枝类型谱系结构 (即 $\mathbf{L}$) 中即可得：

定义 4.9 可构成集 A 是跨 β 阶可构成的，当且仅当存在 α 满足：$A \subseteq L(\alpha)$ 且 $\forall\delta < \alpha(A \not\subseteq L(\delta))$ 且 $A \in L(\alpha+\beta+1)$ [2]

容易看出，一个集合是跨 β 阶可构成的，则对任意 $\gamma \geq \beta$，由于 $L(\alpha+\beta+1) \subseteq L(\alpha+\gamma+1)$ (引理B.5)，它也是跨 γ 阶可构成的。一个函项是直谓的即它所对应

[1]这一结果由科恩通过力迫法证明，参见(?)及(Kunen, 1980)[203]。

[2]序数加法定义见定义A.9。连加采取左优先。

的类是跨 0 阶可构成的集合。相应地，可化归公理可表示为：任意可构成集都是跨 0 阶可构成的。

定理 4.10 *所有 $L(\omega)$ 中集合都是跨 0 阶可构成的。*

证明 对任意 $A \in L(\omega)$，取最小的 $m \in \omega$ 使 $A \subseteq L(m)$。根据 $L(\omega)$ 定义及序数序是良序，该 m 总能取到。故对任意 $k < m$ 有 $A \nsubseteq L(k)$。由定理4.4，$A \in \mathcal{P}(L(m)) = \mathcal{P}(R(m)) = R(m+1) = L(m+1)$。 □

因此，如果我们将 (外延化的) 分枝类型谱系限制在有穷部分，可化归公理是正确的。但这一结果过于平凡，显得味如嚼蜡。然而，当我们再次进入无穷，我们又会发现一幅有趣的图景。

定理 4.11 *对任意 $\alpha \geq \omega$，任意 $\beta < \alpha^+$，存在 $x \in \mathbf{L}$ 使得 $x \subseteq L(\alpha)$ 且 $x \notin L(\alpha + \beta + 1)$。*

证明 给定 $\alpha \geq \omega$，$\beta < \alpha^+$ (α^+ 定义参见A.17)。

$\beta < \alpha^+$ 且 $\alpha \geq \omega$，故 $\mathrm{card}(\beta + \alpha + 1) = \mathrm{card}(\alpha)$ (参见定理A.15)。由定理B.9， $\mathrm{card}(L(\alpha + \beta + 1)) = \mathrm{card}(\alpha + \beta + 1) = \mathrm{card}(\alpha) = \mathrm{card}(L(\alpha))$。由定理A.16，$\mathrm{card}\big(\mathcal{P}(L(\alpha))\big) > \mathrm{card}(L(\alpha)) = \mathrm{card}(L(\alpha+\beta+1))$。因此 $L(\alpha+\beta+1) = \mathcal{D}(L(\alpha)) \subsetneq \mathcal{P}(L(\alpha))$。即

$$\exists x\big(x \subseteq L(\alpha) \wedge x \notin L(\alpha + \beta + 1)\big) \tag{4.2.3}$$

以上只用到 ZFC 中有穷公理。而由定理B.10及推论B.25，ZFC 在 $\mathbf{L}$ 中真。故 $(4.2.3)^{\mathbf{L}}$。又 $\mathbf{L}$ 是传递的 (参见定理B.5)，再由定理A.35及引理B.13， $L(\alpha)$、$X \subseteq Y$、$\alpha + \beta$ 对 $\mathbf{L}$ 是绝对的。因此

$$\exists x \in \mathbf{L}\big(x \subseteq L(\alpha) \wedge x \notin L(\alpha + \beta + 1)\big)。$$ □

上述定理说的是，对任意 $\alpha \geq \omega$，任意 $\beta < \alpha^+$ 存在 $L(\alpha)$ 的可构成子集不是跨 β 阶可构成的。这就是说，可化归公理在超穷阶上是假的。但有趣的是，哥德尔发现 $L(\alpha)$ 的可构成子集在分枝类型谱系上的分布有一个不远的上界。这就是定理B.23。接近于哥德尔原始陈述的等价形式是

定理 4.12 *对任意 $\alpha \geq \omega$ 任意 $X \in \mathbf{L}$，若 $X \subseteq L(\alpha)$，则存在 $\beta < \alpha^+$，有 $X \in L(\beta)$。*

正如我们在附录B中所见，该定理在哥德尔基于 $\mathbf{L}$ 的一致性证明中处于核心地位(Gödel, 1938)[26]。哥德尔称该命题是他证明的“基础定理” (fundamental theorem)，并称“该基础理论包含了所谓罗素的可化归公理的正确的核心” (Gödel,

1939)[143]。哥德尔这么看是有道理的。如果我们稍加放宽可化归公理的要求，让某一阶所有可构成子集不必在下一 (序数) 阶就被构成，而必须在下一基数前出现，那么它将在整个 **L** 上真。事实上这一形式的可化归公理已足够强，以至于如果所有的集合都是可构成的话，广义连续统假设就是真的了 (参见推论B.24)。

以上分析显示了分枝类型论与哥德尔的可构成集之间的紧密联系。我们只需对分枝类型论做外延化改造，将命题函项理解为集合，自然地允许类型的向下包含，并将其构造推广至任意序数阶，我们就得到了 **L**。而可化归公理的一个弱的 (考虑基数的) 形式在 **L** 中非平凡地成立，并且是使 GCH 在 **L** 中成立的根本原因。应该说，索洛维的意见是准确且全面的，但这并不妨碍哥德尔将可构成集的想法归功于罗素分枝类型论的启发。

4.3 分枝类型论与可构成集背后的哲学思想

本节将在前两节的基础上，回顾分枝类型论与可构成集类的一些差别，并提出造成这些差别的可能的哲学上的考虑。罗素本人避免谈及分枝类型论背后的哲学思想。他在(Russell, 1908)的最后写道:“因此，似乎最好在陈述理论时不涉及哲学问题，而将这些 (问题) 单独处理。” 因此，我们只能从罗素对分枝类型论描述的字里行间中去窥探背后的哲学动机。

首先，分枝谱系与可构成集类一个最明显的区别就是：分枝谱系中的对象是个体和具体的命题及命题函项，而可构成集类作为集合论的一个模型其中的对象只是纯粹的集合。分枝类型论是无类理论的具体实现。无类理论拒绝类或集合作为对象存在，而将它们视作“说话方式”。在不用考虑内涵与具体表达方式的差异时，我们说一个类就是在说某一类外延相同的性质或命题函项中的任何一个。这一想法有较明显的唯名论的痕迹，即只承认个体存在而将共相只看作名词或表达方式 (参见(**?**)[127])。当然，罗素的这一安排更多地是出于解决语义悖论的考虑，但唯名论 (nominalism) 以及相关的构造主义 (constructivism)[1]的思想还会不时地在分枝类型论的其他地方体现出来。

由于在以分枝类型论为基础实际构建数学的过程中起作用的仅仅是性质的外延，罗素在(Russell, 1908)的后半部分 (第VII节到第X节) 基本只使用“类”和“关系”等“说话方式”。因此，在下面的讨论中，T_α 与它们的外延化 $L(\alpha)$ 对我们是等价的 (参见第**??**节)。

接下来，我们简单浏览一下罗素是怎么将数学具体建立在分枝类型论基础上的。罗素对基数的定义与弗雷格类似。他将一个类的数定义为与这个类等数的

[1]为了与关于哥德尔哲学思想的讨论的衔接，这里的构造主义采取哥德尔本人的用法。即要求合法的数学概念必须是能从对个体的谓述开始通过复合、概括等实际构造出来的。参见(Gödel, 1944)1972年版的题注，见于(Gödel, 1990)[119]。

类的类。[1] 0 被定义为与空类等数的类的类；1 定义为与"$=c$"(c 是函项意义域中的一个对象) 等数的类的类。我们大致可以把 $\{\emptyset\}$ 看作 0。但事实上，在 (未外延化的) 分枝类型论中，每一阶中有不同的空函项。一阶的空函项是指没有一个个体所具备的个体的性质，二阶空函项是指没有一个个体的性质所具备的个体的性质的性质。它们有不同的意义，因而不同阶有不同的 0。类似的，一阶的 1 是指 $\{\{a_1\},\{a_2\},\ldots\}$；二阶的 1 指 $\{\{\{a_1\}\},\{\{a_2\}\},\{\{a_1,a_2\}\},\ldots\}$ (其中 a_1,a_2 是个体)。如果 n,m 分别是不相交的类 A,B 的数，罗素定义 $n+m$ 为 $A\cup B$ 的数。如果 n 和 m 是不同阶的基数 (不妨设 n 是较低阶的基数)，我们可以"提升" n 下面类的阶，得到一个与原来的类等数的类。例如，提升 $\{a\}$ 为 $\{\{a\}\}$。在有穷个体域的分枝谱系中，每一阶中的基数是有穷的。例如，$R(1)$ 中类的数只有一个 0。第 $n+2$ 类型中的基数取决于第 n 类型对象的个数。所以有时要同时提升 n,m 的阶再进行加法运算，否则我们无法找到两个不相交的类。当然，由于我们允许任意有穷阶，对任意有穷的 n,m 我们总可以找到足够高的阶能完成它们的加法。因此，常见的数论定理在 $L(\omega)$ 中可以得到。

参见**??**节，我们可以将 $L(\omega)$ (或其一部分) 视为以有穷个体域为基础的分枝类型谱系。这个谱系符合构造主义的要求，我们只需要预设有穷的个体域和一些初等命题函项就可以把 $L(\omega)$ 中的每个集合通过有穷次概括、取补和取交而实际地构造出来。然而，这样的结构并不足以让一些数学对象嵌入其中。例如，$L(\omega)$ 中不存在自然数的无穷类。[2]我们知道，实数往往被定义为自然数的类[3]。因而相当多的实数 (即无穷的自然数类) 不在 $L(\omega)$ 中，关于所有实数的概括成为不可能。因此绝大部分实数理论无法从有穷个体域的分枝类型论中得出。

为此，罗素又引入一条公理：*不存在有穷的个体域子类包含所有个体*(Russell, 1908)。这条公理等价于允许无穷个体域[4]。假设个体域无穷且可化归公理在这里真的话，按照罗素的想法，在第二类型中存在基数为任意自然数的类，第三类型 (二阶函项) 中就可以找到所有的自然数，而所有自然数的集合最晚在第四类型中就全部出现了。[5]

但罗素的这一处理并不是严格地构造主义的。第一，对于无穷个体域的假设在构造主义的立场上看来显得缺乏依据。第二，一个无穷类型的所有子类不一定

[1] "The cardinal number of a class α is defined as the class of all classes *similar* to α," 引自(Russell, 1908)。注意，这里的"类"只是罗素的"说话方式"，"相似"即弗雷格定义的等数，等数可以运用于不同阶的类。

[2]注意，(2.4.1)定义的 $\mathbb{N}$ 不一定是自然数集，而只是某类型中所具有的所有自然数的集合。$L(\omega)$ 中不含有无穷集合，而自然数集 $\mathbb{N}=\omega$ 是无穷的。

[3]例如，戴德金分割将实数定义为有理数 (可一一对应于自然数) 序上的一个向下封闭的开区间。

[4]下文中，无穷个体域一般指可数无穷个体域。

[5]参见(Russell, 1908)。

都是可构造的。最后，可化归公理在无穷个体域的分枝谱系中可能不真。让我们逐个分析。

关于无穷个体域的预设。物理学家总是倾向于认为宇宙是有穷的[1]或者说对于我们有意义的可探知的宇宙是有穷的。如果个体仅指宇宙中的物理对象，那么更有理由认为个体域应该是有穷的。当然，罗素强调分枝类型论中起作用的往往是阶的相对关系，在具体问题中绝对的阶往往难以判断但也不影响问题的解决。因此，完全可以把任意一个类型当作个体域。但我们已经知道，在有穷个体域的基础上无法构造出包含无穷对象的类型。因此，这一对个体域的推广并没有解决问题。

在继续后面的讨论前，我们不妨假设无穷个体域为 $L(\omega)$[2]。为了简化起见，我们还可以改用当代集合论对基数的常见定义 (参见定义A.11)。集合论定义的基数实质上是在罗素或弗雷格定义的基数中取一个唯一确定的类作为代表。而这一代表类的存在是对个体域预设最少的，即无论个体域为何，每个罗素定义的基数下总可以找到一个元素是按照集合论定义的相应的基数。例如，$\{\emptyset\}$ 是按照罗素基数定义的某个 0，而 $\emptyset$ 是按照集合论定义的 0。采取集合论定义的优点在于，我们不需要再区分不同阶的自然数。经过以上简化，我们大致可以将无穷个体域的分枝谱系中可构造的等同于可构成集。

回到前面的讨论。由于我们无法判定 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 的真假，我们不能肯定是否所有自然数的子类最终都能出现在无穷个体域的分枝类型谱系中。如果回答是否定的，那么有些实数无法被构造出来，从而我们就无法对所有实数作概括，以致于相当部分的数学定理失去了意义。即使有肯定的回答，根据定理4.11，一个较强的可化归公理在无穷个体域的分枝谱系中是不成立的。并且，无论我们构造到多高阶，总存在自然数的可构造的类尚未在之前的有穷步内被构造出来。因此，(可数) 无穷个体域的分枝谱系的任何阶都不包含所有可构造的实数，除非我们允许达到 $L(\omega_1)$ (根据定理4.12)。而这要求更强的无穷公理，或者放弃构造主义的立场。

因此，我们可以看到，罗素面对严格的构造主义与经典数学的冲突，选择了引入无穷公理和可化归公理作为妥协。罗素引入这两条与构造主义相悖的公理是希望在其他地方维持构造主义的要求。这体现了英国哲学历来的经济节约的原则。这一原则在尽量减少本体论假设的同时也使理论的推广显得制掣肘重重。

[1]例如爱因斯坦给出的“有穷”而“无界”的宇宙的模型，参见(**?**)[83-86]。

[2]无穷个体域中的个体到底是什么对于分枝谱系的结构并不重要。正如可以证明任意两个有穷个体域的分枝谱系可以互相嵌入，也可以证明任意两个相同基数个体域的分枝谱系总是同构的。根据定理B.9，$L(\omega)$ 的基数是 ω，因而是最小的无穷个体域。将 $L(\omega)$ 作为个体域的另一个好处是，容易看出罗素引入的新公理和集合论无穷公理的联系。集合论中正是由于无穷公理允许 ω 作为一个合法的对象，从而承认 $L(\omega)=\bigcup_{n\in\omega}L(n)$ 也为合法对象。

反之，如果采取哥德尔那样的实在主义观点，允许一些类的存在，虽然在本体论上显得比较激进，但在具体的研究操作上会更加游刃有余。

如果设想命题函项、性质背后确有某种概念或类的存在，无类理论中诸如类型的向下包含、不同阶的基数的处理等问题就会变得简单而直接。

更为重要的是，采取实在主义的观点使我们可以自由地处理那些在严格的构造主义的意义上无法被构造出来的对象。例如上文所提到的自然数集 $\mathbb{N}$ (或 ω)。我们一般将自然数集定义为最小的归纳集[1]。这一定义至少涉及所有的归纳集，而自然数集是归纳集类这个整体的一员。在构造主义者看来，我们只有把一个整体中的每个对象都构造出来了才能提及这个整体。因此，这种根据整体来“构造”其下元素的定义是不允许的。[2]而实在主义者并没有这种约束。既然那个整体不依赖我们而存在，我们通过这个整体来辨别其下某个特别的元素就是十分自然的处理方式了。即使我们还不清楚 $\mathbf{V}$ 中到底有什么东西，它仍可以被看作某种合法的整体 (虽然不是合法的对象)，从而可以直接作为量词的变域。因此，我们所熟悉的集合论的语言可以毫无困难地被看作是对所有集合的言说。在这一解释下，集合论中所有带量词的公式的定义(如 $\emptyset$、ω、ω_1 等)都是非直谓的，但只要它们确实帮我们从所有集合 $\mathbf{V}$ 中辨识出某一个集合或某一类集合，我们就认为它们是合适的。

综上，罗素试图在构造主义的范围内构建分枝谱系乃至整个数学，而在具体的实践上采取了较灵活的态度引入了一些非构造的因素。但在罗素看来，$\mathbf{L}$ 的定义 (参见定义B.4) 是无论如何不可想象的。即使他能通过设置一条无穷公理达到 $L(\omega)$ 或设置更强的无穷公理达到 $L(\omega^+)$ 甚至任意 $L(\alpha)$ ($\alpha \in \mathbf{ON}$)，他也无法让表面变元的变域涵盖整个 $\mathbf{V}$，从而无法定义 $\mathbf{ON}$ 和 $\mathbf{L}$，或认为这一定义完全没有意义。而持实在主义的哥德尔在推广分枝谱系到任意序数阶的过程中完全没有这些困扰，始终可以认为他是在有意义地叙述一些实在的对象，即使这些叙述或假设不一定正确。

5 结论

不同的哲学立场确实会影响到人们对逻辑学、数学等具体学科的研究实践。本文的第二章就具体分析了这样一个案例。构造主义的想法帮助罗素发明了分枝类型论但也禁锢了将这些方法推广至任意序数阶的可能，而持实在主义的哥德尔则无所顾忌地推广了罗素的工作，证明了连续统假设的一致性。对此哥德尔在 1967 年 12 月与王浩的通信中总结道：

[1]归纳集指含有 0 且在后继运算下封闭的集合。参见定义A.2

[2]参见第??页中对恶性循环原则和非直谓定义的讨论。

> 如果一致性证明必须是有穷主义的话，一个人怎么会用我的超穷模型 **L** [1]去作连续统假设的一致性证明呢？(姑且不提按有穷主义观点用 **L** 来解释集合论从一开始就荒谬绝伦，因为这是用本身并无意义的东西去作解释。) 显然，谁也不曾注意到，这样的解释 (及任何非有穷主义的一致性证明) 会产生一个有穷主义的相对一致性证明。[2]

哥德尔的证明当然是有穷的。并且一旦该证明被发现，只要逻辑学家们找不出证明中的逻辑错误，就必须承认证明的结论。即使对构造主义者来说，这一有穷的证明也是有效的，尽管他们可能对它的意义有不同的解释。然而，对构造主义者来说，要通过想象一个对他毫无意义的 **L** 来发现这个证明确是几乎不可能的。这就像一个认为哲学毫无作用的数学家几乎不可能创造一套反映自己思想的哲学理论一样。1968年3月，哥德尔在给王浩的信中进一步雕琢了这一想法：

> 然而，具体说到连续统假设，倒是有一个特殊的障碍真正使得构造主义者在实践上不可能发现我的一致性证明。那就是特意为构造主义宗旨而发明的分枝谱系一定要按全然非构造主义的方式来运用才行。类似的说法也适用于数学真理概念：形式主义者认为形式可证性是数学真理概念的一个分析，所以当然没有本领把二者分开。[3]

上述引文的最后一句指的是另一个由哲学信念的不同导致阻碍或帮助发现某个具体证明的例子。形式主义者相信所谓真就是形式可证。他们希望找到一个完全且一致的有穷公理的理论，而几乎不会去想象证明形式可证的数学命题与真的数学命题之间有本质的差别。而持实在主义观点的哥德尔则很容易想象客观的数学 (在结构中真) 与被认识的数学 (由公理可证) 的分离，这显然有助于发现不完全性定理的证明。

[1]原文中以 Δ 表示可构成集类

[2]引自(王浩, 2002)[255]。这里的有穷主义可能不仅仅指罗素的分枝类型论，还包括希尔伯特的形式主义。在(Gödel, 1940b)中哥德尔提到了基于可构成集的一致性证明与希尔伯特在(?)中叙述的关于连续统假设的证明设想的一些联系。希尔伯特设想的证明当然是错的 (他可能错误地预设了一些前提)，但其中的一些方法可以用来证明连续统假设在可构成集类中真。哥德尔在(Gödel, 1940a)中利用八个基础运算构造可构成集类的证明方法可能就是要显示这一证明与希尔伯特之前工作的联系。哥德尔在1965年给 van Heijenoort 的信 (见于(van Heijenoort, 1967)[369]) 中写到："(我与希尔伯特的证明的) 一个巨大不同在于，希尔伯特只考虑严格的可构成的定义，此外，定义运算的超穷迭代只达到构造的序数 (阶)，而我不仅允许定义中的量词还允许定义运算的迭代达到任意序数 (阶)，无论这些序数能否或怎样被定义。'可构成集' 这一术语在我的证明中只是在非常弱的意义上得到辩护，具体地说，只是在 '相对于序数' 的意义上，而后者完全不是构造的。" 可见希尔伯特的工作之于哥德尔的证明也类似于罗素的分枝类型论与哥德尔的证明之间的关系，同样可以看作本文结论的一个例证。只是限于作者的精力与能力未能使这部分内容像第二章那样成文。

[3]引自(王浩, 2002)[256]；亦见于(Solovay, 1990)。

历史上类似的例子还有很多。虽然，我们很难找到哲学理论与逻辑学、数学等具体学科理论之间的必然联系，但我们通过对一些历史片断的分析不难发现哲学思想对具体学科的研究有着现实的影响。这是本文的结论。对这种影响的现象做经验的研究，归纳其中的规律，或许有助于我们未来在哲学领域和逻辑学、数学等学科领域的研究实践。这是作者尚未完成的写作初衷。

A 一些集合论事实[1]

本附录中，收集了一些集合论的常用定义及基本定理。如非特别说明，本附录中的定理都是以下公理集的逻辑后承：

公理 0 (存在公理)

$$\exists x(x = x)。$$

公理 1 (外延公理)

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)。$$

公理 2 (良基公理)

$$\forall x[\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \to z \notin y))]。$$

公理 3 (分离公理模式) 对每个至多含变元 $x, z, w_1, \ldots, w_n$ 的公式 φ,

$$\forall z \forall w_1 \ldots \forall w_2 \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi))。$$

公理 4 (对集公理)

$$\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$$

公理 5 (并集公理)

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x(x \in Y \to Y \in \mathcal{F} \to x \in A)。$$

公理 6 (替换公理模式) 对每个至多含变元 $x, y, A, w_1, \ldots, w_n$ 的公式 φ,

$$\forall \forall w_1 \ldots \forall w_n[\forall x \in A \exists ! y \varphi \to \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi]。$$

定义 A.1 (a) $x \subseteq y$ 即 $\forall z(z \in x \to z \in y)$。

(b) $x = 0$ 或 $x = \emptyset$ 即 $\forall y(y \notin x)$。

(c) $A = \{x, y\}$ 即 $\forall z(z \in A \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$。

[1]请注意，附录中的内容并非由作者原创。作者只是将 (Kunen, 1980)、(Enderton, 2006) 以及郝兆宽教授的一份尚未发表的讲义中的内容收集起来并整理成文。

(d) $\{x\} = \{x, x\}$。[1]

(e) $A = \bigcup\mathcal{F}$ 即 $\forall x(x \in A \leftrightarrow \exists Y(Y \in F \wedge x \in Y))$；$x \cup y = \bigcup\{x, y\}$；$A = \bigcap\mathcal{F}$ 即 $(\mathcal{F} = \emptyset \wedge A = \emptyset) \vee \forall x(x \in A \leftrightarrow \forall Y(Y \in \mathcal{F} \to x \in Y))$；$x \cap y = \bigcap\{x, y\}$。

(f) $S(x) = x \cup \{x\}$。

(g) $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$；$z$ 是有序对，即 $\exists x, y(z = \langle x, y\rangle)$；$Rxy = xRy = \langle x, y\rangle \in R$

(h) R 是 A 上的线序，即:

$$\forall x, y, z \in A(xRy \to yRz \to xRz) \wedge \forall x, y \in A(xRy \vee x = y \vee yRx) \wedge \forall x \in A(\neg xRx)。$$

R 是 A 上的良序，即 R 是 A 上的线序且

$$\forall Y \subseteq A(Y \neq 0 \to \exists x \in Y \forall y \in Y(\neg yRx))。$$

公理 7 (无穷公理)

$$\exists x(0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))。$$

定义 A.2 $A = \mathbb{N} = \omega$，即

$$0 \in A \wedge \forall x \in A(S(x) \in A) \wedge \forall Y(Y \subsetneq A \to (0 \notin Y \vee \exists x \in Y(S(x) \notin Y)))。$$

一种较强形式的无穷公理为 $\exists x(x = \omega)$。

公理 8 (幂集公理)

$$\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y)$$

定义 A.3 x 的幂集 $\mathcal{P}(x) = \{z | z \subseteq x\}$。

本文中 ZF 指以上公理集，ZF^- 指 ZF 减去基础公理。AC 指下述命题：

公理 9 (选择公理)

$$\forall A \exists R(R \text{ 是 } A \text{ 上的良序})。$$

ZFC 指 ZF 加 AC。

定义 A.4 (a) $A \times B = \{\langle x, y\rangle | x \in A \wedge y \in B\}$。

(b) R 是 (二元) 关系，即 $\forall z(z \in R \to \exists x, y(z = \langle x, y\rangle))$；$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle | \langle y, x\rangle \in R\}$；$\mathrm{dom}(R) = \{x \in \cup\cup R | \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$；$\mathrm{ran}(R) = \mathrm{dom}\, R^{-1}$。

[1]形式语言中的定义都可以看作约定一个缩写方式，正上述定义所示。这里的定义方式中，可以将 $\{x, x\}$ 看作以 x 为自由变元的公式 $\varphi(x)$，它可缩写为 $\{x\}$。因此这与上述定义方式本质上相同。

(c) f 是函数，即 f 是关系且 $\forall x \in \mathrm{dom}(f)\exists! y(\langle x,y\rangle \in f)$； $f : A \mapsto B$，即 f 是函数，$\mathrm{dom}(f) = A$ 且 $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$； $f \upharpoonright C = f \cap (C \times \mathrm{ran}(f))$； $f[C] = \mathrm{ran}(f \upharpoonright C)$； f 是一一的，即 f^{-1} 是函数； f 是 A 到 B 的满射，即 $f : A \mapsto B$ 且 $\mathrm{ran}(f) = B$； f 是 A 到 B 的双射，即 f 是 A 到 B 的满射且 f 是一一的。

定义 A.5 (a) x 是传递的，即 $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$。

(b) x 是序数 ($x \in \mathbf{ON}$)，即 x 是传递的且 $\in$ 是 x 上的良序。

如非特别说明，后文中 α, β, δ 变域为 $\mathbf{ON}$，即 $\forall \alpha \varphi = \forall \alpha \in \mathbf{ON} \varphi$。

(c) α 是后继序数，即 $\exists \beta(\alpha = S(\beta))$； α 是极限序数，即 $\alpha \neq 0$ 且 α 不是后继序数。

注 A.6 类 (class) 是元语言中的术语，指一切由集合论对象，即集合 (set) 的“集合” (collection)。显然，集合是类，不是集合的类称为真类。在本文中用粗体大写英文字母表示一些具体的类，如 $\mathbf{V} = \{x|x = x\}$。正如正文中提到的，不加限制的使用类概念会造成悖论，例如 $\{x|x \notin x\}$。但持实在论观点的人认为那些类仍具有意义，可以(在元语言中)自由的谈论。对反对实在论的人，可以将集合论中的类看作一个集合论公式的对应。如 $x \in \mathbf{V}$ 指公式 $x = x$。这时一个公式 φ (对应类 $\mathbf{A}$)是真类，即 $\forall A \exists y(\varphi(y) \wedge y \notin A)$。

一个公式 φ (即一个类 $\mathbf{G}$) 是 (集合论 T 中的) 运算，当且仅当该公式至多有两个变元，且对任意 x 存在唯一 y， $\varphi(x,y)$ 是 T 的定理 (即 $\mathbf{G}(x) = y$)。显然，任意函数是运算。对运算 $\mathbf{G}$ (即 φ)，令 $\mathbf{G}[A] = \{y|\exists x \in A\varphi(x,y)\}$。由替换公理不难看出，若 A 是集合 ($\exists x(x = A)$)，则 $\mathbf{G}[A]$ 是集合。令 $\mathbf{G} \upharpoonright A = \{\langle x,y\rangle \in A \times \mathbf{G}[A]|\varphi(x,y)\}$。

定理 A.7 (超穷归纳定理模式) 对每个公式 φ，若有 $\forall \beta < \alpha\varphi(\beta) \to \varphi(\alpha)$，则 $\forall \alpha \varphi(\alpha)$。

定理 A.8 (超穷递归定理模式) 对每个公式 φ，若 φ 是运算，则存在运算 ψ 有如下定理:

$$\forall \alpha \forall z\Big[\psi(\alpha,z) \leftrightarrow \exists f\Big(\forall s\big(s \in f \leftrightarrow \exists \delta, y\big(\delta \in \alpha \wedge s = \langle \delta, y\rangle \wedge \psi(\delta,y)\big) \wedge \varphi(f,z)\big)\Big)\Big]。$$

用类表示: 对任意运算 $\mathbf{G}$，存在运算 $\mathbf{F}$，对任意序数 α 满足 $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \upharpoonright \alpha)$。

定义 A.9 对序数 β 递归定义 $\alpha + \beta$:

(a) $\alpha + 0 = \alpha$。

(b) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$。

(c) 对极限序数 β， $\alpha + \beta = \bigcup\{\alpha + \delta|\delta < \beta\}$。

定义 A.10 (a) $A^B = \{f \in B \times A | f : B \mapsto A\}$; $A^{<\omega} = \bigcup\{A^n | n \in \omega\}$。

(b) $\langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle = \big\{\langle i, x\rangle \in n \times \{x_0, \dots, x_{n-1}\} | x = x_i\big\}$。容易证明这是函数。

(c)若 s, t 是函数，且满足 $\mathrm{dom}(s) = \alpha$、$\mathrm{dom}\, t = \beta$，定义 $s^\frown t$ 为以 $\alpha + \beta$ 为定义域的函数并满足 $(s^\frown t) \restriction \alpha = s$ 且对任意 $\delta < \beta$ 有 $(s^\frown t)(\alpha + \delta) = t(\delta)$。

定义 A.11 (a) A 与 B 等数，即存在从 A 到 B 的双射。

(b)若 A 上有良序，定义 $\mathrm{card}(A)$ 为最小的与 A 等数的 α。

(c) α 是基数，即 $\alpha = \mathrm{card}(\alpha)$。

后文中 κ, λ 默认变域为基数类。

定义 A.12 A 是有穷的，即 $\mathrm{card}(A) < \omega$; A 是无穷的，即 A 不是有穷的; A 是可数的，即 $\mathrm{card}(A) \leq \omega$; A 是不可数的，即 A 不是可数的。

定义 A.13 (a) $\kappa \oplus \lambda = \mathrm{card}(\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\})$。

(b) $\kappa \otimes \lambda = \mathrm{card}(\kappa \times \lambda)$。

(c) $\kappa^\lambda = \mathrm{card}(\kappa^\lambda)$。[1]

定义 A.14 (连续统假设) CH (连续统假设)，即 $2^\omega = \omega^+$; GCH (广义连续统假设)，即对任意无穷基数 κ 有 $2^\kappa = \kappa^+$。

定理 A.15 若 κ, λ 是无穷基数，A, B 无穷，则

(a) $\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda)$。

(b) $\mathrm{card}(\kappa^{<\omega}) = \kappa$

(c) (AC) $\mathrm{card}(A \times B) = \max(\mathrm{card}(A), \mathrm{card}(B))$。

(d) (AC) $\mathrm{card}(A^{<\omega}) = \mathrm{card}(A)$。

定理 (AC) A.16 $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(x))$。

定义 A.17 α^+ 为 $> \alpha$ 的最小的基数。κ 是后继基数当且仅当存在 α 使 $\kappa = \alpha^+$; κ 是极限基数当且仅当 $\kappa > \omega$ 且 κ 不是后继基数。

定义 A.18 对 $\alpha \in \mathbf{ON}$ 递归定义 $R(\alpha)$:

(a) $R(0) = 0$。

(b) $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$。

(c) 对极限序数，$R(\alpha) = \bigcup_{\delta < \alpha} R(\delta)$。

定义 $\mathbf{WF} = \bigcup\{R(\alpha) | \alpha \in \mathbf{ON}\}$

对 $x \in \mathbf{WF}$ 定义 $\mathrm{rank}(x)$ 为最小的序数 β 以满足 $x \in R(\beta + 1)$

[1]该定义中后一个 κ^λ 指所有从 λ 到 κ 的函数的集合，参见定义A.10。前一个 κ^λ 是我们要定义的基数幂运算。本文中如非特别注明，n^λ、κ^λ 表示基数幂运算，A^B 表示函数集合。

定理 A.19 (a) $\forall n<\omega\big(\mathrm{card}(R(n))<\omega\big)$。(b) $\mathrm{card}(R(\omega))=\omega$。

定理 ($\mathbf{ZF}^{-}$) A.20 (a) **良基公理** $\leftrightarrow \mathbf{V}=\mathbf{WF}$。

(b) **良基公理** $\rightarrow (A\in\mathbf{ON}\leftrightarrow A$ 是传递的 $\wedge\in$ 是 A 上的线序)。

定义 A.21 (相对性) 对任意类 $\mathbf{M}$,任意集合论公式 φ,递归定义 φ^{M} (或 $\vDash_{\mathbf{M}}\varphi$),即 φ 到 $\mathbf{M}$ 的相对化 (或 $\mathbf{M}$ 满足 φ) 为:

Ⅰ. $(x=y)^{\mathbf{M}}$ (或 $\vDash_{\mathbf{M}} x=y$),即 $x=y$。

II. $(x\in y)^{\mathbf{M}}$ (或 $\vDash_{\mathbf{M}} x\in y$),即 $x\in y$。

III. $\varphi^{\mathbf{M}}=(\psi_1\rightarrow\psi_2)^{\mathbf{M}}$ (或 $\vDash_{\mathbf{M}}\psi_1\rightarrow\psi_2$),即 $\psi_1^{\mathbf{M}}\rightarrow\psi_2^{\mathbf{M}}$ (或 $\vDash_{\mathbf{M}}\psi_1\rightarrow\vDash_{\mathbf{M}}\psi_2$)。

IV. $\varphi^{\mathbf{M}}=(\neg\psi)^{\mathbf{M}}$ (或 $\vDash_{\mathbf{M}}\neg\psi$),即 $\neg(\psi^{\mathbf{M}})$ (或 $\neg\vDash_{\mathbf{M}}\psi$)。

V. $\varphi^{\mathbf{M}}=(\exists x\psi)^{\mathbf{M}}$ (或 $\vDash_{\mathbf{M}}\exists x\psi$),即 $\exists x(x\in\mathbf{M}\wedge\psi^{\mathbf{M}})$ (或 $\exists x\in\mathbf{M}\vDash_{\mathbf{M}}\psi$)。

若 φ 是句子,$\varphi^{\mathbf{M}}$ 也称为,φ 在 $\mathbf{M}$ 中真,或 $\mathbf{M}$ 是 φ 的模型。

对类 $\mathbf{A}$ (即公式 φ),定义 A 在类 $\mathbf{M}$ 中的相对化 $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ 为 $\{x\in\mathbf{M}|\varphi^{\mathbf{M}}(x)\}$。

对运算 (包括函数) $\mathbf{F}$ (即公式 ψ), $x\in\mathbf{M}$,定义 $\mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x)$ 为唯一的 $y\in\mathbf{M}$以满足 $\varphi^{\mathbf{M}}(x,y)$。

引理 A.22 对句子集 S,T、类 $\mathbf{M}$,如果由 T 可证明 $\mathbf{M}\neq 0$ 及 $S^{\mathbf{M}}$,则 $\mathrm{Con}(T)\rightarrow\mathrm{Cons}(S)$。

证明 见引理 3.3。 □

引理 A.23 **外延公理**在传递类 $\mathbf{M}$ 中真。

证明 外延公理在 $\mathbf{M}$ 下相对化,$\Big(\forall x\forall y\big(\forall z(z\in x\leftrightarrow x\in y)\rightarrow x=y\big)\Big)^{\mathbf{M}}=\forall x\in\mathbf{M}\forall y\in\mathbf{M}\big(\forall z\in\mathbf{M}(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y\big)$。由外延公理容易证明该命题。 □

引理 A.24 若对所有公式 φ (设其中至多含自由变元 $x,z,w_1,\ldots,w_n$),有

$$\forall z,w_1,\ldots,w_n\in\mathbf{M}\big(\big\{x\in z\;\big|\;\varphi^{\mathbf{M}}(x,z,w_1,\ldots,w_n)\big\}\in\mathbf{M}\big)$$

则每个**分离公理例式**在 $\mathbf{M}$ 中真。

证明 对任意公式 $\varphi(x,z,w_1,\ldots,w_n)$,我们证明它的分离公理例式在 $\mathbf{M}$ 下的相对化:

$$\forall z,w_1,\ldots,w_n\in\mathbf{M}\exists y\in\mathbf{M}\forall x\in\mathbf{M}\big(x\in y\leftrightarrow x\in z\wedge\varphi^{\mathbf{M}}(x,z,w_1,\ldots,w_n)\big). \tag{A.0.1}$$

给定 $z,w_1,\ldots,w_n\in\mathbf{M}$。令 $y=\big\{x\in z\;\big|\;\varphi^{\mathbf{M}}(x,z,w_1,\ldots,w_n)\big\}$。由题设条件,$y\in\mathbf{M}$。而对任意 $x\in\mathbf{M}$,显然有 $x\in y$ 当且仅当,$x\in z$ 且 $\varphi^{\mathbf{M}}(x,z,w_1,\ldots,w_n)$。 □

引理 A.25 若 $\mathbf{M}$ 是传递的，则**幂集公理**在 $\mathbf{M}$ 中真，当且仅当

$$\forall x \in \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M}(\mathcal{P}(x) \cap \mathbf{M} \subseteq y)。$$

证明　题设条件等价于

$$\forall x \in \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M} \forall z \in \mathbf{M}(z \subseteq x \to z \in y). \tag{A.0.2}$$

而幂集公理在 $\mathbf{M}$ 下相对化是

$$\forall x \in \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M} \forall z \in \mathbf{M}\big((z \subseteq x)^{\mathbf{M}} \to z \in y\big). \tag{A.0.3}$$

因此只需证明 $\forall x, y \in \mathbf{M}\big(x \subseteq y \leftrightarrow (x \subseteq y)^{\mathbf{M}}\big)$。也即 $x \subseteq y$ 对 M 绝对 (见之后定义 A.29)。而这对传递类 $\mathbf{M}$ 总成立。

给定任意 $x, y \in \mathbf{M}$。

$$(x \subseteq y)^{\mathbf{M}} = \forall z \in \mathbf{M}(z \in x \to z \in y)$$

$x \subseteq y \to (x \subseteq y)^{\mathbf{M}}$ 总成立。假设 $(x \subseteq y)^{\mathbf{M}}$。考虑任意 $z \in x$。由 $\mathbf{M}$ 传递及 $x \in \mathbf{M}$，$z \in \mathbf{M}$，故 $z \in y$。

□

引理 A.26 (a) 若 $\forall x, y \in \mathbf{M} \exists z \in \mathbf{M}(x \in z \wedge y \in z)$，则**对集公理**在 $\mathbf{M}$ 中真。

(b) 若 $\forall x \in \mathbf{M} \exists z \in \mathbf{M}(\bigcup x \subseteq z)$，则**并集公理**在 $\mathbf{M}$ 中真。

证明　容易证明。 □

引理 A.27 若对每个公式 $\varphi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$，所有 $A, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{M}$，有:

$$\begin{aligned}&\forall x \in A \exists! y \in \mathbf{M} \varphi^{\mathbf{M}}(x, y, A, w_1, \ldots, w_n) \\ &\qquad \to \exists Y \in \mathbf{M}\big(\{y | \exists x \in A \varphi^{\mathbf{M}}(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\} \subseteq Y\big).\end{aligned} \tag{A.0.4}$$

那么，每个**替换公理例式**在 $\mathbf{M}$ 中真。

证明　只需证明替换公理例式的相对化：

$$\begin{aligned}&\forall A, w_1 \ldots \forall w_n \in \mathbf{M}\Big[\forall x \in A \cap \mathbf{M} \exists! y \in \mathbf{M} \varphi^{\mathbf{M}}(x, y, A, w_1, \ldots, w_n) \\ &\qquad \to \exists Y \in \mathbf{M} \forall x \in A \cap \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M}(y \in Y \wedge \varphi^{\mathbf{M}}(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\Big].\end{aligned} \tag{A.0.5}$$

有题设条件容易验证。 □

引理 A.28 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{WF}$ 则良基公理在 $\mathbf{M}$ 上真。

证明 良基公理的相对化：

$$\forall x \in \mathbf{M}\Big(\exists y \in \mathbf{M}(y \in x) \to \exists y \in \mathbf{M}\big(y \in x \wedge \neq \exists z \in \mathbf{M}(z \in x \wedge z \in y)\big)\Big). \quad \text{(A.0.6)}$$

我们只需要取 $y \in \mathbf{M} \cap x$ 中的 $\in$ 极小元。 □

定义 A.29 (绝对性) 对类 $\mathbf{A}$ (即公式 φ)、类 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$:

φ 对 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 绝对，即 $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}\big(\varphi^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}\big)$； φ 对 $\mathbf{M}$绝对即 φ 对 $\mathbf{M}, \mathbf{V}$ 绝对。

对函数 $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)$， F 对 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 绝对，当且仅当公式 $F(x_1, \ldots, x_n) = y$ 绝对，也即对任意 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}$，若 $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{M}$ 则 $\mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)$。

定义 A.30 递归定义 Δ_0 公式:

I. $x \in y$ 和 $x = y$ 是 Δ_0 公式。
II. 若 φ, ψ 是 Δ_0 公式，则 $\neg\varphi$ 和 $\varphi \wedge \psi$ 也是 Δ_0 公式。
III.若 φ 是 Δ_0 公式，则 $\exists x \in y\varphi$ 和 $\forall x \in y\varphi$ 也是 Δ_0 公式。

定理 A.31 对每个 Δ_0 公式 φ，若 $\mathbf{M}$ 是传递的，则 φ 对 $\mathbf{M}$ 绝对。

证明 通过对 Δ_0 公式归纳证明。 □

定理 A.32 若 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ 且公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$、运算 $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\mathbf{G}_i(y_1, \ldots, y_m)$ ($1 \leq i \leq n$) 对 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 绝对，则公式 $\varphi(\mathbf{G}_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, \mathbf{G}_n(y_1, \ldots, y_m))$ 和运算 $\mathbf{F}(\mathbf{G}_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, \mathbf{G}_n(y_1, \ldots, y_m))$ 也对 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 绝对。

证明 为方便起见，取 $n = m = 1$。若 $y, \mathbf{G}(y) \in \mathbf{M}$，则

$$\Big(\varphi\big(\mathbf{G}(y)\big)\Big)^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{M}}\big(\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(y)\big) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{M}}\big(\mathbf{G}^{\mathbf{N}}(y)\big) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}\big(\mathbf{G}^{\mathbf{N}}(y)\big) \leftrightarrow \Big(\varphi\big(\mathbf{G}(y)\big)\Big)^{\mathbf{N}}. \quad \text{(A.0.7)}$$

类似地，

$$\mathbf{F}^{\mathbf{M}}\big(\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(y)\big) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}\big(\mathbf{G}^{\mathbf{N}}(y)\big) = \mathbf{F}^{\mathbf{N}}\big(\mathbf{G}^{\mathbf{N}}(y)\big). \quad \text{(A.0.8)}$$

□

定理 A.33 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{A}$ 上良基二元关系，且任意 $x \in \mathbf{A}$ 的 $\mathbf{R}$ 前驱组成的类 $\big\{y \mid \mathbf{R}(y, x)\big\}$ 是集合。$\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}$。递归定义 $\mathbf{G} : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{V}$ 试满足

$$\forall x \in \mathbf{A}\Big(\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}\big(x, \mathbf{G} \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})\big)\Big).$$

令 $\mathbf{M}$ 是 $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ 的传递模型，且假设:

(1) $\mathbf{F}, \mathbf{R}$ 和 $\mathbf{A}$ 对 $\mathbf{M}$ 绝对。

(2) ($\mathbf{A}$ 中元素的 $\mathbf{R}$ 前驱是集合 $)^{\mathbf{M}}$ 且

$$\forall x \in \mathbf{M}\big(\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{M}\big). \tag{A.0.9}$$

那么，$\mathbf{G}$ 对 $\mathbf{M}$ 绝对。

证明　注意，$\mathbf{R} = \mathbf{R} \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M})$ ($\mathbf{R}$ 对 $\mathbf{M}$ 绝对) 在 $\mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$ 上也是良基的，即 ($\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{A}$ 上良基 $)^{\mathbf{M}}$。又因为 $\mathbf{M}$ 是 $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ 的模型，我们可以在 $\mathbf{M}$ 用超穷递归定理定义 $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} : \mathbf{A}^{\mathbf{M}} \mapsto \mathbf{M}$ 使，

$$\forall x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}\Big(\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}\big(x, \mathbf{G}^{\mathbf{M}} \restriction^{\mathbf{M}} \mathrm{pred}^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}})\big)\tag{A.0.10}$$

我们归纳证明，对任意 $x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}$，$\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{G}(x)$。反设存在 x 是集合 $\{x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}} \mid \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) \neq \mathbf{G}(x)\}$ 的 $\mathbf{R}$ 极小元。则 $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} \restriction^{\mathbf{M}} \mathrm{pred}^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}}) = \mathbf{G}^{\mathbf{M}} \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \mathbf{G} \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ (其中第一个等式由 $\restriction, \mathrm{pred}$ 及 $\mathbf{A}, \mathbf{R}$ 对 $\mathbf{M}$ 绝对和(A.0.9))。又由 $\mathbf{F}$ 绝对性，得 $\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{G}(x)$。矛盾。 □

由于 $\mathbf{ON}$ 对 $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ 的传递模型绝对，$\in$ 是其中的良基关系，我们有下述推论：

定理 A.34　若 $\mathbf{M}$ 是 $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ 的传递模型，运算 $\mathbf{G}$ 对 $\mathbf{M}$ 绝对，则对 $\mathbf{ON}$ 递归定义的运算 $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha)$ 也对 $\mathbf{M}$ 绝对。

定理 A.35　以下各项对 ZF−P 传递模型绝对:

(1) $x \in y$;	(13) $\bigcup x$;	(25) x是后继序数;
(2) $x = y$;	(14) $\bigcap x$;	(26) x是有穷序数;
(3) $x \subseteq y$;	(15) z是有序对;	(27) ω;
(4) $\{x, y\}$;	(16) $A \times B$;	(28) n (对所有 $n \in \omega$);
(5) $\{x\}$;	(17) R是关系;	(29) x是有穷的;
(6) $\langle x, y\rangle$;	(18) $\mathrm{dom}(R)$;	(30) A^n;
(7) 0;	(19) $\mathrm{ran}(R)$;	(31) $A^{<\omega}$;
(8) $x \cup y$;	(20) R是函数;	(32) R 是 A 上的良序;
(9) $x \cap y$;	(21) $R(x)$ (R 指类);	(33) $\alpha + \beta$;
(10) $x \setminus y$;	(22) R是一一的;	(34) $\mathrm{rank}(x)$。
(11) $S(x)$;	(23) $\mathbf{ON}$;	
(12) x 是传递的;	(24) x是极限序数;	

证明　略。其中 (1)、(2) 对任意类绝对。只有 (34) 引用到定理 A.33。 □

引理 A.36 令类 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 满足 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$。令 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 为一组子公式封闭的公式; 则下述 (a)、(b) 等价:

(a) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 对 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 绝对。

(b) 若 φ_i 为形式 $\exists x \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ (之多有自由变元 $y_1, \ldots, y_l$), 则

$$\forall y_1, \ldots, y_l \in \mathbf{M}\Big(\exists x \in \mathbf{N} \varphi_i^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \rightarrow \exists x \in \mathbf{M} \varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)\Big). \quad \text{(A.0.11)}$$

证明 (Kunen, 1980)[136] □

定理 A.37 (返身定理) 对任意 α, $Z(\alpha)$ 是集合, $\mathbf{Z}$ 是类, 且满足

(1) $\alpha < \beta \rightarrow Z(\alpha) \subseteq Z(\beta)$。

(2) 若 γ 是极限序数, 则 $Z(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z(\alpha)$。

(3) $\mathbf{Z} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} Z(\alpha)$。

则对任意公式 φ, 任意序数 α, 存在 $\beta > \alpha$, 使 φ 对 $Z(\beta), \mathbf{Z}$ 绝对。

证明 (Kunen, 1980)[137] □

定理 (AC) A.38 $\mathbf{Z}$ 是传递类, φ 是句子, 则有:

$$\begin{aligned}\forall X \subseteq \mathbf{Z}\Big[X \text{ 是传递的 } \rightarrow \exists M\big[X \subseteq M \wedge (\varphi^M \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{Z}}) \wedge \\ M \text{ 是传递的 } \wedge \operatorname{card}(M) \leq \max(\omega, \operatorname{card}(X))\big]\Big]\end{aligned}$$

证明 (Kunen, 1980)[140] □

定义 A.39 首先定义集合论语言符号上的函数 h, 令 $h(\forall) = 0$, $h(\in) = 2$, $h(() = 1$, $h()) = 3$, $h(\neg) = 5$, $h(\rightarrow) = 7$, $h(\approx) = 9$, $h(v_i) = 9 + 2i$ ($1 \leq i \in \omega$)。其次, 对集合论表达式 (集合论语言符号的任意序列) 长度递归定义其上的函数 $\sharp$, 使对任意单个符号 α 令 $\sharp(\alpha) = \langle h(\alpha) \rangle$, 对长度为 n 的表达式 β 及符号 α 令 $\sharp(\beta\alpha) = \sharp(\beta)^\frown \sharp(\alpha)$。[1]

定义运算 $\mathrm{En}'(f, A, n)$ 为:

[1]实在论者可以将上述定义看作规定了集合论语言上的一个函数, $h, \sharp$ 及集合论语言的构件是 $\mathbf{V}$ 以外的对象。反实在论者可以将上述定义可看作规定了一个缩写方式, 如 $x = \sharp(v_1 = v_2)$ 即 $x = \langle 11, 9, 13 \rangle$。出现 $\sharp, h$ 等函数符号的公式仍然是集合论语言中的公式。另外, 上述 $h(\approx) = 9$ 中的 $\approx$ 指集合论语言中的等号, $=$ 是元语言的谓词。在本文其他地方根据语境一般不会产生歧义故不作特别区分。

$$\mathrm{En}'(f,A,n)=\begin{cases}\{s\in A^n|s(i)=s(j)\} & \text{若 } f=\sharp(v_i\approx v_j),\\ \{s\in A^n|s(i)\in s(j)\} & \text{若 } f=\sharp(v_i\in v_j),\\ A^n\setminus \mathrm{En}'(\sharp\beta,A,n) & \text{若 } f=\sharp(\neg\beta),\\ \mathrm{En}'(\sharp\beta,A,n)\cap \mathrm{En}'(\sharp\gamma,A,n) & \text{若 } f=\sharp(\beta\wedge\gamma),\\ \{s\in A^n|\exists t\in \mathrm{En}'(\sharp\beta,A,n+1)(t\restriction n=s)\} & \text{若 } f=\sharp(\exists v_{n+1}\beta),\\ \emptyset & \text{否则。}\end{cases}$$

定义 $\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{En}'(g(m),A,n)$。[1]

定义 $\mathrm{Df}(A,n)=\{\mathrm{En}(m,A,n)|m\in\omega\}$。

引理 A.40 对任意至多含自由变元 $x_1,\ldots,x_n$ 的公式 φ，有以下定理:

$$\forall A\big[\{s\in A^n|\varphi^A(s(1),\ldots,s(n))\}\in \mathrm{Df}(A,n)\big]。$$

证明 对公式 φ 长度归纳证明。 □

定理 A.41 $\mathrm{card}(\mathrm{Df}(A,n))\leq\omega$。

定理 A.42 Df、En 对 $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}$ 的传递模型是绝对的。

B 基于可构成集的一致性证明

定义 B.1 由 A 中元素在 A 中可定义的 A 的子集:

$$\mathcal{D}(A)=\big\{X\subseteq A\ \big|\ \exists n\in\omega\exists s\in A^n\exists R\in \mathrm{Df}(A,n+1)[X=\{x\in A|s^\frown\langle x\rangle\in R\}]\big\}。$$

引理 B.2 对任意至多含自由变元 $v_1,\ldots,v_k,x$ 的公式 φ，有以下定理:

$$\forall A\forall v_1,\ldots,v_k\in A\big[\{x\in A|\varphi^A(v_1,\ldots,v_k,x)\}\in\mathcal{D}(A)\big]。$$

证明 由引理A.40及定义B.1，取 $n=k$、$s=\langle v_1,\ldots,v_k\rangle$ 可得。 □

引理 B.3 对任意 A，

(a) $\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{P}(A)$。

(b) 若 A 是传递的，则 $A\subseteq\mathcal{D}(A)$。

(c) (AC) $\mathrm{card}(A)\geq\omega\to\mathrm{card}(\mathcal{D}(A))=\mathrm{card}(A)$。

[1]根据定理A.15(d)，存在双射 $g:\omega\mapsto\omega^{<\omega}$。注意，这里可以不用选择公理。

证明 (a) 由定义B.1可得。

对 (b)。由引理B.2对任意 $v \in A$，$\{x \in A | (x \in v)^A\} \in \mathcal{D}(A)$。$x \in v$ 对 A 绝对且 A 是传递的，则 $v \subseteq A$，则 $v \in \mathcal{D}(A)$。

对 (c)。给定 $A \geq \omega$。由推论A.41，$\mathrm{card}(\mathrm{Df}(A, n+1)) \leq \omega$。参见定义B.1、A.13，由定理A.15 (需 AC)，得

$$\mathrm{card}(\mathcal{D}(A)) \leq \mathrm{card}(\omega \times A^{<\omega} \times \mathrm{Df}(A, n+1)) = \mathrm{card}(A)。$$

由引理B.2，$\forall A(\{x\} \in \mathcal{D}(A))$，故 $\mathrm{card}(\mathcal{D}(A)) \geq \mathrm{card}(A)$。 □

定义 B.4 对 $\alpha \in \mathbf{ON}$ 递归定义 $L(\alpha)$：

(a) $L(0) = \emptyset$。

(b) $L(\alpha + 1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$。

(c) 对极限序数，$L(\alpha) = \bigcup_{\delta<\alpha} L(\delta)$。

定义 $\mathbf{L} = \bigcup\{L(\alpha) | \alpha \in \mathbf{ON}\}$。

引理 B.5 对任意序数 α：(a) $L(\alpha)$ 是传递的。(b) 对任意序数 $\delta \leq \alpha$ 有 $L(\delta) \subseteq L(\alpha)$。

证明 对 α 归纳：

I. $\alpha = 0$。由定义B.4，$L(0) = 0$，(a) 成立。对任意 $\delta \leq \alpha$，$\delta = 0$，(b) 成立。

II. $\alpha = \beta + 1$。由定义B.4，$L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta))$。由归纳假设，$L(\beta)$ 是传递的，再由引理B.3，$L(\beta) \subseteq L(\alpha) \subseteq \mathcal{P}(L(\beta))$。对任意 $x \in L(\alpha)$，$x \in \mathcal{P}(L(\beta))$，即 $x \subseteq L(\beta) \subseteq L(\alpha)$。故 (a)。又由归纳假设，$\forall\delta \leq \beta(L(\delta) \subseteq L(\alpha))$，而 $L(\beta) \subseteq L(\alpha)$，故 (b)。

III. α 是极限序数。对任意 $x \in L(\alpha)$，存在 $\beta < \alpha$，$x \in L(\beta)$ (参见定义B.4)。由归纳假设，$L(\beta)$ 传递，则 $x \subseteq L(\beta)$，故 (a)。由定义B.4得 (b)。 □

定义 B.6 对任意 $x \in \mathbf{L}$，定义 x 的 $\mathbf{L}$-rank (即 $\rho(x)$)为：最小的序数 β 以满足 $x \in L(\beta + 1)$。

引理 B.7 (a) 对任意序数 α，$L(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \alpha$。

(b) 对任意序数 α，$\alpha \in \mathbf{L}$ 且 $\rho(\alpha) = \alpha$。

证明 对 α 归纳证(a)：

I. $\alpha = 0$。$L(0) \cap \mathbf{ON} = 0$。

II. $\alpha = \beta+1$。根据归纳假设 $L(\beta) \cap \mathbf{ON} = \beta$。又由 $L(\beta) \subseteq L(\alpha) \subseteq \mathcal{P}(L(\beta))$ (见引理B.5证明)，的 $\beta \subseteq L(\alpha) \cap \mathbf{ON} \subseteq \mathcal{P}(L(\beta)) \cap \mathbf{ON} \subseteq \alpha$。现还需证 $\alpha \subseteq L(a) \cap \mathbf{ON}$，对此只需证 $\beta \in L(a)$。

根据定理A.20，$\forall x(x \in \mathbf{ON} \leftrightarrow \varphi(x))$，其中 $\varphi(x)$ 即 x 是传递的且 $\in$ 是 x 上的线序。参见定义A.1、A.5及A.30，φ是 Δ_0 公式。由引理B.5，$L(\beta)$ 是传递的，又由定理A.31，φ 对 $L(\beta)$ 绝对。因此

$$\beta = L(\beta) \cap \mathbf{ON} = \{x \in L(\beta) | \varphi(x)\} = \{x \in L(\beta) | \varphi^{L(\beta)}(x)\}。$$

由引理B.2，$\beta \in \mathcal{D}(L(\beta)) = L(\alpha)$。
III. α 是极限序数。由归纳假设，对任意 $\delta \in \alpha$ 有 $L(\delta) \cap \mathbf{ON} = \delta$。则

$$L(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \bigcup_{\delta<\alpha} L(\delta) \cap \mathbf{ON} = \bigcup_{\delta<\alpha} (L(\delta) \cap \mathbf{ON}) = \bigcup_{\delta<\alpha} \delta = \alpha。$$

对 (b)。由 (a)，对任意序数 α，$\alpha \in \alpha + 1 \subseteq L(\alpha + 1) \subseteq \mathbf{L}$。且若存在 $\delta \leq \alpha$ 有 $\alpha \in L(\delta)$，则 $\alpha \in L(\delta) \cap \mathbf{ON} = \delta$。与序数定义矛盾。 □

引理 B.8 $L(\alpha) \in L(\alpha + 1)$。

引理 (AC) B.9 *对任意序数 $\alpha \geq \omega$，$\mathrm{card}(L(\alpha)) = \mathrm{card}(\alpha)$。*

证明 由引理B.7，$\alpha \subseteq L(\alpha)$，故 $\mathrm{card}(\alpha) \leq \mathrm{card}(L(\alpha))$。

对 $\alpha \geq \omega$ 归纳证 $\mathrm{card}(L(\alpha)) \leq \mathrm{card}(\alpha)$：
I. $\alpha = \omega$。对自然数归纳容易证明，任意 $n \in \omega$ 有 $\mathrm{card}(L(n)) < \omega$。$L(\omega) = \bigcup_{n\in\omega} L(n)$，故 $\mathrm{card}(L(\omega)) \leq \omega$。
II. $\alpha = \beta + 1$。由归纳假设 $\mathrm{card}(L(\beta)) \leq \mathrm{card}(\beta) = \mathrm{card}(\alpha)$。又 $\mathrm{card}(L(\beta)) \geq \mathrm{card}(\beta) \geq \omega$)，应用引理B.3，得 $\mathrm{card}(L(\alpha)) = \mathrm{card}(\mathcal{D}(L(\beta))) = \mathrm{card}(L(\beta))$。故 $\mathrm{card}(L(\alpha)) \leq \mathrm{card}(\alpha)$。
III. $\alpha > \omega$ 且是极限序数。利用归纳假设与 I. 类似可证。 □

定理 B.10 $(\mathrm{ZF})^{\mathbf{L}}$。

证明 **存在公理**。$0 \in \mathbf{L}$。

外延公理。对任意 $x \in \mathbf{L}$，即存在 α，有 $x \in L(\alpha)$。由引理B.5，$L(\alpha)$ 是传递的，故 $x \subseteq L(\alpha) \subseteq \mathbf{L}$。故 $\mathbf{L}$ 是传递的。由引理A.23，**外延公理**在 $\mathbf{L}$ 中真。

良基公理。由定理A.20，$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V} = \mathbf{WF}$。再由引理A.28，**良基公理**在 $\mathbf{L}$ 中真。

分离公理模式。由引理A.24，需证每个公式 φ (设其中至多含有自由变元 $x, z, v_1, \ldots, v_n$)都有

$$\forall z, v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{L}\big(\{x \in z | \varphi^{\mathbf{L}}\} \in \mathbf{L}\big)。$$

给定 $z, v_1, \ldots v_n \in \mathbf{L}$。根据定义B.4及引理B.5不妨设 $z, v_1, \ldots v_n \in L(\alpha)$。根据定义B.4及引理B.5，应用定理A.37：存在 $\beta > \alpha$，有 $\forall x, z, v_1, \ldots, v_n \in L(\beta)(\varphi^{L(\beta)} \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{L}})$。由 $z, v_1, \ldots, v_n \in L(\beta)$，因而 $x \in z \to x \in L(\beta)$，可得

$$A = \{x \in z | \varphi^{\mathbf{L}}\} = \big\{x \in L(\beta) \bigm| (x \in z \wedge \varphi^{L(\beta)})\big\}。$$

由引理B.2，$A \in \mathcal{D}(L(\beta)) = L(\beta+1) \subseteq \mathbf{L}$。

对集公理。由引理A.26，只需证 $\forall x, y \in \mathbf{L} \exists z \in \mathbf{L}(x \in z \wedge y \in z)$。不妨设 $x, y \in L(\alpha)$，则取 $z =$

$$\{x, y\} = \{z \in L(\alpha) | (z = x \vee z = y)^{L(\alpha)}\} \in \mathcal{D}(L(\alpha)) = L(\alpha+1) \subseteq \mathbf{L}。$$

并集公理。由引理A.26，只需证 $\forall X \in \mathbf{L} \exists Y \in \mathbf{M}(\bigcup A \subseteq Y)$。不妨设 $X \in L(\alpha)$，取 $Y = \bigcup X = \{x | \exists Z(Z \in X \wedge x \in Z)\}$。由于 $L(\alpha)$ 是传递的，$(Z \in X \wedge x \in Z) \to Z \in L(\alpha) \wedge x \in L(\alpha)$。因此 $Y = \{x \in L(\alpha) | \exists Z \in L(\alpha)(Z \in X \wedge x \in Z)\} \subseteq L(\alpha+1) \subseteq \mathbf{L}$。

替换公理。由引理A.27，需证对每个公式 φ (设其中含有自由变元 $x, z, A, w_1, \ldots, w_n$)，任意 $A, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{L}$，满足：若

$$\forall x \in A \exists! y \in \mathbf{L} \varphi^{\mathbf{L}} \tag{B.0.12}$$

则

$$\exists Y \in \mathbf{L}\big(\{y | \exists x \in A \varphi^{\mathbf{L}}\} \subseteq Y\big) \tag{B.0.13}$$

假设 (B.0.12)，令 $\alpha = \bigcup\{\rho(y) + 1 | \exists x \in A \varphi^{\mathbf{L}}\}$。取 $Y = L(\alpha)$。由引理B.8，$Y \in L(\alpha+1) \subseteq \mathbf{L}$。故 (B.0.13)。

无穷公理。由引理B.7，$\omega \in \mathbf{L}$。

幂集公理。由引理A.25，只需证 $\forall X \in \mathbf{L} \exists Y \in \mathbf{L}(\mathcal{P}(X) \cap \mathbf{L} \subseteq Y)$。给定 $X \in \mathbf{L}$，令 $\alpha = \bigcup\{\rho(x) + 1 | x \in \mathcal{P}(X) \cap \mathbf{L}\}$。取 $Y = L(\alpha) \in \mathbf{L}$。 □

注 B.11 ZF 是一个无穷的公理集。定理B.10是一个定理模式。即，对每条 ZF 公理 δ 均有 $\delta^{\mathbf{L}}$。

定义 B.12 (可构成公理) 可构成公理 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$，即 $\forall x \exists \alpha (x \in L(\alpha))$。

引理 B.13 函数 $L(\alpha)$ 对 ZF 传递模型是绝对的。

证明 首先证明函数 $\mathcal{D}$ (见定义B.1) 是绝对的。令公式 φ 为

$$X \in Y \leftrightarrow \Big(X \subseteq A \wedge \exists n \in \omega \exists s \in A^n \exists R \in \mathrm{Df}(A, n+1)\big(X = \{x \in A | s^\frown\langle x \rangle \in R\}\big)\Big)。$$

则 $\mathcal{D}(A)=Y$ 当且仅当 $\forall X\varphi$。现欲证：$\forall A,Y\in\mathbf{M}(\forall X\in\mathbf{M}\varphi^{\mathbf{M}}\leftrightarrow\forall X\varphi)$。对此需证：$\varphi$ 对 $\mathbf{M}$ 绝对 (B.13.1)；$\forall A,Y\in\mathbf{M}(\forall X\in\mathbf{M}\varphi\leftrightarrow\forall X\varphi)$ (B.13.2)。

(B.13.1)。由定理A.31、A.32、A.35及A.42，现还需证明 $X=\{x\in A|s^\frown\langle x\rangle\in R)\}$ 对 $\mathbf{M}$ 绝对。令 $\psi=\big(x\in X\leftrightarrow(x\in A\wedge s^\frown\langle x\rangle\in R)\big)$。则 $X=\{x\in A|s^\frown\langle x\rangle\in R)\}$ 当且仅当 $\forall x\psi$。类似的，我们现在需证：ψ 对 $\mathbf{M}$ 绝对 (B.13.1.1)；$\forall A,R,s,X\in\mathbf{M}(\forall x\in\mathbf{M}\psi\leftrightarrow\forall x\psi)$ (B.13.1.2)。

类似的，对 (B.13.1.1)，我们只需证 $s^\frown t$ 对 $\mathbf{M}$ 是绝对的。根据定义A.10，$f=s^\frown t$ 当且仅当 f 是函数且

$$\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(s)+\mathrm{dom}(t)\wedge f\restriction\mathrm{dom}(s)=s\wedge\forall\delta\in\mathrm{dom}(t)\big(f(\mathrm{dom}(s)+\delta)=t(\delta)\big)。$$

根据定义A.4，其中 $f\restriction\mathrm{dom}(s)=f\cap(\mathrm{dom}(s)\times\mathrm{ran}(f))$。由定理A.31、A.32及A.35得 $s^\frown t$ 对 $\mathbf{M}$ 是绝对的。

对 (B.13.1.2)，$\leftarrow$ 方向显然。对 $\rightarrow$ 方向只需证 $\neg\psi\rightarrow x\in\mathbf{M}$。若 $\neg\psi$，则或者 $x\in X$ 或者 $x\in A$。而 $A,X\in\mathbf{M}$ 且 $\mathbf{M}$ 传递，故 $x\in\mathbf{M}$。

$\mathbf{M}$ 是 ZF 传递模型，若 $A\in\mathbf{M}$，则 $\mathcal{D}(A)$ 中元素(即由 A 中元素在 A 中定义的 A 的子集)也在 $\mathbf{M}$ 中。再由类似 (B.13.1.2) 的方法可证 (B.13.2)。

故 $\mathcal{D}$ 对 $\mathbf{M}$ 绝对。而 $L(\alpha)$ 由 $\mathcal{D}$ 对 $\mathbf{ON}$ 递归定义，由定理A.34 $L(\alpha)$ 绝对。 □

定理 B.14 $(\mathbf{V}=\mathbf{L})^{\mathbf{L}}$。

证明 对任意 $x\in\mathbf{L}$，(由定义B.4) 存在 $\alpha\in\mathbf{ON}$，有 $x\in L(\alpha)$。由引理B.7，该 $\alpha\in\mathbf{L}$；又由引理B.13，$(x\in L(\alpha))^{\mathbf{L}}$。故 $\forall x\in\mathbf{L}\exists\alpha\in\mathbf{L}(x\in L(\alpha))^{\mathbf{L}}$，即 $(\mathbf{V}=\mathbf{L})^{\mathbf{L}}$ (参见定义B.12)。 □

定理 B.15 *若 $\mathbf{M}$ 是传递真类且 $\mathrm{ZF}^{\mathbf{M}}$，则 $\mathbf{L}=\mathbf{L}^{\mathbf{M}}\subseteq\mathbf{M}$。*

证明 首先证明 $\mathbf{ON}\subseteq\mathbf{M}$。给定任意 $\alpha\in\mathbf{ON}$，由于 $\mathbf{M}$ 是真类，则 $\mathbf{M}\nsubseteq R(\alpha)$ (参见定义A.18)。因此存在 $x\in\mathbf{M}$ 且 $x\notin R(\alpha)$，则 $\mathrm{rank}(x)\geq\alpha$。$M$ 是传递的，由定理A.35，函数 rank 对 $\mathbf{M}$ 绝对，故 $\mathrm{rank}(x)\in\mathbf{M}$。再由 $\mathbf{M}$ 传递得 $\alpha\in\mathbf{M}$。

注 B.16 严格地说，定理B.15并不是一个 ZF 的内定理。$\mathrm{ZF}^{\mathbf{M}}$ 是一个无穷句子集。但事实上在证明过程中，我们只用到了 ZF 中有穷条公理，不妨令 χ 是这些公理的合取。因此，我们可以证明一个更强的命题：$\mathbf{M}$ 是传递真类，且 χ^M，则 $\mathbf{L}\subseteq\mathbf{M}$。本文中还有多处遇到类似情况，例如定理B.20。

$\mathbf{M}$ 是 ZF 的传递模型，故 $L(a)$ 和 $\mathbf{ON}$ 对 $\mathbf{M}$ 绝对 (定理B.13、A.35)。又 $\mathbf{ON} \subseteq \mathbf{M}$，则任意 $L(\alpha) \in \mathbf{M}$，则 $L(\alpha) \subseteq \mathbf{M}$。因此有：

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^{\mathbf{M}} &= \{x \in \mathbf{M} | (\exists \alpha \in \mathbf{ON}(x \in L(\alpha)))^{\mathbf{M}}\} \\
&= \{x \in \mathbf{M} | \exists \alpha \in \mathbf{ON} x \in L(\alpha)\} \\
&= \bigcup \{L(\alpha) | \alpha \in \mathbf{ON}\} \\
&= \mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}\text{。}
\end{aligned}$$

□

定义 B.17 $o(M) = M \cap \mathbf{ON}$

引理 B.18 若 M 是传递集，则 $o(M) \in \mathbf{ON}$ 且是不属于 M 的最小的序数。

证明 参见定义A.5及定义B.17。只需证，对任意序数 α, β，若 $\alpha \notin M$ 且 $\alpha < \beta$，则 $\beta \notin M$。假设 $\beta \in M$，由 M 传递，则 $\alpha \in M$。矛盾。

反设 $o(M) \in M$。$o(M)$ 是序数，则 $o(M) \in o(M)$。矛盾。而存在 $\alpha < o(M)$ 有 $\alpha \notin M$ 与 $o(M)$ 定义矛盾。 □

定理 B.19 对任意传递集 M，若 ZF^M，则 $L(o(M)) = \mathbf{L}^M \subseteq M$。

证明 M 是传递的，由引理B.18，$o(M)$ 是序数。对任意序数 α，存在序数 $\beta = S(\alpha)$ 有 $\alpha \in S(\alpha)$ (ZF定理)。而 ZF^M，则对任意序数 $\alpha \in M \subseteq o(M)$ 存在序数 $\beta \in o(M)$。则 $o(M)$ 是极限序数。由定义B.4，$L(o(M)) = \bigcup_{\alpha < o(M)} L(\alpha) = \bigcup_{\alpha \in M} L(\alpha)$。与定理B.15类似，

$$\mathbf{L}^M = \{x \in M | (\exists \alpha (x \in L(\alpha)))^M\} = \bigcup_{\alpha \in M} L(\alpha)\text{。}$$

故 $L(o(M)) = \mathbf{L}^M \subseteq M$。 □

定理 B.20 (a) 若 $\mathbf{M}$ 是传递真类且 $(\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{M}}$，则 $\mathbf{M} = \mathbf{L}$。
(b) 对任意传递集 M，若 $(\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L})^M$，则 $M = L(o(M))$。

证明 $(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{M}}$，即 $(\forall x (x \in \mathbf{L}))^{\mathbf{M}}$，即 $\forall x \in \mathbf{M}(x \in \mathbf{L}^{\mathbf{M}})$，也即 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{L}^{\mathbf{M}}$。显然 $\mathbf{L}^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbf{M}$，即 $\mathbf{M} = \mathbf{L}^{\mathbf{M}}$。又由定理B.15，$\mathbf{M} = \mathbf{L}$，得 (a)。

类似的，由 $(\mathbf{V} = \mathbf{L})^M$ 可得 $M = \mathbf{L}^M$。再由定理B.19，$L(o(M)) = \mathbf{L}^M = M$，得 (b)。 □

定义 B.21 对序数 α 递归定义 $L(\alpha)$ 上良序 $\lhd_\alpha$：

I . $\lhd_0 = 0$。

II . 给定 $\lhd_\alpha$，定义 $L(S(\alpha))$ 上序 $\lhd_{S(\alpha)}$，满足对任意 $X, Y \in L(S(\alpha))$，$X \lhd_{S(\alpha)} Y$ 当且仅当

(a) $X, Y \in L(\alpha) \wedge X \lhd_\alpha Y$，或

(b) $X \in L(\alpha) \wedge Y \notin L(\alpha)$，或

(c) $X, Y \notin L(\alpha) \wedge [(n_X < n_Y) \vee (n_X = n_Y \wedge s_X \lhd_\alpha^{n_X} s_Y) \vee (n_X = n_Y \wedge s_X = s_Y \wedge m_X < m_Y)]$。

其中 n_X、$\lhd_\alpha^n$、s_X、m_X定义如下：

$X \in L(\alpha+1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$ 时，n_X 为最小的 $n \in \omega$ 满足，

$$\exists s \in L(\alpha)^n \exists R \in \mathrm{Df}(L(\alpha), n+1)\big(X = \{x \in L(\alpha) | s^\frown \langle x \rangle \in R\}\big)。$$

根据定义B.1，总存在相应 n。

令 $\lhd_\alpha^n$ 为 $L(\alpha)^n$ 上字典序，即对任意 $s, t \in L(\alpha)^n$：

$$s \lhd_\alpha^n t \leftrightarrow \exists k < n\big(s \upharpoonright k = t \upharpoonright k \wedge s(k) \lhd_\alpha t(k)\big)。$$

可以归纳证明 $\lhd_\alpha$ 是 $L(\alpha)$ 上的良序，因而 $\lhd_\alpha^n$ 是 $L(\alpha)^n$ 上的良序。

$X \in L(\alpha+1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$ 时，s_X 为 $L(\alpha)^{n_X}$ 中满足以下条件的 $\lhd_\alpha^{n_X}$ 最小元:

$$\exists R \in \mathrm{Df}\big(L(\alpha), n_X + 1\big)\big(X = \{x \in L(\alpha) | s^\frown \langle x \rangle \in R\}\big)。$$

由定义B.1，存在满足该条件的 s，由于 $\lhd_\alpha^{n_X}$ 是良序，存在最小的 s。

$X \in L(\alpha+1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$ 时，m_X 为最小的 $m \in \omega$ 满足

$$X = \{x \in L(\alpha) | s_X^\frown \langle x \rangle \in \mathrm{En}\big(m, L(\alpha), n_X\big)\}。$$

同样由定义B.1，m_X也存在。

不难看出，(c) 的想法是，对 $\rho(X) = \rho(Y) = \alpha$ 的 X, Y，首先比较其定义中所需用到的 $L(\alpha)$ 中元素的个数，若相同再比较定义所需元素序列的字典序，若仍相同则比较定义所需“最小”公式的大小，若全部相同则 $X = Y$。

III. 若 α 是极限序数，令 $\lhd_\alpha$ 为

$$\big\{\langle x, y \rangle \in L(\alpha) \times L(\alpha) | \rho(x) < \rho(y) \vee \big(\rho(x) = \rho(y) \wedge \langle x, y \rangle \in \lhd_{S(\rho(x))}\big)\big\}。$$

引理 B.22 $\mathbf{V} = \mathbf{L} \rightarrow \mathrm{AC}$。

证明 对任意 $X\ (\in \mathbf{V})$，有 $X \in \mathbf{L}$。由定义B.4，存在 α 有 $x \subseteq L(\alpha)$。由B.21，$\lhd_\alpha$ 是 $L(\alpha)$ 上良序，因而也是 X上良序 (检查良序定义)。 □

定理 B.23 若 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$，则对任意无穷序数 α 有 $\mathcal{P}(L(\alpha)) \subseteq L(\alpha^+)$ (α^+ 定义参见A.17)。

证明 由定理B.20可以找到 $\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 中一个有穷公理集 (令其合取为 χ) 满足

$$\forall M\big(M\text{是传递的}\wedge\chi^M\to M=L(o(M))\big)\tag{B.0.14}$$

给定任意 $A\in\mathcal{P}(L(\alpha))$ ($A\subseteq L(\alpha)$)。令 $X=L(\alpha)\cup\{A\}$。则 X 传递。由定理B.9，$\mathrm{card}(X)=\mathrm{card}(L(\alpha))=\mathrm{card}(\alpha)$。由定理A.38 (令其中 $\mathbf{Z}=\mathbf{V}$)，存在 M，满足

$$X\subseteq M\wedge(\chi^M\leftrightarrow\chi^{\mathbf{V}})\wedge M\text{ 是传递的 }\wedge\mathrm{card}(M)\leq\max(\omega,\mathrm{card}(X))。$$

由 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$，得 $\chi^{\mathbf{V}}$，因而 χ^M。又由 M 是传递的及(B.0.14)，得 $M=L(o(M))$。$\mathrm{card}(X)=\mathrm{card}(\alpha)\geq\omega$，故 $\mathrm{card}(M)=\mathrm{card}(X)=\mathrm{card}(\alpha)$。则 $\mathrm{card}\big(o(M)\big)\leq\mathrm{card}(M)<\alpha^+$。因此有

$$A\in X\subseteq M=L(o(M))\subseteq L(\alpha^+)。\qquad\square$$

推论 B.24 $\mathbf{V}=\mathbf{L}\to\mathrm{GCH}$。

证明 给定任意基数 $\kappa\geq\omega$。由引理B.7，$\mathcal{P}(\kappa)\subseteq\mathcal{P}(L(\kappa))$；由定理B.23，$\mathcal{P}(L(\kappa))\subseteq L(\kappa^+)$。因此 $\mathcal{P}(\kappa)\subseteq L(\kappa^+)$。由引理B.9及引理B.22，$\mathrm{card}(L(\kappa^+))=\kappa^+$。因此，$2^\kappa\leq\kappa^+$。又由定理A.16及定义A.17，$\kappa^+\leq 2^\kappa$。故 $2^\kappa=\kappa^+$。 $\square$

推论 B.25 $(\mathrm{AC}+\mathrm{GCH})^{\mathbf{L}}$。

证明 由定理B.14、引理B.22及推论B.24可得。 $\square$

推论 B.26 $\mathrm{Cons(ZF)}\to\mathrm{Cons(ZFC+GCH)}$。

证明 由推论B.10、B.25及引理A.22可得。 $\square$

参考文献

王浩. 2002. 哥德尔[M]. 康宏逵，译. 上海: 上海世纪出版集团.

科庇I M. 1988. 符号逻辑[M]. 宋文坚, 宋文淦，译. 北京: 北京大学出版社.

ENDERTON H B. 2006. 数理逻辑 (英文版)[M]. 2版. 北京: 人民邮电出版社.

FREGE G. 1960. The Foundations of Arithmatic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number[M]. Austin, J. L.，translation. New York: Harper Torchbook.

GÖDEL K. 1938. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis[A]//. FEFERMAN S. Collected Works, volume II: Publications 1938-1974. New York and Oxford: Oxford University Press:26.

GÖDEL K. 1939. Lecture at Göttingen[A]//. FEFERMAN S. Collected Works, volume III: Unpublished essays and lectures. New York and Oxford: Oxford University Press:126–155.

GÖDEL K. 1940a. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory[A]//. FEFERMAN S. Collected Works, volume II: Publications 1938-1974. New York and Oxford: Oxford University Press:33–101.

GÖDEL K. 1940b. Lecture on the consistency of the continuum hypothesis (Brown University)[A]//. FEFERMAN S. Collected Works, volume III: Unpublished essays and lectures. New York and Oxford: Oxford University Press:175–185.

GÖDEL K. 1944. Russels's mathematical logic[A]//. FEFERMAN S. Collected Works, volume II: Publications 1938-1974. New York and Oxford: Oxford University Press:119–141.

GÖDEL K. 1990. Collected Works, volume II: Publications 1938-1974[M]. New York and Oxford: Oxford University Press.

JECH T. 2002. Set Theory[M]. 3rd Millennium, rev. and expanded. Heidelberg: Springer-Verlag.

KUNEN K. 1980. Set Theory: An Introduction to Independence Proofs[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

RAMSEY F P. 1931. The foundations of mathematics and other logical essays[M]. New York: Humanities Press.

RUSSELL B. 1902. Letter to Frege[A]//. VAN HEIJENOORT J. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press:124–125.

RUSSELL B. 1908. Mathematical logic as based on the theory of types[A]//. VAN HEIJENOORT J. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press:150–182.

SHAPIRO S. 2000. Thinking About Mathematics: The Philosophy of Mathematics[M]. New York: Oxford University Press.

SOLOVAY R M. 1990. Introductory note to 1938, 1939, 1939a and 1940[A]//. FEFERMAN S. Collected Works, volume II: Publications 1938-1974. New York and Oxford: Oxford University Press:1–25.

SOLOVAY R M. 1995. Introductory note to Gödel *1939b and*1940a[A]//. FEFERMAN S. Collected Works, volume III: Unpublished essays and lectures. New York and Oxford: Oxford University Press:114–127.

VAN HEIJENOORT J. 1967. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931[M]. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.