

## 王轶：混合语言下的二维空间逻辑（2009）

认知逻辑很长时间以来都是备受关注的领域。本文以一种独特的认知行为——认知努力——作为讨论的动机之一，由此引出了混合逻辑、拓扑逻辑等众多领域的相关内容。

与经典模态逻辑相比，混合逻辑具有了专名这一特殊的词汇：从对应理论来看它具有常元的特征，但它同时又是公式。论文的第二章从经典模态逻辑开始，介绍了混合逻辑引入专名的直观动机。然后讨论了几种极为常见的混合算子： $@$ 、 $\downarrow$ 和 $E$ 等，并给出了几种常见的混合语言下的极小逻辑，如 $KH$ 、 $K_{H(@)}$ 、 $K_{H(\downarrow)}$ 、 $K_{H(@, \downarrow)}$ 、 $K_{H(E)}$ 等。以 $K_{H(@)}$ 为例给出了混合逻辑完全性证明的典范模型方法，此外还介绍了混合逻辑特有的纯完全性定理和从经典模态逻辑沿用过来的萨科维斯特完全性定理。论文接着讨论了一个极强的混合语言 $H(@, \downarrow, E, \exists)$ 及其与一阶语言的相互翻译，并整理了各种混合语言间的表达能力强弱关系。克里普克模型与框架在混合语言中的可定义性以及和一阶语言的对比是第2.6节的主要内容。第二章最后简单介绍了在混合逻辑的诞生阶段，普莱尔的时间逻辑研究。

接下来的第三章是介绍混合逻辑的根岑演算。这在当前的混合逻辑文章中并不常见，然而根据笔者的观点，混合逻辑的根岑演算较之希尔伯特演算要直观而易用得多。文中的混合逻辑的根岑系统 $G_{H(@, \downarrow)}$ 是由一阶逻辑经过“解释—解说—语境化—内嵌”(IECI)的方法得到的。“解释”即是指将混合语句解释为其对应的语义；所谓“解说”则是将语义等价式视为一阶语句加以表达；“语境化”将由此得到一阶语句转换为带标签的混合语句；而“内嵌”则将标签机制变为混合语言的 $@$ -前缀形式。如此即可得到自动具有完全性的混合逻辑系统。

作为研究动机的拓扑认知逻辑在第四章加以讨论。文中首先介绍经典的谈论知识和信念的拓扑逻辑。在那之前给出了与拓扑有关的一些概念，以及拓扑模型和子集模型的定义。谈论知识的拓扑逻辑中的模态算子 $\diamond$ 被理解为“闭包”算子，其极小逻辑是正规模态逻辑 $S4$ ；谈论信念的拓扑逻辑中的模态算子 $\diamond$ 被理解为“导集”算子，其极小逻辑是 $KD45$ 。除了将模态算子重新解释之外，还可以采用在语言中添加其它模态算子的办法来加以解决，最受关注的大概是全称模态算子 $A$ 和差别算子 $\neq$ 。第4.7节引入谈论认知努力的二维拓扑逻辑 $SUBLOGIC$ 和 $TOPOLOGIC$ 。与之前不同的是，二维拓扑逻辑的语义使用点集 $(u, U)$ 来表示当前的状态。

当点集 $(u, U)$ 进入视野，根据混合均衡观（亦即“混合逻辑关注语法和语义之均衡”这一独特视角），论文在第五章引入了二维的混合语言 $H^2(@)$ 和 $H^2(@, \downarrow)$ ，它们刻画了所有的子集空间。与二维模态语言 $ML^2$ 相比，二维混合语言具有更强的表达能力。之后给出了刻画所有子集空间的二维混合逻辑 $G_{H^2(@)}$ 等。论文采用的根岑演算系统中 $Cut$ 可容许，具有子公式性质，并因此海尼曼的希尔伯特演算更具适应性。

结合对拓扑语义学和邻域语义学的考量，在论文第六章引入了空间语义学。简单地说，空间语义学可以被视为邻域语义学的“点集”版本，如果点集之间的属于关系通过邻域映射来定义（亦即 $u \in U : \Leftrightarrow U \in N(u)$ ），则它就表现为拓扑语义学的方式。论文将空间语义学归为到幂集克里普克语义学中以增进对它的理解。关于空间语义学的混合空间逻辑在随后被给出，

其语言中使用了两个常元以区分点集间的邻域映射与属于关系。拓扑空间的逻辑则更复杂一些，论文通过添加集合专名的构造子 $\cap$ 和 $\cup$ 以表达集合的交和并，并给出所得语言  $H^2U(@)$ 下的拓扑空间逻辑。论文最后探讨了二维混合语言对拓扑性质的表达能力。这类系统可以刻画许多经典模态逻辑、经典混合逻辑无法刻画的性质，同时具有很好的直观性。

笼统地说，第五和第六章是论文研究内容的主要部份。它以第二和第四章的内容为基础，采用混合均衡观将经典的混合语言扩充为双类型的混合语言，并讨论了该语言下的二维混合（子集）空间逻辑和拓扑逻辑。与一维的混合逻辑相比，二维混合逻辑在空间语义学（拓扑语义学、邻域语义学）下表现得更为自然。