

杨睿之：集合实在论与哥德尔计划一个价值辩护（2012）

本篇论文的目的在于为集合实在论以及基于这种数学哲学观点的哥德尔计划做辩护。

辩护的主要策略是论证集合实在论相比其它其他数学哲学思想对数学实践更好。这是一种价值论证。这种论证策略基于作者提出的审视诸数学哲学思想的全新视角，即考虑数学哲学思想与具体数学研究之间的实际关系。在本文的第五章，作者提出并定义了复复宇宙公理，并给出了该命题的一个一致性证明，即定理 5.2.11。

在导论中，我先澄清了一些有关的基本概念。例如，什么是数学实践，以及我是在什么意义上讨论数学哲学对数学实践的影响的。我阐明了什么是我所关心的数学的价值，并且证明了在某种意义上数学成果的价值在数学世界中是绝对的。因此，这种价值可以被用来衡量那些数学哲学思想的正当性。在该章的最后，我简要介绍了集合论公理，并说明了公理集合论是在何种意义上被接受为所有数学的基础的。

我在第二章中将主要解释集合实在论的基本思想，以及基于这种数学哲学而提出的哥德尔计划。我将展示受哥德尔计划启发而产生的丰富的数学成果，以从正面为集合实在论和哥德尔计划做辩护。我会具体讨论到数理逻辑和集合论中的各种一致性证明，大基数理论以及内模型计划。

接下来的三章会分别涉及三种典型的反对集合实在论的数学哲学思想。我将运用不同的方式论证这些数学哲学观点都不如集合实在论好。

第三章讨论构造主义。数学构造主义分为很多种，可以按照其对经典数学的不同程度的限制由强到弱地排列出来，从严格有穷主义到 Friedman 的开明的构造主义。我通过对两则案例的分析论证了构造主义的观念确实会妨碍一些具体的数学研究。一则是关于罗素分枝类型论与哥德尔可构成集类的分析，另一则是关于决定性公理一致性的证明。

在第四章，我会面对形式主义者挑战。我将论证哥德尔计划的推进不会导致某个数学领域的研究被淘汰或被忽略。相反，在维护经典数学的立场上，实在论者是形式主义者的盟友。

本文的最后一章用来讨论集合论多宇宙观。集合论多宇宙观是一种比较新颖的数学哲学观点，并且在近期人们讨论的热点。然而，我将论证这种数学哲学思想要么与实在论的思想相融，要么实际上就是一种形式主义。为帮助论证我的观点，我推广了 Hamkins 的关于复宇宙公理的想法，提出了复复宇宙公理，并证明了该公理与我们的集合概念是一致的。