知识表示和推理系统（RRS）表达能力比较

2009 年 3 月 22 日

马丽
Center for Logic, Language and Cognition, Peking University

主要内容

- **1. 什么是知识表示和推理系统 (RRS)？**
- **2. 为什么要研究 RRS 的表达能力？**
- **3. 比较 RRS 表达能力的各种等价性标准**
- **4. 各种等价性归约的实现方法**
- **5. 相关结果**
- **6. 参考文献**

1. 什么是 RRS？

哲学、逻辑学、计算机科学、人工智能等领域提出了众多用于知识表示和推理的系统。例如：

- 命题逻辑
- 模态逻辑
- 时态逻辑
- 逻辑程序
- 量化布尔公式

- 在给出知识表示和推理系统的形式定义之前，我们先来考察一下知识表示和推理系统需要具有那些性质；以及如果给我们一个知识表示和推理系统，我们该怎么利用它。

- 首先，建立一个知识表示和推理系统的目的是为了处理现实问题，理想化的目的是让计算机帮助我们解决现实问题。比如一所大学某学期的教室安排、办公大楼的电线及开关控制等等。

- 这些现实问题就是我们的任务，任务中涉及到的个体的集合不妨称为任务域。比如上面问题中的教室、课程、电线、开关、电器等等都是任务域里的个体。

- 如何表达这些任务域里的个体以及它们之间的关系？这就要求我们引入一种形式语言，给出初始符号和公式的形成规则，一个知识库就被表示成一个公式语言的合集。

- 有了语言，还要语义来解释语言中的符号和公式的意义。有了语义我们才能讨论我们所定义的语言是否恰

当的表示了任务域里的知识。

- 知识已经表示出来，那么怎么解决问题，或者说如何告诉计算机为我们解决问题？比如我们说如果接通开关 a，那么灯 b 是否会亮？这就需要有一个证明过程，把一些相关的公式作为前提条件，看看是否存在一个灯 b 会亮的推导序列，如有有则灯 b 会亮；否则，不然。

- 通俗地讲，一个知识表示和推理系统（RRS）分为三部分：形式语言，语义和推导关系

- 知识表示和推理系统为三元组（L，SEM，MOD）。其中，

- L 是一个公式的类，

- SEM 是一个解释的类，

- MOD$\subseteq$L$\times$SEM 是一个可满足关系。

- 由可满足关系我们可以定义推导关系。设（L, SEM, MOD）为一个知识表示和推理系统，α、β 为 L 中的两个公式。我们称从 α 可以推导出 β 如果对任意 M$\in$ SEM，当 MOD（α, M）时必有 MOD（β, M）。

- 例如：(PF,ASSIGN, SATISF), (CNF, ASSIGN, SATISF), (QBF，ASSIGN，QSATISF)，这些都是知识表示和推理系统。

2．为什么要研究知识表示和推理系统的表达能力？

- **面对这么多知识表示系统，人们不禁要问：怎么样去评估和比较不同的系统。对这个问题的研究有重要的应用价值，因为通过比较这些不同的系统，可以使我们在特定应用领域选取“最合适”的表示系统。**

- **评价和比较不同的知识表示和推理系统主要有以下两个标准 [23]：**

  1. 是否支持高效的推理？

  2. 是否具有足够的表达能力？

  20 多年来，对第一个问题的研究可以说比较彻底。例如，命题逻辑的推理问题是 NP 完全的；而建立在其上的各种非单调推理却具有更高的难度。但对于各种限制形式，推理问题却变得容易解决。对于第二个问题仍缺乏系统的研究。因此，系统地研究知知识表示和推理系统的表达能力具有重要意义，也是当今逻辑学界共同关注的问题。

  表面上看，这些只是表达能力的研究，实际上与计

算复杂性理论有着密不可分的关系，因而有着重大的理论意义。众所周知，在复杂性理论中有许多重大理论问题至今还无法解决。其中最著名的当属 P 是不是等于 NP。还有一些近年来提出的并行计算的重要猜想，都与表达能力的研究有关。例如，如果 Σ_1 型的量化布尔公式和命题公式具有同样的表达能力，则 P=NP，尽管这两种知识表示和推理系统的推理问题难度相同。表达能力的研究可以从一个全新的角度来认识这些重大难题。由此可见研究形式系统的表达能力的重要性。

3. 比较知识表示和推理系统的表达能力的各种等价性标准

- **3.1 等价.**
- **3.2 可满足性等价.**
- **3.3 有效性等价**
- **3.4 后承等价.**
- **3.5 可视性等价.**
- **3.6 模型等价.**

3.1 等价性

- **3.1 等价.**

- 比较知识表示和推理系统表达能力的主要标准是等价性，这也是一个非常直观的标准。若一个知识表示和推理系统 (L_1, SEM_1, MOD_1) 内的知识能够在另一个知识表示和推理系统 (L_2, SEM_2, MOD_2) 中被表示出来，显然知识表示和推理系统 (L_2, SEM_2, MOD_2) 的表达能力比 (L_1, SEM_1, MOD_1) 的强。如果两个知识表示和推理系统内的知识可以相互表达，则它们的表达能力是一样的。

3.1 等价性

- 公式的等价性：公式 α, β（可能来自相同系统）是等价的，记为：$\alpha \approx \beta$, 如果 α, β 有相同的模型。

- 相关结论：任意一个命题逻辑公式都存在与之等价的合取范式；任意一阶谓词逻辑公式都存在与之等价的前束范式

3.1 等价性

D.Poole 等人在《Computational Intelligence》中定义

- 称知识表示和推理系统 $\mathcal{L}_1$ 的表达能力不超过知识表示和推理系统 $\mathcal{L}_2$ 的表达能力，如果 $\mathcal{L}_1$ 中的任意公式都可等价地表示为 $\mathcal{L}_2$ 中的公式。
- 但是以等价性来比较表达能力有如下不足：
- 1．两个知识表示和推理系统之间可能不存在保等价性的归约。
- 2．两个知识表示和推理系统之间可能不存在多项式时间（或空间）可计算的保等价性的归约
- （其实归约是相对于各种等价性的现实方法，后面将作介绍。）

3.2 可满足性等价

因为等价性标准有以上两个弱点，所以人们又提出其它等价性标准来比较表达能力.

- **3.2 可满足性等价**
- 可满足性等价：公式 α, β 分别是系统（$\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{SEM}_1$, $\boldsymbol{MOD}_1$）和（$\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{SEM}_2$, $\boldsymbol{MOD}_2$）的公式（这两个系统可能相同），称 α 和 β 是可满足性等价的，记为：$\alpha \approx^{sat} \beta$，如果 α 在系统（$\boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{SEM}_1$，$\boldsymbol{MOD}_1$）中是可满足的当且仅当 β 在系统（$\boldsymbol{L}_2$，$\boldsymbol{SEM}_2$，$\boldsymbol{MOD}_2$）中是可满足的，也即它们有相同的可满足性。
- 相关结论：
- **1.** 若 $\alpha \approx^{sat} \beta$，则未必有 $\alpha \approx \beta$。
- **2.** 若 $\alpha \approx^{sat} \beta$，则未必有 $\alpha \wedge \gamma \approx \beta \wedge \delta$，其中 $\gamma \approx \delta$。

3.3 有效性等价

- **3.3 有效性等价**

- 有些知识表示和推理系统间的表达能力不宜用等价性的标准进行比较，例如一个二值逻辑系统和一个真值集为 $\{0, 1, 1/2\}$ 的三值逻辑系统就是这样。因为每个二值逻辑的公式都可以视为一个三值逻辑的公式，只要它的真值指派只取 0 或 1，而不取 1/2。但是任何一个三值逻辑的公式不能转化成一个二值逻辑的公式，因为二值逻辑中没有真值指派 1/2。也即在等价性标准下，二值逻辑系统的表达能力比三值逻辑系统（多值逻辑）的表达能力要弱。另外，对于同一个公式 $p \wedge \neg p$，在二值逻辑系统里是一个矛盾式，显然没有模型，而在有些三值逻辑系统中却有模型。这是一个很有趣的问题，显然用可满足性等价的标准来比较二值逻辑系统和多值逻辑系统之间的表达能力是不合适的。因此在比较二值逻辑和多值逻辑的表达能力时引入了有效性等价的标准，即两个逻辑系统的公式间有效性保持地

相互转化。

3.3 有效性等价

- 有效性:$\mathcal{L}$ 是一个知识表示和推理系统, α 是 $\mathcal{L}$ 的一个公式, 称 α 是有效的, 如果不存在使 α 为假的模型。

- 有效性等价: α, β 分别是知识表示和推理系统（$\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{SEM}_1$, $\boldsymbol{MOD}_1$）,（$\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{SEM}_2$, $\boldsymbol{MOD}_2$）的公式,(（$\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{SEM}_1$, $\boldsymbol{MOD}_1$）和（$\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{SEM}_2$, $\boldsymbol{MOD}_2$）可能相同)。称 α, β 是有效性等价的, 记为: $\alpha \approx^{val} \beta$, 如果 α 在（$\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{SEM}_1$, $\boldsymbol{MOD}_1$）中是有效的当且仅当 β 在（$\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{SEM}_2$, $\boldsymbol{MOD}_2$）中是有效的, 即它们有相同的有效性。

3.4 后承等价

- 在比较知识表示和推理系统表达能力时，可满足性等价只要求两个知识表示和推理系统的公式可以可满足性保持地相互转化，而没有考虑这两个公式的公共变元所表达的公式的可满足性问题。因此学者们又提出了更加细致、合理的研究标准，如后承等价。后承等价不仅要求可满足性等价，对于原来被比较的两个公式 α 和 β 的公共变元所表达的任意公式 γ 及 α 的模型 M 和 β 的模型 N，都有 M$\vDash\gamma$ 当且仅当 N$\vDash\gamma$。

- 后承等价：α, β 分别是知识表示和推理系统（L_1, SEM_1, MOD_1），（L_2，SEM_2，MOD_2）的公式，（（L_1，SEM_1，MOD_1）和（L_2，SEM_2，MOD_2）可能相同）。称 α 和 β 是后承等价的，记为：$\alpha\approx^{ent}\beta$，如果对于 α 的每个模型 $M\in SEM_1$ 存在一个 β 的模型 $N\in SEM_2$，并且对于任意 $var(\alpha)\cap var(\beta)$ 上的变元表达的公式 γ，$M\vDash\gamma$ 当且仅当 $N\vDash\gamma$，反之亦然。

3.4 后承等价

- 定理 1：α, β 分别是知识表示和推理系统（L_1, SEM_1, MOD_1），（L_2，SEM_2，MOD_2）的公式，(（L_1，SEM_1，MOD_1）和（L_2，SEM_2，MOD_2）可能相同）。若 $\alpha \approx^{ent} \beta$，则对于任意 var（α）$\cap$ var（β）上的变元表达的公式 γ，γ 在 α 的任意模型上为真当且仅当 γ 在 β 的任意模型上为真。（证明从略）

- 此定理的直观意义即：若 $\alpha \approx^{ent} \beta$，则它们在 var（α）$\cap$ var（β）上的语义后承是相同的，这也是为何将此等价性命名为后承等价的原因。

3.4 后承等价

- 定理 2：α, β 分别是知识表示和推理系统（L_1, SEM_1, MOD_1），（L_2，SEM_2，MOD_2）的公式，（（L_1，SEM_1，MOD_1）和（L_2，SEM_2，MOD_2）可能相同）。如果 $var(\alpha) \cap var(\beta) = \emptyset$，则 $\alpha \approx^{ent} \beta$ 当且仅当 $\alpha \approx^{sat} \beta$。（证明略）

- 该定理即：当 $var(\alpha) \cap var(\beta)$ 是空集时，可满足性等价和后承等价是一样的。

3.5 可视性等价

- 后承等价虽然能够比可满足性等价更加细致、更加深入地比较知识表示和推理系统的表达能力，因为它比可满足性等价考虑的更加周到。但是，能不能更加深入地探讨两个公式的模型之间的关系？学者们又将两个公式的模型间是否存在某种函数关系考虑进去，随后又引入了可视性等价的比较标准。

- 可视性等价：α, β 分别是知识表示和推理系统（L_1, SEM_1, MOD_1），（L_2，SEM_2，MOD_2）的公式，（（L_1，SEM_1，MOD_1）和（L_2，SEM_2，MOD_2）可能相同）。α，β 被称作是可视性等价的，记为：$\alpha \approx^{vis} \beta$。如果 α 的模型和 β 的模型之间存在一个双射 f, f 称为可视映射。并且对于一个可视变量集 Ω，α 是 Ω 上的任意公式，任意 $M \in SEM_1$，任意 $N \in SEM_2$ 有：$M \vDash \alpha$ 当且仅当 $f(M) \vDash \alpha$，$N \vDash \alpha$ 当且仅当 $f^{-1}(N) \vDash \alpha$ 成立。

3.5 可视性等价

- 定理：α, β 分别是知识表示和推理系统（L_1, SEM_1, MOD_1），（L_2，SEM_2，MOD_2）的公式，（（L_1，SEM_1，MOD_1）和（L_2，SEM_2，MOD_2）可能相同）。若 $\alpha \approx^{vis} \beta$，则 $\alpha \approx^{ent} \beta$。（证明略）

- 注：可视性等价的直观语义解释是公式 α 和公式 β 的后承集是相同的。而后承等价只要求公式 α 和公式 β 在 $var(\alpha) \cap var(\beta)$ 上的后承集是相同的。因此后承等价是可视性等价的一种特殊情况。

3.6 模型等价

- 随着知识表示和推理系统表达能力比较工作的深入进行，学者们将不同的条件加入等价性标准中进行研究。两个公式 F_1 和 F_2 的模型之间如果存在某个函数关系，那么这个函数关系能不能有效地计算显然关系到研究的结果。如果一个函数在人类存在的时间内都不能计算出结果，那么这个函数就失去现实意义。因此，学者们讨论模型间函数关系是不是多项式时间可计算的，这样研究出的结果才更有现实意义。

（这一部分涉及到判定型和非判定型图灵机以及一些计算复杂性方面的知识，如 P_{time}、P_{space}、NP_{time}、NP_{space}、$\mathrm{P}_{complete}$、$\mathrm{NP}_{complete}$、P_{hard}、NP_{hard} 等相关内容，这里不做叙述。）

3.6 模型等价

- 模型等价：α, β 分别是知识表示和推理系统（$\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{SEM}_1, \boldsymbol{MOD}_1$），（$\boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{SEM}_2, \boldsymbol{MOD}_2$）的公式,（（$\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{SEM}_1, \boldsymbol{MOD}_1$）和（$\boldsymbol{L}_2$，$\boldsymbol{SEM}_2$，$\boldsymbol{MOD}_2$）可能相同）。公式 α 和公式 β 是模型等价的，记为：$\alpha \approx^{mod} \beta$，如果公式 α 的模型和公式 β 的模型之间存在一个多项式时间可计算的 **1-1** 对应 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}$ 称之为模型映射。[19]

- 定理：当可视性等价中的双射是多项式时间可计算的并且可视变元的集合是个空集时，模型等价是可视性等价的一种特殊情况。 证明略.

4. 比较知识表示和推理系统表达能力的方法

- 研究知识表示和推理系统的表达能力的主要使用归约的方法，相对于上面给出的各种等价性标准，可以定义相应的归约：等价归约、可满足性等价归约、后承等价归约、有效性等价归约、模型等价归约等，还探讨了各种归约之间的联系。通过分析后承等价归约和可满足性等价归约之间的联系，又引进了真后承等价归约、强真后承等价归约等概念，并且对各知识表示和推理系统进行相应的等价性归约。

各种等价性归约

- 一般说来，对于一个 **X-** 等价，**X**$\in\{\phi$，可满足性，后承，有效性，可视性，模型 $\}$，我们可以在知识表示和推理系统之间定义一个归约关系 $\preceq^{X-equ}$，即保持 **X** 等价性不变的归约。由各种等价性自然地引出如下归约：
- 等价性归约
- 可满足性等价归约
- 后承等价归约
- 真后承等价归约
- 强真后承等价归约
- 有效性等价归约
- 模型等价归约

各种等价性归约

- 设 $\mathcal{L}_1=(\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{SEM}_1, \boldsymbol{MOD}_1)$, $\mathcal{L}_2=(\boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{SEM}_2, \boldsymbol{MOD}_2)$ 是两个知识表示和推理系统，f:$\boldsymbol{L}_1 \rightarrow \boldsymbol{L}_2$ 是一个函数。称 f 是从 $\mathcal{L}_1$ 到 $\mathcal{L}_2$ 的 X- 等价归约，如果对于任意的公式 $\alpha\in\boldsymbol{L}_1$ 都有 α 和 f(α) 是 X- 等价的。

- 称逻辑系统 $\mathcal{L}_1$ 可以 X- 等价归约到知识表示和推理系统 $\mathcal{L}_2$，如果存在从 $\mathcal{L}_1$ 到 $\mathcal{L}_2$ 的 X- 等价归约 f，记为：$\mathcal{L}_1\preceq^{X-equ}\mathcal{L}_2$。如果有 $\mathcal{L}_1\preceq^{X-equ}\mathcal{L}_2$ 和 $\mathcal{L}_2\preceq^{X-equ}\mathcal{L}_1$ 同时成立，则称知识表示和推理系统 $\mathcal{L}_1$ 和知识表示和推理系统 $\mathcal{L}_2$ 表达能力是 X- 等价的。

- 上面的这些定义中，如果要求 f 是一个多项式时间（或者多项式空间）可计算的，那么称 $\mathcal{L}_1$ 可以多项式时间（或者多项式空间）X- 等价归约到 $\mathcal{L}_2$，记为：$\mathcal{L}_1\preceq^{X-equ}_{ptime}\mathcal{L}_2$ （或者 $\mathcal{L}_1\preceq^{X-equ}_{pspace}\mathcal{L}_2$）。如无特殊说明，本文中出现的“多项式”都是以公式的长度为参数。

等价性归约

- 等价性归约：称知识表示和推理系统 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 是等价的，记为 $\mathcal{L}_1 \asymp \mathcal{L}_2$，如果 $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$，并且 $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_1$。
- 相关结论：
- $\boldsymbol{CNF} \asymp \boldsymbol{PF}$
- $\boldsymbol{PF} \not\preceq^{equ}_{pspace} \boldsymbol{CNF}$
- 这两个定理共同说明：在不考虑空间约束条件下等价的两个知识表示和推理系统，在加入空间约束后可能是不等价的。也就是说，两个知识表示和推理系统在理论上也许是等价的，但是实际应用中也许不能实现。这是与计算机的存储能力密切相关的。一个指数级表达的公式如果在计算机里不能够全部表示出来当然就不能对它进行操作。所以，空间复杂性是理论应用于实践的过程中必须考虑的问题之一。

可满足性等价归约

- 相关结论：
- 多项式时间可判定问题：一个问题是多项式时间可判定的，如果存在一个多项式时间复杂度的算法判定它。
- 定理：如果知识表示和推理系统 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的可满足性问题（即模型存在问题）具有相同的多项式时间复杂性，那么 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 可以多项式时间可满足性等价地相互归约，即 $\mathcal{L}_1 \preceq_{ptime}^{sat-equ} \mathcal{L}_2$ 且 $\mathcal{L}_2 \preceq_{ptime}^{sat-equ} \mathcal{L}_1$。

后承等价归约

- 在后承等价部分有如下结论：α 和 β 是两个公式（可能来自两个不同的系统），如果 $\boldsymbol{var}(\alpha)\cap\boldsymbol{var}(\beta)=\emptyset$, $\emptyset$ 表示空集。则有：$\alpha\approx^{ent}\beta$ 当且仅当 $\alpha\approx^{sat}\beta$。一般地，当 $\boldsymbol{var}(\alpha)\cap\boldsymbol{var}(\beta)\neq\emptyset$ 时，有如下的关系成立。下面用一个定理来详细表述后承等价归约和可满足性等价归约之间的关系：

- 定理：如果 $\mathcal{L}_1\preceq^{sat-equ}_{ptime}\mathcal{L}_2$，那么 $\mathcal{L}_1\preceq^{ent-equ}_{ptime}\mathcal{L}_2$。

真后承等价归约

- 真后承等价归约：知识表示和推理系统 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 之间的一个多项式时间（或者多项式空间）后承等价归约 f：$\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$，$f$ 被称作 $\mathcal{L}_1$ 到 $\mathcal{L}_2$ 的多项式时间（或者多项式空间）真后承等价归约，如果对于 $\mathcal{L}_1$ 中的每个公式 α，α 中的所有变元也在 $\boldsymbol{f}(\alpha)$ 中出现，记为：$\mathcal{L}_1 \preceq_{ptime}^{proper-ent-equ} \mathcal{L}_2$，(或者 $\mathcal{L}_1 \preceq_{pspace}^{proper-ent-equ} \mathcal{L}_2$)。
- 定理：$\exists \mathbf{PF}^* \preceq_{ptime}^{proper-ent-equ} \mathbf{PF}$
- 定理：$\mathbf{PF} \preceq_{ptime}^{proper-ent-equ} \mathbf{CNF}$

真后承等价归约

- **定理：$\mathbf{PF}\preceq_{ptime}^{proper-ent-equ}\mathbf{CNF}$**

- **在这里以该定理为例，给出其证明，演示一下知识表示和推理系统公式之间的归约。**

- 证明：对于命题逻辑系统 PF 的任意一个公式 α，设计如下算法 f，使得 f 是从 PF 到 CNF 的多项式时间真后承等价归约函数：

(1) 将 α 中的 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 去掉，即用 $\neg$，$\wedge$ 和 $\vee$ 表示，得到公式 α_1。

(2) 将 $\neg$ 逐步内移至命题变元之前，并消去 $\neg\neg$，得到公式 α_2。

(3) 对 α_2 使用 **Tseitin 方法**，即将形为 $\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$ 的子公式可满足性等价地转化成 $(\alpha\vee\mathrm{y})\wedge(\beta\vee\neg\mathrm{y})\wedge(\gamma\vee\neg\mathrm{y})$，直到公式中不可再用此方法为止，得到公式 α_3，其中 y 是一个新引入的命题变元。

(4) 令 $f(\alpha)=\alpha_3$。

Tseitin 方法是一个将命题公式保持可满足性地转化为 CNF 公式的方法, 即 $f(\alpha)\in CNF$。因为算法 f 的每一步都只需多项式时间, 并且它只有 4 步, 所以 f 是多项式时间可计算的。所以 $PF\preceq_{ptime}^{sat-equ}CNF$。由定理 4.3.1 知：如果 $\mathcal{L}_1\preceq_{ptime}^{sat-equ}\mathcal{L}_2$，那么 $\mathcal{L}_1\preceq_{ptime}^{ent-equ}\mathcal{L}_2$。所以 $PF\preceq_{ptime}^{ent-equ}CNF$。又因为 α 中的所有命题变元都在 $f(\alpha)$ 中出现，显然 f 是真后承等价归约。f 是从 PF 到 CNF 的多项式时间真后承等价归约，即 $PF\preceq_{ptime}^{proper-ent-equ}CNF$。

强真后承等价归约

- 强真后承等价归约：一个（多项式时间或者多项式空间）真后承等价归约 f：$\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ 被称作强真的，如果还存在一个多项式时间可计算的函数

  g：$\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{SEM}_1 \to \boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{SEM}_2$ 使得 g$(\alpha, \boldsymbol{M})$ 是 f(α) 的一个模型，其中 $\boldsymbol{M}$ 是 α 的一个模型，$\alpha \in \boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{SEM}_1$。分别用记法 $\mathcal{L}_1 \preceq_{ptime}^{strg-proper-ent-equ} \mathcal{L}_2$ 来表示存在从 $\mathcal{L}_1$ 到 $\mathcal{L}_2$ 的多项式时间强真后承等价归约；用记法 $\mathcal{L}_1 \preceq_{pspace}^{strg-proper-ent-equ} \mathcal{L}_2$ 来表示存在从 $\mathcal{L}_1$ 到 $\mathcal{L}_2$ 的多项式空间强真后承等价归约。

- $\mathbf{PF} \preceq_{ptime}^{strg-proper-ent-equ} \mathbf{CNF}$

强真后承等价归约

- 能够被单带确定型图灵机在多项式时间内判定的问题的类记作 P；能够被单带非确定型图灵机在多项式时间内判定的问题的类记作 NP。非确定型图灵机的定义请参阅参考文献 [18]。

- 如果 q 是 P 问题，且 P 中其他问题都能在多项式时间内归约到 q 则称 q 是 P 完全的。同样，如果 q 是 NP 问题，且 NP 中其他问题都能在多项式时间内归约到 q 则称 q 是 NP 完全的。

- CNF 的可满足性问题被称为 SAT 问题。并且由杂性理论的相关研究结论知 SAT 问题是 NP 完全的。

- 定理：$\exists \mathbf{PF}^* \preceq_{ptime}^{strg-proper-ent-equ} \mathbf{PF}$ 蕴含 $NP{=}P$。

- 由上面的定理可以看出比较知识表示和推理系统表达能力竟然也是一个考察 P=?NP 问题的一个突破点。

有效性等价归约

- 一个逻辑系统（$\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{SEM}$, $\boldsymbol{MOD}$）有规则的否定形式，如果满足以下条件： $\boldsymbol{L}$ 在否定符号 $\neg$ 下是封闭的，即若 $\alpha\in\boldsymbol{L}$ 则 $\neg\alpha\in\boldsymbol{L}$；且 α 是不可满足的当且仅当 $\neg\alpha$ 是有效的。

- 并非所有的知识表示和推理系统都是有规则否定形式的，如若逻辑系统 $\boldsymbol{CNF}$ 就没有规则的否定形式。

- （$\mathbf{L}_1$, $\mathbf{SEM}_1$, $\mathbf{MOD}_1$），（$\mathbf{L}_2$, $\mathbf{SEM}_2$, $\mathbf{MOD}_2$）是两个有规则否定形式的知识表示和推理系统，则有以下两个定理成立：

- 定理：若（$\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{SEM}_1$, $\boldsymbol{MOD}_1$）$\preceq^{Sat-equ}_{ptime}$（$\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{SEM}_2$, $\boldsymbol{MOD}_2$）成立，则有（$\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{SEM}_1$, $\boldsymbol{MOD}_1$）$\preceq^{val-equ}_{ptime}$（$\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{SEM}_2$, $\boldsymbol{MOD}_2$）成立。

- 定理：若（$\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{SEM}_1$, $\boldsymbol{MOD}_1$）$\preceq^{Sat-equ}_{pspace}$（$\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{SEM}_2$, $\boldsymbol{MOD}_2$）成立，则有（$\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{SEM}_1$, $\boldsymbol{MOD}_1$）$\preceq^{val-equ}_{pspace}$（$\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{SEM}_2$, $\boldsymbol{MOD}_2$）成立。

模型等价归约

- 多项式时间模型等价归约和多项式空间模型等价归约的概念在【19】中首次被赵希顺和 Hans 提出。这两个概念的提出旨在更加细致地比较不同逻辑系统的表达能力。以这两个概念为标准，他们比较了命题逻辑系统和量化布尔公式系统之间的表达能力。他们的研究结果表明：在一些公认的计算复杂性猜想下，一些具有相同复杂性的理论集可能具有不同的表达能力。本节主要介绍他们在【19】中的部分相关工作。

- 多项式时间模型等价归约：$\mathcal{L}_1=(\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{SEM}_1, \boldsymbol{MOD}_1)$ 和 $\mathcal{L}_2=(\boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{SEM}_2, \boldsymbol{MOD}_2)$ 是两个逻辑系统，称 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 是多项式时间模型等价的，记为 $\mathcal{L}_1 \preceq_{ptime}^{Mod-equ} \mathcal{L}_2$，如果存在多项式时间可计算函数 $\mathbf{f}$:$L_1 \rightarrow L_2$ 和多项式时间可计算函数 g:$\boldsymbol{SEM}_1 \rightarrow \boldsymbol{SEM}_2$，且对于 $\mathcal{L}_1$ 的任意公式 α 和模型 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{M} \vDash \alpha$ 当且仅当 $\mathrm{g}(\boldsymbol{M}) \vDash \mathrm{f}(\alpha)$。

- 多项式空间模型等价归约：$\mathcal{L}_1=(\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{SEM}_1, \boldsymbol{MOD}_1)$ 和 $\mathcal{L}_2=(\boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{SEM}_2, \boldsymbol{MOD}_2)$ 是两个逻辑系统，称

$\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 是多项式时间模型等价的, 记为 $\mathcal{L}_1 \preceq_{ptime}^{Mod-equ} \mathcal{L}_2$, 如果存在多项式时间可计算函数 f:$\boldsymbol{L}_1 \rightarrow \boldsymbol{L}_2$ 和多项式空间可计算函数 g:$\boldsymbol{SEM}_1 \rightarrow \boldsymbol{SEM}_2$, 且对于 $\mathcal{L}_1$ 的任意公式 α 和模型 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M} \vDash \alpha$ 当且仅当 g($\boldsymbol{M}$)$\vDash$f(α)。

- 相关结论：
- 1. $DNF \preceq_{ptime}^{mod-equ} CNF$
- 2. $CNF \asymp_{ptime}^{mod-equ} 3CNF$
- 3. $CNF \preceq_{ptime}^{mod-equ} PF$
- 4. $\exists CNF^* \asymp_{ptime}^{mod-equ} \exists 3CNF^*$
- 5. $PF \preceq_{ptime}^{mod-equ} \exists CNF^*$ 等等。

参考文献

[1] J.L.Bell, M.Machover, A Course in Mathematical Logic, North-Holland Publishing Company, 1977.

[2] N.Cutland, Computability（An introduction to recursive function theory）, Cambridage University Press, 1980.

[3] Heinz-Dieter Ebbinghaus,Jorg Flum,Finite Model Theory, Springer-Verlag Berlin , Second Revised and Enlarged Edition, 1999.

[4] M.Gelfond, H. Przymusinska, and T.Ptzymusinki, On the Relationship Between Circumscription and Negation as Failure, Artificial Intelligence 38（1989）, 75-94

[5] M.Gelfond, V. Lifschitz, The Stable Model Semantics for Logic Programming, In Proceedings of the 5th International Conference on Logic Programming, 1070-1080, The MIT Press, 1988.

[6] M.Gelfond, V. Lifschitz, Classical Negation in Logic Programs and Disjunction Database, New Generation Computing, 9（1991）,365-385.

[7] G.Gogic, H. Kautz, C. Papadimitriou, and B. Selman, The Comparative Linguistics of Knowledge Representation, In Proceedings of IJCAI-95, Montreal, Canada, 1995.

[8] A.G.Hamilton,Logic for Mathematicians,（Revised Edition），清华大学出版社，2003.

[9] T.Janhunen, E. Oikarinen, Capturing Parallel Circumscription with Disjunctive Logic Programs, Proceedings JELIA'04,134-146。

[10] M. Karpinski, H. Kleine Büning, and P.H. Schmitt, On the Computational Complexity of Quantified Horn Clauses, Lecture Notes in Computer Science 329, 129-137, Springer-Verlag, 1987.

[11] H.Kleine Buning, Theodor Lettman, Propositional Logic Deduction and Algorithms, Cambridage University Press,1999.

[12] V.Lifschitz, Circumscription, in Handbook of Logic in AI and Logic Programming, vol. 3, 298-352, Oxford University Press, 1994.

[13] J.W.Lloyd Foundations of Logic Programming, Springer-Verlag Berlin, Second editon,1987.

[14] D.Mundici, Many-Valued logic via Renyi-Ulam games .

[15] G.Priest, An Introduction to Non-Classical Logic, Cambridge University Press, 2001

[16] T.Przymusinski, On the Declarative and Procedural Semantics of Stratation Computing 9（1991）, 401-424.

[17] T.Przymusinski, On the Declarative and Procedural Semantics of Stratefied Deductive Database, In Foundation of Deductive Database and Logic Programming, 193-216, Morgan Kaufman, 1988.

[18] M.Sipser，Introduction to the Theory of Computation，China，Machine Press，2002.

[19] X.Zhao ,Hans Kleine Buning, Model-Equivalent Reductions, Springer-Verlag Berlin Heidelberg , 2005

[20] X.Zhao, Representing Systems and Model-Equivalence Reductions, 2007

[21] X.Zhao, A Comparison of Semantics of Disjunctive Logic Programs Based on Model-Equivalent Reduction, 2007

[22] 王怀民，逻辑程序的语义问题（I），计算机科学 1994 Vol.21.NO.1 。

[23] D.Poole, A.Mackworth, R.Goebel. Computational Intelligence. New York, Oxford, Oxford University Press, 1998, p193.

Thank You !