模态逻辑的邻域语义学

刘壮虎

（北京大学哲学系，北京，100871，liuzhh@ pku.edu.com）

摘　要

从对内涵的形式化和建立内涵逻辑的路径的角度，简单地介绍一般命题逻辑的邻域语义学，着重分析了一般的典范模型的思想和构造，作为讨论模态逻辑邻域语义学的基础。在模态逻辑邻域语义学中讨论必然性的意义，并给出相应的形式刻画。提出了必然性的一些类型，并从语义上给出了一些重要的逻辑。给出最一般的模态推演系统，并证明它们的模型完全性。对语义上给出的那些逻辑构造其相应的模态推演系统，使用两种不同类型的典范模型证明它们的完全性。

§1　一般命题逻辑的邻域语义学

一、内涵和内涵逻辑

弗雷格建立外延逻辑的路径非常简单，将语句解释为真值（真、假），将联结词解释为真值函项（真值到真值的函数）。

语句 $\longrightarrow$ 真值（真、假）
联结词 $\longrightarrow$ 真值函项（真值到真值的函数）

按弗雷格路径建立内涵逻辑，就是将语句解释为内涵，将联结词解释为内涵算子（内涵到内涵的函数）。只需要考虑什么是内涵？，

语句 $\longrightarrow$ 内涵（？）
联结词 $\longrightarrow$ 内涵算子（内涵到内涵的函数）

一种经典的观点：内涵是可能世界到外延（真值）的函数，按这样的路径建立的逻辑就称为内涵逻辑。而邻域语义学就是刻画内涵逻辑的最一般的语义学。

在这种路径中，无法区分内涵、涵义、命题。如果想区分它们，就要采取另外的路径。

1. 虽然很多逻辑实际上并不是按这种方式建立的，但我们可以按这种路径重新解释它们，这类似于数学归结成集合论。

2. 一些简单的可能世界语义，如模态逻辑、相关逻辑、直觉主义逻辑等，很容易转化成邻域语义。一些语义除可能世界外，还有其它复杂的成分，但这样的做法是因为受限于对可能世界的理解，或者是研究的习惯和方便。实际上，它们依然是另一种可能世界上的内涵和内涵算子。

例如依赖于路径的时态逻辑，可以用时间点和路径的二元组的集合作为可能世界。

3. 组合原则与将联结词解释成算子是等价的。可以认为组合原则是算子解释的哲学基础，也可以认为组合原则是对算子解释的直观说明。

只要一种语义学是符合组合原则的，则一定可以转化了邻域语义。所以邻域语义也是符合组合原则的最一般的语义。

4. 内涵和外延还有一个重要差别：外延只有一个，而内涵有很多个。给定一个非空集合作为可能世界，就有一集内涵，而内涵算子只是对一集内涵来说的，而不是对于所有内涵说的。

二、转换和嵌入

将外延表示成 $2=\{0, 1\}$。在内涵就表示为 $2^W=\{f\,|\,f\text{：}W\to\{0, 1\}\}$，n 元内涵算子就表示为 F：$(2^W)^n\to 2^W$。

外延可以嵌入中内涵中，所以外延可以看作一种特殊的内涵。

$$\mathbf{0}\text{：}W\to\{0, 1\} \quad \mathbf{0}(x) = 0\text{，}\mathbf{1}\text{：}W\to\{0, 1\} \quad \mathbf{1}(x) = 1$$

同样的，外延算子（真值函项）也可以嵌入内涵算子中，所以外延算子可以看作一种特殊的内涵算子。

还可以有外延到内涵的算子 F：$2\to 2^W$ 和内涵到外延的算子 F：$2^W\to 2$，它们同样可以嵌入内涵算子中作为一种特殊的内涵算子。

2^W 可以转换成 $\mathscr{P}(W)$，这样 n 元内涵算子就表示为 F：$\mathscr{P}(W)^n\to\mathscr{P}(W)$。这样的 F 可以转换成 N：$W\to\mathscr{P}(\mathscr{P}(W)^n)$，称为 n 元邻域映射。

邻域语义学使用的就是邻域映射。

这种在数学中等价的转换在实践中是不一样的，研究方法不同，直观解释也有区别。以后称 $\mathscr{P}(W)$ 中的元素（W 的子集）为命题。

例如，使用 $\mathscr{P}(W)$ 一般要比使用处理 2^W 简单。又如 F：$\mathscr{P}(W)^n\to\mathscr{P}(W)$ 更抽象一些，N：$W\to\mathscr{P}(\mathscr{P}(W)^n)$ 更容易给出直观意义。

外延算子在 F：$\mathscr{P}(W)^n\to\mathscr{P}(W)$ 中表示为布尔算子，在 N：$W\to\mathscr{P}(\mathscr{P}(W)^n)$ 中的

表现就不是那么清楚。（我专门研究过外延到内涵的算子和外延算子在邻域语义中的刻画条件）

二、一般命题逻辑的形式语言

一个(命题)形式语言由初始符号和形成规则组成：

初始符号

(1) 命题变项；(2) 命题常项集 C；(3) 命题联结词集 F。

命题变项有可数多个，用 p, q, r 等表示。C 的元素用 c, d, e 等表示，C 可以是空集。F 的元素用 f, g, h 等表示，对每个 $f\in$F，有一个元数 n≥1，f 称为 n 元联结词，（F 中至少有一个元数≥2 的联结词）。

形成规则

(1) 命题变项和命题常项是公式；

(2) 如果 f 是 n 元命题联结词，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个公式，则 $f\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是公式；

(3) 只有以上的是公式。

因为联结词可以有不同的元数，所以一律采用前缀方式。

不同的形式语言的区别在于命题常项集 C 和命题联结词集 F。所以可以将形式语言记为 P = <C, F>。P 的全体公式记为 **Form**(P)，当 P 是已知时，简记为 **Form**。

三、邻域语义学

我们对一般的(命题)形式语言构造一种语义学，邻域语义学。邻域语义学适合大多数命题逻辑。

1.1 定义 邻域 W 是一个非空的集合，W 到 $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathrm{W})^n)$的映射 N 称为 W 的任给 $x\in$W，N(x)称为 x 的 n 元邻域类，N(x)中的元素称为 x 的 n 元邻域。■

由定义可知，n 元邻域是 W 的子集的 n 元有序组。

n 元邻域映射 N 可以构造从$\mathscr{P}(\mathrm{W})^n$到$\mathscr{P}(\mathrm{W})$的映射

$$\mathrm{N}^*: \mathscr{P}(\mathrm{W})^n\to\mathscr{P}(\mathrm{W}) \quad \mathrm{N}^*(<S_1,\cdots, S_n>) = \{x \mid <S_1,\cdots, S_n>\in\mathrm{N}(x)\}$$

称为 n 元内部映射。它们之间的关系是：

$$<S_1,\cdots, S_n>\in\mathrm{N}(x)，\text{当且仅当，}x\in\mathrm{N}^*(<S_1,\cdots, S_n>)。$$

1.2 定义 框架 P = <C, F>是形式语言，$\mathfrak{K} = <\mathrm{W}, \{\mathrm{E}_c \mid c\in\mathrm{C}\}, \{\mathrm{N}_f \mid f\in\mathrm{F}\}>$称为 P 的一个框架，其中：

(1) W 是一个非空的集合，称为可能世界集，W 的元素称为可能世界；

(2) 任给 c∈C，都有 $\mathrm{E}_c \subseteq \mathrm{W}$；

(3) 任给 $f\in$F，如果 f 是 n 元算子，则 N_f 是 W 的 n 元邻域映射。■

记 W = ||$\mathfrak{K}$||，E_c 称为 c 在 $\mathfrak{K}$ 中的解释，N_f 称为 f 在 $\mathfrak{K}$ 中的解释。

当不需要指明 P 时，P 的框架简称框架。当不需要指明 C 和 F 时，框架简记为 $\mathfrak{K}$ = <W, E_c, N_f>。

外延联结词¬和∧的邻域解释分别是：

$N_{\neg}(x) = \{S \mid x \notin S\}$，$N_{\wedge}(x) = \{<S, Q> \mid x \in S$ 且 $x \in Q\}$。

另外三个一元外延联结词的解释分别是：

$N_1(x) = \{S \mid x \in S\}$（恒等），$N_2(x) = \mathscr{P}(W)$（恒真），$N_3(x) = \varnothing$（恒假）。

□（必然）的邻域解释（关系语义学中 R 的翻译）是：

$N_R(x) = \{S \mid R_x \subseteq S\}$，其中 $R_x = \{y \mid <x, y> \in R\}$。

1.3 定义　赋值和模型　P = <C, F>是形式语言，$\mathfrak{K}$ 是 P 的框架，W = ||$\mathfrak{K}$||，$\mathfrak{K}$ 上的一个赋值是 **Form**(P)到$\mathscr{P}$(W)的映射 V，并且满足：

(1) 任给 c∈C，都有 V(c) = E_c；

(2) 任给 f∈F，任给公式$\alpha_1 \cdots \alpha_n$，任给 x∈W，都有

$x \in V(f\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 当且仅当 $<V(\alpha_1), \cdots, V(\alpha_n)> \in N_f(x)$，

也就是任给 f∈F，任给公式$\alpha_1 \cdots \alpha_n$，都有

$V(f\alpha_1 \cdots \alpha_n) = N_f^*(<V(\alpha_1), \cdots, V(\alpha_n)>)$。

$\mathfrak{M}$ = <$\mathfrak{K}$, V>称为 P 的模型。■

记||$\mathfrak{M}$|| = ||$\mathfrak{K}$||。当不需要指明 P 时，P 的模型简称模型。

1.4 定理　组合原则　V 和 V′是两个赋值。

(1) 任给 n 元算子 f，如果 $V(\alpha_1) = V'(\alpha_1), \cdots, V(\alpha_n) = V'(\alpha_n)$，则

$V(f\alpha_1 \cdots \alpha_n) = V'(f\alpha_1 \cdots \alpha_n)$。

(2) 设α中的命题变项在 $p_1, \cdots, p_m$ 中。如果

任给 1≤i≤m，都有 $V(p_i) = V'(p_i)$，

则 $V(\alpha) = V'(\alpha)$。■

由组合原则，赋值 V 由 V 在命题变项上的值唯一确定，所以构造赋值 V 只需构造 V 在命题变项上的值就可以了。更进一步，对于命题变项在 $p_1, \cdots, p_m$ 中的公式构造赋值 V 时，只需构造 V 在 $p_1, \cdots, p_m$ 上的值就可以了。

1.5 定理　等值置换定理　V 是赋值，α, β, γ是公式。如果 $V(\beta) = V(\gamma)$，则 $V(\alpha) = V(\alpha[\gamma/\beta])$。■

定理 1.6 也是组合原则的体现。

1.6 定义　满足和模型有效　$\mathfrak{M}$ = <$\mathfrak{K}$, V>是模型，W = ||$\mathfrak{M}$||，x∈W，α是公式，A 是公式集。

(1) $\mathfrak{M} \models_x \alpha =_{\mathrm{df}} x \in \mathrm{V}(\alpha)$。$\alpha$在 x 上真。

(2) $\mathfrak{M} \models_x A =_{\mathrm{df}}$ 任给$\alpha \in A$，都有 $\mathfrak{M} \models_x \alpha$（$x \in \bigcap\{\mathrm{V}(\alpha) \mid \alpha \in A\}$）。$A$ 在 x 上真。

(3) $\mathfrak{M} \models \alpha =_{\mathrm{df}}$ 任给 $x \in \mathrm{W}$，都有 $\mathfrak{M} \models_x \alpha$（$\mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{W}$）。$\mathfrak{M}$ 满足α。

(4) $\mathfrak{M} \models A =_{\mathrm{df}}$ 任给$\alpha \in A$，都有 $\mathfrak{M} \models \alpha$（任给$\alpha \in A$，都有 $\mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{W}$）。$\mathfrak{M}$ 满足 A。

■

1.7 定义　框架有效　$\mathfrak{K}$ 是框架，Γ是框架类，α是公式，A 是公式集。

(1) $\mathfrak{K} \models \alpha =_{\mathrm{df}}$ 任给 $\mathfrak{K}$ 上赋值 V，都有$<\mathfrak{K}, \mathrm{V}> \models \alpha$。$\mathfrak{K}$ 满足α。

(2) $\mathfrak{K} \models A =_{\mathrm{df}}$ 任给$\alpha \in A$，都有 $\mathfrak{K} \models \alpha$。$\mathfrak{K}$ 满足 A。

(3) $\Gamma \models \alpha =_{\mathrm{df}}$ 任给 $\mathfrak{K} \in \Gamma$，都有 $\mathfrak{K} \models \alpha$。$\Gamma$满足$\alpha$。

(4) $\Gamma \models A =_{\mathrm{df}}$ 任给$\alpha \in A$，任给 $\mathfrak{K} \in \Gamma$，都有 $\mathfrak{K} \models \alpha$。$\Gamma$满足 A。■

四、一般命题推演系统

X 是集合，记$\mathscr{F}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X$ 且 Y 是有限的$\}$，即$\mathscr{F}(X)$是 X 的全体有限子集的集合。

推演系统是建立在形式语言 P 上的，一个推演系统由公理和推演规则构成。公理是一些特定的公式，所有公理组成了一个公式的集合 A。推演规则是从有限个公式得到一个公式的规则，可以记为$<A, \alpha>$，所有推演规则组成了一个集合 R。因为 A 是公式的有限集合，所以 $\mathrm{R} \subseteq \mathscr{F}(\mathbf{Form}(\mathrm{P})) \times \mathbf{Form}(\mathrm{P})$。

1.7 定义　推演系统　P 是语言，P 的推演系统 D 是三元组<P, A, R>，其中 $\mathrm{A} \subseteq \mathbf{Form}(\mathrm{P})$，$\mathrm{R} \subseteq \mathscr{F}(\mathbf{Form}(\mathrm{P})) \times \mathbf{Form}(\mathrm{P})$。

■

在推演系统 D = <P, A, R>中，A 称为公理集，A 中的公式称为**公理**，R 称为推演规则集，R 中的有序对称为**推演规则**。当 P 是已知的或不必要指出时，则可将推演系统简记为<A, R>。

从纯形式的角度看，推演规则就是一种扩充公式集的方法，一个推演系统就是从公理出发，应用推演规则不断扩充公式集。扩充过程称为证明序列，扩充的结果称为内定理。它们的定义如常。

设 D = <A, R>是推演系统。

(1) D 的一个证明序列是一个有限的公式序列$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，其中每个$\alpha_i$满足以下条件之一：

① $\alpha_i \in \mathrm{A}$。

② 存在公式集 A，使得 $A \subseteq \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}\}$且$<A, \alpha_i> \in \mathrm{R}$。

证明序列简称为**证明**。

(1) 如果存在 D 的证明序列$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使得$\alpha_n = \alpha$，则称$\alpha$是 D 的内定理，记为$\vdash_{\mathrm{D}} \alpha$。

D 的全体内定理的集合记为 **Th**(D)。当不需指明 D 时，$\vdash_D \alpha$简记 $\vdash \alpha$，**Th**(D)简记为 **Th**。在以下的讨论中，假定 **Th**(D)≠∅。

五、典范模型与完全性

在 D 的模型中有一类由 D 构造的模型，称为典范模型。典范模型也是命题逻辑的大多数语义学中广泛使用的模型。但邻域语义学中的典范模型和其它语义学的典范模型有两点不同之处：

(1) 在其它语义学中，典范模型都是针对具体的推演系统说的，都是先具体构造出来的，然后再证明它具有某种性质。在邻域语义学中，典范模型是相对于任何推演系统的，不是具体构造出来的，而是根据某种性质定义的。这种性质是大多数语义学的典范模型中总结出来的公共本质。

(2) 在其它语义学中，因为典范模型是具体构造出来的，所以一个推演系统只有一个典范模型。在邻域语义学中，因为典范模型是根据性质定义的，所以一个推演系统就可能有多个不同的典范模型。典范模型是研究推演系统语义性质的重要工具，多个不同的典范模型能发挥更大的作用。

从大多数语义学总结出来的典范模型的主要思想是：可能世界是公式集，并且恰好是在这个世界中为真的所有公式组成。因此，**公式α在可能世界 u 上真当且仅当$\alpha \in u$**。

因为典范模型的可能世界是公式集，所以可能世界集就是公式集的集合族，即 W $\subseteq \mathscr{P}$(**Form**)。

在这样的可能世界集中，对每个公式α可以定义包含这个公式的所有可能世界的集合$|\alpha|$，即$|\alpha| = \{u \mid u \in \mathrm{W}$ 且$\alpha \in u\}$。因为

公式α在可能世界上真当且仅当 $\alpha \in u$，

所以，$|\alpha|$也就是使α为真的所有可能世界的集合。

1.8 定义　典范模型　D 是推演系统，$\mathfrak{K} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{E_c}, \mathrm{N}_f \rangle$。模型 $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{K}, \mathrm{V} \rangle$称为 D 的典范模型，如果 $\mathfrak{M}$ 满足以下条件：

(1) W $\subseteq \mathscr{P}$(**Form**)；

(2) 任给 $u \in \mathrm{W}$，都有 **Th**(D) $\subseteq u$；

(3) 如果 $\nvdash \alpha$，则存在 $u \in \mathrm{W}$，使得$\alpha \notin u$；

(4) 任给 c∈C，都有 $\mathrm{E_c} = |\mathrm{c}|$；

(5) 任给 $f \in$F，都有$\langle |\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n| \rangle \in \mathrm{N}_f(u)$ 当且仅当 $f\alpha_1 \cdots \alpha_n \in u$；

(6) 任给命题变项 p，都有 $\mathrm{V}(p) = |p|$。

其中任给公式α，$|\alpha| = \{u \mid u \in \mathrm{W}$ 且$\alpha \in u\}$。■

由典范模型的定义，常量的解释和赋值的定义方式是唯一的。可能世界集 W 的定义受(2)和(3)的限制，自由度也不大。可选择的主要是联结词的解释。

将$(\mathscr{P}(\mathbf{Form}))^n$分成两类，一类恰好是由所有形如$<|\alpha_1|,\cdots,|\alpha_n|>$的 n 元有序组构成，可以称为**公式类**，其它的 n 元有序组构成的类称为**非公式类**。(5)的定义告诉我们，**联结词的解释在公式类中也是唯一的，而在非公式类中是任意的**。

1.9 定理　典范模型基本性质　若$\mathfrak{M}=<\mathfrak{K}, V>$是 D 的典范模型，$W=\|\mathfrak{K}\|$，则
(1) 任给公式α，都有$V(\alpha)=|\alpha|$，也就是$u\in V(\alpha)$ 当且仅当 $\alpha\in u$。
(2) $\vdash\alpha$ 当且仅当 $|\alpha|=W$（$\vdash\alpha$ 当且仅当 $\mathfrak{M}\vDash\alpha$）。■

对于 $N_f(u)$的要求就是来自用归纳法证明 $V(\alpha)=|\alpha|$。
假设 $V(\alpha_1)=|\alpha_1|,\cdots,V(\alpha_n)=|\alpha_n|$，如何证明 $V(f\alpha_1\cdots\alpha_n)=|f\alpha_1\cdots\alpha_n|$?

$$\begin{tikzcd}
u\in V(f\alpha_1\cdots\alpha_n) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{要得到}"] \arrow[d, leftrightarrow] & u\in|f\alpha_1\cdots\alpha_n\,\alpha| \arrow[dd, leftrightarrow] \\
<V(\alpha_1),\cdots,V(\alpha_n)>\in N_f(u) \arrow[d, leftrightarrow] & \\
<|\alpha_1|,\cdots,|\alpha_n|>\in N_f(u) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{需要}"] & f\alpha_1\cdots\alpha_n\in u;
\end{tikzcd}$$

1.10 定义　模型完全性　D 是推演系统。如果存在模型$\mathfrak{M}$，使得

$\vdash\alpha$ 当且仅当 $\mathfrak{M}\vDash\alpha$，

则称 D 是**模型完全的**。■

根据典范模型的基本性质可知：如果 D 有典范模型，则是 D 是模型完全的。

如果推演系统 D 满足：任给$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Th}$，都有$\alpha[\gamma/\beta]\in\mathbf{Th}$，则称 D 有**内定理置换封闭性**。

一个重要的例子：相干逻辑（成立相干原理）的公理系统没有置换封闭性。

相干原理是说：如果$\alpha\to\beta$是内定理，则α和β中有相同的命题变项。

因为$(p\to p)\to(p\to p)$、$p\to p$、$q\to q$ 是相干逻辑的内定理。在$(p\to p)\to(p\to p)$中用第二个 $p\to p$ 置换 $q\to q$ 得到$(p\to p)\to(q\to q)$，由相干原理得$(p\to p)\to(q\to q)$不是内定理，所以置换封闭性不成立。

1.11 定理　D 有内定理置换封闭性 当且仅当 D 有典范模型 当且仅当 D 是模型完全的。■

证明思路是：

D 有内定理置换封闭性 $\Rightarrow$ D 有典范模型

$\Rightarrow$ D 是模型完全的 $\Rightarrow$ D 有内定理置换封闭性

要点是：对有内定理置换封闭性的推演系统 D 构造典范模型，具体证明见[1]。

1.12 定义　框架完全性　D 是推演系统。如果存在框架类Γ，使得 $\vdash\alpha$ 当且仅当 $\Gamma\models\alpha$，则称 D 是框架完全的。■

D 的典范模型 $\mathfrak{M}$ = <$\mathfrak{K}$, V>已经证明了如果 $\mathfrak{K}\models\alpha$ 则 $\vdash\alpha$，如果还能证明：如果 $\vdash\alpha$ 则 $\mathfrak{K}\models\alpha$（$\mathfrak{K}\models$ **Th**(D)），则取Γ={ $\mathfrak{K}$ }就可以了。

一般情况下都是给定$\Gamma\models$ **Th**(D)，那只要证明 $\mathfrak{K}\in\Gamma$就可以了。

显然模型完全性弱于框架完全性，其间还有一般框架完全性。一般框架完全性的特点是用一个封闭的子集族π取代幂集，只考虑使得公式的解释落入π的那些赋值。

这三种完全性还有相应的弱化形式，要点是在定义模型满足时，可以用一个非空子集代替全集。

1.13 定理

(1) 任何推演系统 D 都是是弱模型完全的。

(2) 推演系统 D 是弱一般框架完全的，当且仅当，D 有代入封闭性。

(3) 推演系统 D 是一般框架完全的，当且仅当，D 有内定理置换封闭性和代入封闭性。■

证明是简单的，见[1]。

六种完全性强弱关系如下：

$$\begin{array}{ccccc}
\textbf{模型完全性} & \rightarrow & \textbf{一般框架完全性} & \rightarrow & \textbf{框架完全性} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\textbf{弱模型完全性} & \rightarrow & \textbf{一般弱框架完全性} & \rightarrow & \textbf{弱框架完全性}
\end{array}$$

它们的意义在[2]中有详细讨论。

§2　模态逻辑和必然性

一、（一元）模态逻辑

模态逻辑的形式语言（模态语言）是：

¬（一元联结词非）、∧（二元联结词合取）；□（一元联结词 box）
按通常的方法引进∨(析取)、→(蕴涵)和↔(等值)。

2.1 定义　模态框架　模态语言上的 $\mathfrak{K}$ = <W, $N_\neg$, $N_\wedge$, $N_\Box$>称为模态框架，如果 $N_\neg(x) = \{S \mid x\notin S\}$且 $N_\wedge(x) = \{<S, Q> \mid x\in S$ 且 $x\in Q\}$。■

因为 $N_\neg$的 $N_\wedge$是固定的，所以模态框架简记为 $\mathfrak{K}$ = <W, N>。

任给 $S \subseteq$ W，记 W$-S$ = { x | $x \in$W 且 $x \notin S$}为 S^{-}。

V 是模态框架上的赋值，则¬和∧的解释是：

(1) V(¬α)= V(α)；

(2) V($\alpha \wedge \beta$)= V(α)∩V(β)；

对于定义引进的还有∨、→和↔有：

(3) V($\alpha \vee \beta$)= V(α)∪V(β)；

(4) V($\alpha \rightarrow \beta$)= V(α)$^{-}$∪V(β)；

(5) V($\alpha \leftrightarrow \beta$) = (V($\alpha$)∪V($\beta$))∩(V($\beta$)$^{-}$∪V($\alpha$))。

□的解释还是一般的：$x \in$V(□α) 当且仅当 V(α)∈N(x)。

在模型 $\mathfrak{M}$= <$\mathfrak{K}$, V>中还有两个重要结果：

(1) $\mathfrak{M} \models \alpha \rightarrow \beta$ 当且仅当 V(α) ⊆ V(β)。

(2) $\mathfrak{M} \models \alpha \leftrightarrow \beta$ 当且仅当 V(α) = V(β)。

模态框架组成的框架类称为模态框架类，模态框架类刻画的逻辑称为模态逻辑。Γ是模态框架类，Γ刻画的逻辑是 **L**={α | Γ$\models \alpha$}。

传统的模态逻辑并不是这么广泛的，□是为了刻画必然性的。

2.2 定义　必然性框架　模态框架 $\mathfrak{K}$ = <W, N>称为必然性框架，如果任给 $x \in$W，N(x)是一个滤。即：

(1) 如果 $S \in$N(x)且 $S \subseteq Q$，则 $Q \in$N(x)（单调性）；

(2) 如果 $S, Q \in$N(x)，则 $S \cap Q \in$N(x)（合取原则）；

(3) W∈N(x)（N(x)≠∅）。■

以这样的框架为语义的研究就是经典的模态逻辑邻域语义学[3]。就算模态逻辑邻域语义学概念扩展到一般的模态框架，这依然是研究的重点[4]。

关系 R 翻译得到的邻域 $N_R(x)$也是滤，而且是主滤。整个必然性框架要比关系 R 翻译得到的框架要多，但它们刻画的是同一个逻辑，极小正规逻辑 K。

二、必然性

一般认为公式的解释是命题，在邻域语义学中将公式解释成 W 的子集，所以可以认为 W 的子集就是命题。

必然是命题的性质，仿照一阶逻辑语义对于性质的处理：将性质处理为具有这种性质的个体的集合，我们也可以将必然处理成所有有“必然”性质的命题（必然命题）的集合，所以 $S \in$N(x)就是说 S 在 x 中是必然的。

实际上，任何邻域类的意义都是某种命题的性质。

S 是命题，x 是可能世界，$x \in S$ 的直观意义是 S 在 x 上真。从这个意义上可以更精确的说：命题就是使它为真的可能世界的集合。

为比较两个命题“真”的程度，我们引进命题间的**强弱关系**，就是命题作为集合的包含关系，命题 S 强于命题 Q 就是 $Q \subseteq S$。这样，W（逻辑有效的命题）就是最强的命题，$\varnothing$（不可满足的命题）就是最弱的命题。

必然是比真更强的一种性质，虽然我们现在已经不要求在同一个世界上，必然的一定是真的，但必然和真仍有内在的联系。命题是使它为真的可能世界的集合，所以命题的元素体现了命题的真的程度。如果 Q 强于 S，则 Q 比 S“更真”，如果 S 是必然的，则比 S“更真”的 Q 也应该是必然的。这就引出了必然的一个重要特征——**单调性**：

比必然命题强的命题还是必然的。

S 在 x 上是必然的就是 $S \in \mathrm{N}(x)$，Q 比 S 强就是 $S \subseteq Q$，Q 在 x 上是必然的就是 $Q \in \mathrm{N}(x)$，所以单调性在框架中的条件就是：

如果 $S \in \mathrm{N}(x)$且 $S \subseteq Q$，则 $Q \in \mathrm{N}(x)$。

必然有很多种，它们可以由不同的逻辑系统来刻画，而在一个逻辑系统中刻画的是同一种必然。表示是同一种必然的特征是**单纯性**，它的直观表述是：

必然 S 和必然 Q 中的“必然”是同一个。

这种表述是不清晰的，也无法进一步分析。为了讲清单纯性，我们需要一个新概念：**无关**。

如果能从 S 是必然的得到“S 且非 E”也是必然的，则 E 对于 S 是否是必然的毫无关系，所以可以称为：

E 相对于 S(的必然性)是无关的。

注意“S 且非 E”就是 $S-E$，所以在框架中的表示 E 相对于 S 是无关的就是：

如果 $S \in \mathrm{N}(x)$，则 $S-E \in \mathrm{N}(x)$。

显然，如果 $S \cap E = \varnothing$，则 E 相对于 S 一定是无关的。

既然必然 S 和必然 Q 中的“必然”是同一个，所以相对于 S 无关的命题相对 Q 来说也是无关的。因此可以用无关的概念可以清晰地表示**单纯性**：

如果 S 和 Q 都是必然的，则相对于 S 无关的命题也相对于 Q 无关。

S 和 Q 在 x 上都是必然的表示为

$S \in \mathrm{N}(x)$和 $Q \in \mathrm{N}(x)$，

在 $S \in \mathrm{N}(x)$和 $Q \in \mathrm{N}(x)$的情况下，E 相对于 S 是无关的就是 $S-E \in \mathrm{N}(x)$，E 相对于 Q 是无关的就是 $Q-E \in \mathrm{N}(x)$，所以在框架中表示单纯性就是：

如果 $S \in \mathrm{N}(x)$，$Q \in \mathrm{N}(x)$且 $S-E \in \mathrm{N}(x)$，则 $Q-E \in \mathrm{N}(x)$。

在单调性的前提下，以上条件等价于：

如果 $S\in N(x)$且 $Q\in N(x)$，则 $S\cap Q\in N(x)$。

单调性和单纯性是必然的本质特征，具有单调性和单纯性的性质都可以看作某种意义下的必然。这样就可以重新对必然下一个严格的定义了。

2.3 定义　必然　$\mathfrak{K}$ = <W, N>是框架。

(1) 如果 $N(x)$满足：

1. **单调性**　如果 $S\in N(x)$且 $S\subseteq Q$，则 $Q\in N(x)$；
2. **合取原则**　如果 $S\in N(x)$且 $Q\in N(x)$，则 $S\cap Q\in N(x)$，

则称 N 在可能世界 x 上是必然的。

(2) 如果任给 $x\in W$，N 在可能世界上 x 都是必然的，则称 $\mathfrak{K}$ 是必然性框架（这时我们也称 N 是必然的）。

(3) 由必然性框架组成的框架类称为必然性框架类。

(4) 由必然性框架类刻画的逻辑称为必然性逻辑。■[5]

称 $N(x) = \mathscr{P}(W)$（恒真），$N(x) = \varnothing$（恒假）这两种必然性是异常的，其它的必然性为正常的（对应的 $N(x)$是真滤）。这里的定义仅仅比经典的定义多了一个异常的必然性 $N(x) = \varnothing$。

每个 x 上的必然性都是恒真的框架称为**恒真框架**。

每个 x 上的必然性都是恒假的框架称为**恒假框架**。

每个 x 上的必然性都是正常的框架称为**正常框架**。

每个 x 上的必然性都是恒真或正常的框架称为**正规框架**。

每个 x 上的必然性都是恒假或正常的框架称为**非正规框架**。

全体正规框架刻画的逻辑是极小正规逻辑 **K**。

全体正常框架刻画的逻辑是 **D**。

全体恒真框架刻画的逻辑是坍塌逻辑 **Ver**。

它们都是正规的。

全体必然性框架刻画的逻辑是极小正则逻辑 **C**。

全体非正规框架刻画的逻辑记为 **K′**。

全体恒假框架刻画的逻辑是坍塌逻辑 **Fal**。

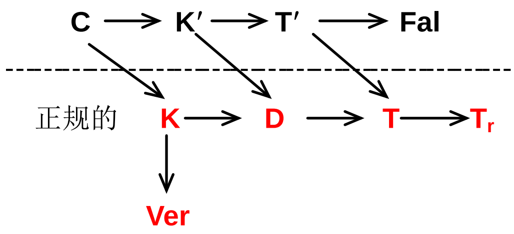
它们都是非正规的。

如果 $N(x)$满足：由 $S\in N(x)$得到 $x\in S$，则称 $N(x)$是客观的（必然的都是真的）。每个 x 上的必然性都是客观的称为**客观框架**。全体客观框架刻画的逻辑记为 **T′**，它是非正规的。

客观框架还有两个子类：全体正常的客观框架刻画的逻辑是 **T**。

如果 $\mathrm{N}(x)$满足：$S\in\mathrm{N}(x)$ 当且仅当 $x\in S$，则称 $\mathrm{N}(x)$是退化的。每个 x 上的必然性都是退化的称为**退化框架**。全体退化框架刻画的逻辑是坍塌逻辑 **Tr**。

它们都是正规的。



三、可能性

2.4 定义 对偶

(1) $\Diamond\alpha =_{\mathrm{df}} \neg\Box\neg\alpha$，$\Diamond$称为$\Box$的对偶。

(2) $\mathrm{N}'(x) = \{S \mid S^{-} \notin \mathrm{N}(x)\}$称为 $\mathrm{N}(x)$的对偶。■

$\mathrm{N}(x) = \varnothing$的对偶是 $\mathrm{N}'(x) = \mathscr{P}(\mathrm{W})$，$\mathrm{N}(x) = \mathscr{P}(\mathrm{W})$的对偶是 $\mathrm{N}'(x) = \varnothing$。

2.5 定理 如果 $\mathrm{N}(x)$是$\Box$的解释，则 $\mathrm{N}'(x)$就是$\Diamond$的解释。

证 就是证明 $x\in\mathrm{V}(\Diamond\alpha)$ 当且仅当 $x\in\mathrm{V}(\neg\Box\neg\alpha)$。

$x\in\mathrm{V}(\Diamond\alpha)$ 当且仅当 $x\in\mathrm{V}(\neg\Box\neg\alpha)$当且仅当 $x\notin\mathrm{V}(\Box\neg\alpha)$

当且仅当 $\mathrm{V}(\neg\alpha)\notin\mathrm{N}(x)$ 当且仅当 $\mathrm{V}(\neg\alpha)^{-}\notin\mathrm{N}(x)$ 当且仅当 $\mathrm{V}(\alpha)\in\mathrm{N}'(x)$。

■

当 $\mathrm{N}(x)$是必然时，$\mathrm{N}'(x)$是否是一种可能？

仿照必然的讨论，我们定义可能，然后证明：$\mathrm{N}(x)$是必然 当且仅当 $\mathrm{N}'(x)$是可能。

可能也是对命题为真的一种肯定，所以也有**单调性**：

比可能命题强的命题还是可能的。

和必然类似，虽然可能也有很多种，但在一个逻辑系统中刻画的是同一种可能。所以可能性也有单纯性。

单纯性是通过无关来表示的。对于可能性，我们采用另一种无关的概念。

如果能从 S 不是可能的得到“S 并且 E”也不是可能的，则 E 对于 S 是否是可能的毫无关系，所以可以称为：

***E* 相对于 *S*(的可能性)是无关的**。

在框架中的表示 E 相对于 S 是无关的就是：

如果 $S\notin\mathrm{N}(x)$，则 $S\cup E\notin\mathrm{N}(x)$。

显然，如果 $E\subseteq S$，则 E 相对于 S 一定是无关的。

用此无关性表示可能的**单纯性**：

如果 S 和 Q 都是不可能的，则相对于 S 无关的命题也相对于 Q 无关。

S 和 Q 在 x 上都不是可能的表示为

$S\notin \mathrm{N}(x)$和 $Q\notin \mathrm{N}(x)$，

在 $S\notin \mathrm{N}(x)$和 $Q\notin \mathrm{N}(x)$的情况下，E 相对于 S 是无关的就是

$S\cup E\notin \mathrm{N}(x)$，

M 相对于 Q 是无关的就是

$Q\cup E\notin \mathrm{N}(x)$，

所以在框架中表示单纯性就是：

如果 $S\notin \mathrm{N}(x)$，$Q\notin \mathrm{N}(x)$且 $S\cup E\notin \mathrm{N}(x)$，则 $Q\cup E\notin \mathrm{N}(x)$。

在单调性的前提下，以上条件等价于：

如果 $S\cup Q\in \mathrm{N}(x)$，则 $S\in \mathrm{N}(x)$或 $Q\in \mathrm{N}(x)$。

用单调性和单纯性可以对可能下一个严格的定义。

2.6 定义　可能　N 是邻域映射。

(1) 如果 $\mathrm{N}(x)$满足：

1. **单调性**　如果 $S\in \mathrm{N}(x)$且 $S \subseteq Q$，则 $Q\in \mathrm{N}(x)$；
2. **析取原则**　如果 $S\cup Q\in \mathrm{N}(x)$，则 $S\in \mathrm{N}(x)$或 $Q\in \mathrm{N}(x)$，

则称 N 在可能世界 x 上是可能的。

(2) 如果任给 $x\in \mathrm{W}$，N 在可能世界上 x 是可能的，则称 N 是可能的。

按这个定义，可能确实是必然的对偶。

2.7 定理

(1) N 在可能世界 x 上是必然的 当且仅当 N'在可能世界 x 上是可能的。

(2) N 是必然的 当且仅当 N'是可能的。■

四、双重逻辑

2.8 定义　双重　N 是邻域映射。

(1) 如果 N 在可能世界 x 上既是必然的也是可能的，即 $\mathrm{N}(x)$满足：

1. **单调性**　如果 $S\in \mathrm{N}(x)$且 $S \subseteq Q$，则 $Q\in \mathrm{N}(x)$；
2. **合取原则**　如果 $S\in \mathrm{N}(x)$且 $Q\in \mathrm{N}(x)$，则 $S\cap Q\in \mathrm{N}(x)$；
3. **析取原则**　如果 $S\cup Q\in \mathrm{N}(x)$，则 $S\in \mathrm{N}(x)$或 $Q\in \mathrm{N}(x)$，

则称 N 在可能世界 x 上是双重的。

(2) 如果任给 $x\in \mathrm{W}$，N 在可能世界 x 上都是双重的，则称 N 是双重的。

如果 N 满足 $\mathrm{N}(x) = \mathrm{N}'(x)$（$\mathrm{N}(x)$是超滤），则称 N 在可能世界 x 上是**自对偶**的。任给 $x\in \mathrm{W}$，N 在可能世界 x 上都是自对偶的，则称 N 是**自对偶**的。自对偶的一定是正常的。

2.9 定理　N 在可能世界 x 上是双重的，当且仅当，N 在可能世界 x 上是异常的或自对偶的。■

如果 N 是双重的，则称框架 $\mathfrak{F}$ = <W, N>是双重框架，恒真框架和恒假框架都是双重框架。双重框架的框架类确定的逻辑称为**双重逻辑**。

全体正规的双重框架刻画的逻辑记为 $\mathbf{Dal_n}$。

全体正常的双重框架（自对偶框架）刻画的逻辑记为是 **SDal**。

它们都是正规的。

全体双重框架刻画的逻辑记为 **Dal**。

全体非正规的双重框架刻画的逻辑记为 $\mathbf{Dal_p}$。

全体异常框架刻画的逻辑是记为 **D′**。

它们都是非正规的。

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathbf{Fal} \\
 & \mathbf{Dal_p} \arrow[urr] \arrow[d] & \mathbf{Dal} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{D'} \arrow[u] \arrow[d] \\
\text{正规的} & \mathbf{SDal} & \mathbf{Dal_n} \arrow[l] \arrow[r] & \mathbf{Ver}
\end{tikzcd}
$$

§3　典范模型和完全性

一、模态推演系统

3.1. 定义　模态推演系统　推演系统 D 称为模态推演系统，如果 D 满足以下性质：

(1) 公理集 A 包含所有重言式的代入，即，

如果α是重言式，则$\alpha(\beta_1/p_1,\cdots,\beta_n/p_n)\in$A；

(2) 推演规则集 R 中有分离规则，即，任给公式α,β，都有$<\{\alpha,\alpha\to\beta\},\beta>\in$R。

(3) **Th**(D)是和谐的。

(4) D 中有**置换定理**：即，如果 $\vdash\beta\leftrightarrow\gamma$则 $\vdash\alpha\leftrightarrow\alpha[\gamma/\beta]$。■

对于模态推演系统来说，典范模型要求

$\mathrm{N}_\neg(u)=\{S\mid u\notin S\}$，$\mathrm{N}_\wedge(u)=\{<S,Q>\mid u\in S$ 且 $u\in Q\}$。

同时还要满足典范模型的条件

$|\alpha|\in\mathrm{N}_\neg(u)$ 当且仅当 $\neg\alpha\in u$，

$<|\alpha|,|\beta|>\in\mathrm{N}_\wedge(u)$ 当且仅当 $\alpha\wedge\beta\in u$，

如果我们取极大和谐集作为可能世界，则这两个要求可以同时满足。

$|\alpha|\in N_{\neg}(u)$ 当且仅当 $u\notin|\alpha|$ 当且仅当 $\alpha\notin u$

当且仅当 $\neg\alpha\in u$。

$<|\alpha|,|\beta|>\in N_{\wedge}(u)$ 当且仅当 $u\in|\alpha|$且 $u\in|\beta|$ 当且仅当 $\alpha\in u$ 且$\beta\in u$

当且仅当 $\alpha\wedge\beta\in u$。

条件(2) 任给 $u\in W$，都有 $\mathbf{Th}(D)\subseteq u$，也满足了。

如果取全体极大和谐集作为可能世界集，则条件(3) 如果 $\nvdash\alpha$，则存在 $u\in W$，使得$\alpha\notin u$，也能满足。

在以下讨论的典范模型中，我们都取全体极大和谐集作为可能世界集：

$W=\{u\mid u$ 是极大和谐集$\}$，

只需对每个 $u\in W$，构造 $N(u)$，使得满足条件：$|\alpha|\in N(u)$ 当且仅当 $\Box\alpha\in u$。

3.2 定理 如果 D 是模态推演系统，则 D 是模型完全的。

证 取 $W=\{u\mid u$ 是极大和谐集$\}$，任给 $u\in W$，令 $N(u)=\{|\alpha|\mid\Box\alpha\in u\}$。任给命题变项 p，令 $V(p)=|p|$。证明<<W, N>, V>是典范模型。

如果$\Box\alpha\in u$，则有定义得$|\alpha|\in N(u)$。

如果$|\alpha|\in N(u)$，则存在β，使得$\Box\beta\in u$ 且$|\alpha|=|\beta|$，由$|\alpha|=|\beta|$得$\vdash\alpha\Leftrightarrow\beta$，由置换定理得 $\vdash\Box\alpha\Leftrightarrow\Box\beta$，所以$\Box\alpha\in u$。■

为什么我们不把满足(1)(2)的推演系统当作模态系统？因为满足(1)(2)的推演系统如果是模型完全的，则一定是模态系统。

二、必然性系统

Co：$\{\Box\alpha\wedge\Box\beta\rightarrow\Box(\alpha\wedge\beta)\mid\alpha\in\text{Form}\}$

N：$\{\Box(\alpha\vee\neg\alpha)\mid\alpha\in\text{Form}\}$（$\Box\neg\bot$）

N′：$\{\neg\Box(\alpha\wedge\neg\alpha)\mid\alpha\in\text{Form}\}$（$\neg\Box\bot$）

D：$\{\Box\neg\alpha\rightarrow\neg\Box\alpha\mid\alpha\in\text{Form}\}$

T：$\{\Box\alpha\rightarrow\alpha\mid\alpha\in\text{Form}\}$

K：$\{\Box(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\Box\alpha\rightarrow\Box\beta\mid\alpha,\beta\in\text{Form}\}$

RM：$\{<\{\alpha\rightarrow\beta\},\ \Box\alpha\rightarrow\Box\beta>\mid\alpha,\beta\in\text{Form}\}$

RN：$\{<\{\alpha\},\ \Box\alpha>\mid\alpha\in\text{Form}\}$

RN′：$\{<\{\neg\alpha\},\neg\Box\alpha>\mid\alpha\in\text{Form}\}$

Fal：$\{\neg\Box\neg\alpha\mid\alpha\in\text{Form}\}$

Ver：$\{\Box\alpha\mid\alpha\in\text{Form}\}$

$\mathbf{T_r}$：$\{\Box\alpha\Leftrightarrow\alpha \mid \alpha\in\mathrm{Form}\}$

因为所有的模态推演系统都有重言式的代入和分离规则，所以在描述模态推演系统时，只需给出其它的公理和推演规则。

有了 **RM**，置换定理就一定成立，所以只需注意在选取公理和推演规则时，能保证和谐性就行了。

对于第二章必然性的九个逻辑，相应的系统如下，我们使用同样的记号。

C：　**CO**＋**RM**

K：　**C**＋**N** (= **C**＋**RN**，＝**K**＋**RN**)

K′：**C**＋**N′** (= **C**＋**RN′**)

D：　**C**＋**N**＋**N′** (= **C**＋**RN**＋**RN′**，＝**K**＋**D**)

T′：**C**＋**T**（**T** 能得到 **N′**）

T：　**C**＋**N**＋**T** (= **C**＋**RN**，＝**K**＋**T**)

Fal：**Fal**

Ver：**Ver**

$\mathbf{T_r}$：$\mathbf{T_r}$

上一节中的逻辑是通过框架类建立的，对于相应于这些系统的框架类Γ，都可以验证：$\Gamma\models\mathbf{Th}(\mathrm{D})$。

为了证明它们的框架完全性，构造典范模型 $\mathfrak{M}_1$。

取 W＝$\{u \mid u$ 是极大和谐集$\}$，任给 $u\in$W，N(u)＝$\{S \mid$存在$\Box\alpha\in u$，使得$|\alpha|\subseteq S\}$，任给命题变项 p，V(p) =$|p|$。令 $\mathfrak{K}_1$=<W, N>，$\mathfrak{M}_1$=<$\mathfrak{K}_1$, V>。

3.3 定理　$\mathfrak{M}_1$ 是典范模型。

证　如果$\Box\alpha\in u$，则由$|\alpha|\subseteq|\alpha|$得$|\alpha|\in$N($u$)。

如果$|\alpha|\in$N(u)，则存在$\Box\beta\in u$，使得$|\beta|\subseteq|\alpha|$，所以$\vdash\beta\rightarrow\alpha$，由 **RM** 得$\vdash\Box\beta\rightarrow\Box\alpha$，所以$\Box\alpha\in u$。■

通过这样的典范模型，很容易证明上述九个系统的框架完全性，因为这些系统都有典范性：只要系统里有相应的公式，典范模型的框架自然有相应的框架条件，从而 $\mathfrak{K}_1\in\Gamma$。

RM 对应单调性，**RN**（**N**）对应非空性（N(u) $\neq\varnothing$），**RN′**（**N′**）对应非满性（N(u) $\neq\mathscr{P}$(W)），**T** 对应客观性（如果 $S\in$N(u)则 $u\in S$）等。

三、双重系统

Ex：$\{\Box(\alpha\vee\beta)\rightarrow\Box\alpha\vee\Box\beta \mid \alpha,\beta\in\mathrm{Form}\}$

D′：$\{\Box\alpha\rightarrow\Box\neg\alpha \mid \alpha\in\mathrm{Form}\}$

对于第二章五个双重逻辑，给出相应的系统。

Dal：**C** + **Ex**

D′： **C** + **D′**（**D′**中有 **Ex**）

Dal$_{\mathbf{p}}$：**C** + **N′**+ **Ex**

Dal$_{\mathbf{n}}$：**C** + **N** + **Ex**（= **K** + **Ex**）

SDal：**C** + **N** + **N′** + **Ex**（= **K** + **D** + **Ex**）

同样需要验证它们相应的框架类Γ，都有Γ$\models$ **Th**(D)。

$\mathfrak{M}_1$ 是不能证明它们的框架完全性，给出另一个典范模型 $\mathfrak{M}_2$ 来证明这些系统框架完全性。

取 W={u | u 是极大和谐集}，任给 u∈W，令 $N_1(u)$={S |存在□α∈u，使得|α |⊆S}。如果 $N_1(u)$ =∅或 $N_1(u)$ =∅，令 N(u) = $N_1(u)$，否则令 N(u)是由 $N_1(u)$扩充的超滤。

任给命题变项 p，V(p) =| p |。

令 $\mathfrak{K}_2$=<W, N>，$\mathfrak{M}_2$=<$\mathfrak{K}_2$, V>。

3.4 定理 $\mathfrak{M}_2$ 是典范模型。

证 证明如果| α |∈N(u)，则α∈u。

1. $N_1(u)$ = ∅，显然。

2. $N_1(u)$ =$\mathscr{P}$(W)，因为∅∈$N_1(u)$，所以

存在□β∈u，使得| β | ⊆ ∅，

由| β | ⊆ ∅得β是不和谐的，所以 ⊢¬β，因此

⊢β→α，

由 **RM** 得 ⊢□β→□α，因此□α∈u。

3. $N_1(u)$ ≠ ∅且 $N_1(u)$ ≠$\mathscr{P}$(W)。

如果| α |∈N(u)，则由 N(u)是超滤得| ¬α |∉N(u)，所以

| ¬α |∉$N_1(u)$，□¬α∉u，

又因为 $N_1(u)$ ≠ ∅，所以存在□β∈u，由⊢β→α∨¬α和 **RM** 得

⊢□β→□(α∨¬α)，

由 **Ex** 得

⊢□β→□α∨□¬α，

所以

□α∨□¬α∈u，

由极大和谐得□α∈u 或□¬α∈u，因此□α∈u。■

它们的框架完全性也是通过验证这些系统的典范性。

参 考 文 献

[1] 刘壮虎：邻域语义学和模型完全性，《北京大学学报(哲学社会科学版)》1995 年第 3 期

[2] 刘壮虎：邻域语义学与推理系统的完全性，《哲学研究》2000 年第 9 期

[3] Scott, D. *Advic on Modal Logic*, Philosophical Problems in Logic

[4] Segerberg, K. *An Essay in Classical Modal Logic*

[5] 刘壮虎：必然性的逻辑分析，《哲学研究》2002 年第 2 期

[6] 周北海：《模态逻辑导论》，北京大学出版社，1997 年

附录：弱组合逻辑

每个 N(x)的条件减弱为只有单调性的框架称为单调框架。单调框架的框架类确定的逻辑称为**单调逻辑**。

如果 N(x)满足：任给 $S_1,\cdots,S_{n+1}\in$N(x)，存在 1≤i<j≤n+1，使得 $S_i\cap S_j\in$N(x)，则称 N(x)有 n-组合性。

2.10 定义 n-组合框架 $\mathfrak{K}$ = <W, N>是单调框架。如果任给 $x\in$W，N(x)都有 n-组合性，则称 $\mathfrak{K}$ = <W, N>是 n-组合框架。

全体 n-组合框架刻画的逻辑称为 n-组合逻辑，记为 $\mathbf{C}_n$。

1-组合框架就是必然性框架，$\mathbf{C}_1$ 就是 $\mathbf{C}$。

如果 m≤n，则 m-组合框架也是 n-组合框架，所以 m-组合逻辑是 n-组合逻辑的扩充。

通常所说的 n-组合逻辑是有正规性的，这里称为正规 n-组合逻辑，记为 $\mathbf{K}_n$，$\mathbf{K}_1$ 就是 $\mathbf{K}$。框架条件增加：任给 $x\in$W，都有 N(x)≠∅。

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & \cdots\cdots\mathbf{C}_n\cdots & \mathbf{C}_m & \cdots & \mathbf{C}_2, & \mathbf{C}_1(x) \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\text{正规的} & \cdots\cdots\mathbf{K}_n\cdots & \mathbf{K}_m & \cdots & \mathbf{K}_2, & \mathbf{K}_1(x)
\end{array}
$$

相应的系统是 **RM+n-Co**（$\Box\alpha_1\wedge\ldots\Box\alpha_{n+1}\to\bigvee\{\Box(\alpha_i\wedge\alpha_j)\mid 1\leq i<j\leq n+1\}$）

可以验证 n-组合框架能够满足 **RM+n-Co**。

只要有推演规则 **RM** 的系统，都可以构造典范模型 $\mathfrak{M}_1$。使用 $\mathfrak{M}_1$ 也能简单地证明 **RM+n-Co** 的完全性，因为它也有典范性。