描述逻辑的本质及其自然推演系统

马丽
逻辑、语言与认知中心
北京大学

6th May 2012

Abstract

描述逻辑作为一种形式化的知识表示方法，在人工智能及计算机领域被广泛应用。在计算机领域，描述逻辑一般是被当做表达工具直接被使用。虽然描述逻辑的各种语言与一阶逻辑、多模态逻辑（multi-modal logic）、命题动态逻辑(propositional dynamic logic)、μ-演算、安保片段（guarded fregment）、分级模态逻辑（graded modal logic）都有对应理论方面的研究，但是这些研究仅在语言表达力方面做了比较。描述逻辑的各语言背后的逻辑是什么，是否有自然推演系统甚至能否公理化等问题在描述逻辑的研究进程中迄今没有相关研究。本文通过描述逻辑的最小语言AL与一阶逻辑的一个可判定片段$FO^{2,2,=}$之间的关系试图揭示描述逻辑的本质。本文给出了描述逻辑AL的一个自然推演系统。

关键词： 描述逻辑AL，一阶逻辑，可判定片段，自然推演系统

1 描述逻辑AL的语法

初始符号：

个体常元集合:**Con**={ a_1,a_2, $\cdots$ }
角色集合：**R**={ R_1,R_2, $\cdots$ }
原子概念集合：**C**={ C_1,C_2, $\cdots$ }
逻辑常项：$\neg, \sqsubseteq, \sqcap, \equiv, \forall, \exists$

AL语言中的概念:

$$C ::= \top \mid \bot \mid A \mid \neg A \mid C \sqcap D \mid \forall R.C \mid \exists R.\top$$

其中:

$\top$ ：顶概念，技术符号，用于生成复合概念

$\bot$ ：底概念，技术符号，用于生成复合概念

A ：原子概念

$\neg$A ：原子概念的否定, AL 语言只允许对原子概念否定，复合概念没有否定

C$\sqcap$D：概念的交

$\forall$ R.C: 值约束

$\exists$ R.T: 有限制的存在变量

AL语言的公式: C, D 为AL的概念，R，S为AL的角色，a，b 为个体常元

$$\alpha ::= C \equiv D \mid R \equiv S \mid C \sqsubseteq D \mid R \sqsubseteq S \mid C(a) \mid R(a, b)$$

用AL语言表达的一个具体领域的知识库:

概念公理集：一个一般概念包含(general concept inclusion: GCI) 形如：$C \sqsubseteq D$，C, D 是概念。一个TBox是一个概念公理的有穷集合。

对象断言公理集:

一个概念断言是形如C(a)的公式。

一个关系断言是形如R(a,b)的公式。

一个ABox是一个断言公理的有穷集合。

AL语言的语义:

AL的模型是M=（**D**,I）,其中I是一个解释函数，**D**是一个非空个体域。I给每一个原子概念C指派一个集合C$^I \subseteq \mathbf{D}$ ，给每一个角色R指派一个二元关系R$^I \subseteq \mathbf{D} \times \mathbf{D}$。通过下面定义，给出AL中概念和关系的语义解释。

$\top^I = \mathbf{D}$

$\bot^I = \emptyset$

$\neg A^I = \mathbf{D} \setminus A^I$
$(\mathrm{C}_1 \sqcap C_2)^I = \mathrm{C}_1^I \cap C_2^I$
$(\forall R.C)^I = \{a \in \mathbf{D} \mid \forall b \in D((a,b) \in R^I \rightarrow b \in C^I)\}$
$(\exists R.\top)^I = \{a \in \mathbf{D} \mid \exists b \in D((a,b) \in R^I \wedge b \in \top^I)\}$

小结： 从描述逻辑AL的语法和语义可知，其语言有以下几个特点。

1. 描述逻辑表达谓词时摆脱了个体变元。这样表达相对一阶语言而言更加简洁，并且区分了思想层面和对象层面的知识。概念和角色表达的是思想层面的东西，而对象表达的是现实世界的东西。也可以说是区分了理论知识与实际知识。先描述概念之间、角色之间的关系，然后再断言哪些个体具有什么概念或者关系，如此表达层次分明。这是描述逻辑语言的一个优点。

2. 从描述逻辑的语义可见描述逻辑只是表达了概念和角色的外延。描述逻辑企图用概念之间的包含关系、角色之间的包含关系来表达概念和角色的内涵。但是从其语义解释可以看出，这些所谓的“内涵性”知识最终还是依赖于外延。也就是说描述逻辑中所谓的“概念”只表达了概念的外延。这在表达知识内涵性方面相对一阶语言而言，没有做到突破。

3. 细察描述逻辑AL的语言，不难发现描述逻辑其实是词项逻辑与一阶逻辑相结合的产物。描述逻辑中的概念其实是词项，只不过它的概念的结构比词项逻辑中的概念复杂。词项逻辑的词项是单个的谓词，而描述逻辑的概念可以通过原子概念、概念构造算子和角色构成复杂的概念。词项逻辑的连结词只有系词，而描述逻辑的连结词只是一阶语言联结词的变形形式。

2 描述逻辑AL与一阶谓词逻辑的关系

很多描述逻辑的介绍性文献中都首先交代描述逻辑是一阶谓词逻辑的一个可判定子集。这句话至少包含了两个意思：1. 描述逻辑是一阶谓词逻辑的一个子集，2.描述逻辑是可判定的。这一节里我们通过证明这两点，使

描述逻辑与一阶逻辑的关系更加明晰。设τ^x ,τ^y分别是把AL 的概念翻和公式翻译为一阶谓词逻辑公式的翻译函数。若C为AL的一个概念，α是AL的一个公式，则$\tau^x(C)$，$\tau^x(\alpha)$，以x为自由变元；$\tau^y(C)$，$\tau^y(\alpha)$ 以y为自由变元。具体翻译如下表：

Table 1: 从AL的概念到FOL公式的翻译

C	$\tau^x(C)$	$\tau^y(C)$
$\top$	$x = x$	$y = y$
$\bot$	$\neg(x = x)$	$\neg(y = y)$
A	$A(x)$	$A(y)$
$\neg A$	$\neg\tau^x(A)$	$\neg\tau^y(A)$
$C \sqcap D$	$\tau^x(C) \wedge \tau^x(D)$	$\tau^y(C) \wedge \tau^y(D)$
$\forall R.C$	$\forall y(R(x,y) \to \tau^y(C))$	$\forall x(R(y,x) \to \tau^x(C))$
$\exists R.\top$	$\exists y(R(x,y) \wedge \tau^y(\top))$	$\exists x(R(y,x) \wedge \tau^x(\top))$

Table 2: 从AL的概念到FOL公式的翻译

α	$\tau^x(\alpha)$	$\tau^y(\alpha)$
$C \equiv D$	$\tau^x(C) \leftrightarrow \tau^x(D)$	$\tau^y(C) \leftrightarrow \tau^y(D)$
$C \sqsubseteq D$	$\tau^x(C) \to \tau^x(D)$	$\tau^y(C) \to \tau^y(D)$
$C(a)$	$\tau^x(C)(x/a)$	$\tau^y(C)(y/a)$
$R(a,b)$	$R(a,b)$	$R(a,b)$

Proposition 1. 对于任意的AL概念C，$\tau^x(C)$ 以x为自由变元，且仅以x为自由变元。

Proof. 对C的结构进行归纳：

1. 当C是简单概念时：

a. $C = \top$时，$\tau^x(\top) = x = x$ ，命题显然成立。

b. $C = \bot$时，$\tau^x(\bot) = \neg(x = x)$ ，命题显然成立。

c. $C = A$时，$\tau^x(A) = A(x)$ ，命题显然成立。

2. 假设对于比C结构简单的概念命题成立，则：

a. 当$C = \neg A$时，$\tau^x(\neg A) = \neg\tau^x(A)$。
因为$\tau^x(A)$ 以x为自由变元，且仅以x为自由变元，所以命题对$\neg A$成立。

b. 当$C = C \sqcap D$时，$\tau^x(C \sqcap D) = \tau^x(C) \wedge \tau^x(D)$。
因为$\tau^x(C)$ 和$\tau^x(D)$ 以x为自由变元，且仅以x为自由变元，所以命题对$C \sqcap D$成立。

c. 当$C = \forall R.C$时，$\tau^x(\forall R.C) = \forall y(R(x, y) \to \tau^y(C))$ 。
因为$\tau^y(C)$ 以y为自由变元，且仅以y为自由变元，所以x不在$\tau^y(C)$中自由出现。又y在$\forall y(R(x, y) \to \tau^y(C))$ 中是约束变元，故$\forall y(R(x, y) \to \tau^y(C))$以$x$为自由变元，且仅以$x$为自由变元。命题成立。

d. 当$C = \exists R.\top$时，$\tau^x(\exists R.\top) = \exists y(R(x, y) \wedge \tau^y(\top))$
因为$\tau^y(\top)$ 以y为自由变元，且仅以y为自由变元，所以x不在$\tau^y(\top)$中自由出现。因为y 在$\exists y(R(x, y) \wedge \tau^y(\top))$ 中是约束变元，故$\exists y(R(x, y) \wedge \tau^y(\top))$以$x$为自由变元，且仅以$x$为自由变元。命题成立。

综上所述，对于任意AL的概念C都有$\tau^x(C)$ 以x为自由变元，且仅以x为自由变元。同样，对于任意AL的概念C都有$\tau^y(C)$ 以y为自由变元，且仅以y为自由变元。 □

Proposition 2. 对于任意的AL概念C，$\tau^x(C)$ 中不出现函数符号。

Proof. 对C的结构进行归纳：

1. 当C是简单概念时：
a. $C = \top$时，$\tau^x(\top) = x = x$ ，命题显然成立。
b. $C = \bot$时，$\tau^x(\bot) = \neg(x = x)$ ，命题显然成立。

c. $C=A$时，$\tau^x(A)=A(x)$ ，命题显然成立。

2. 假设对于比C结构简单的概念命题成立，则：

a. 当$C=\neg A$时，$\tau^x(\neg A)=\neg\tau^x(A)$。
因为$\tau^x(A)$ 中没出现函数符号，所以$\neg\tau^x(A)$ 中没出现函数符号。因此命题对$\neg A$成立。

b. 当$C=C\sqcap D$时，$\tau^x(C\sqcap D)=\tau^x(C)\wedge\tau^x(D)$。
因为$\tau^x(C)$ 和$\tau^x(D)$ 中没出现函数符号，所以$\tau^x(C)\wedge\tau^x(D)$ 中没出现函数符号。因此命题对$C\sqcap D$成立。

c. 当$C=\forall R.C$时，$\tau^x(\forall R.C)=\forall y(R(x,y)\rightarrow\tau^y(C))$ 。
因为$\tau^y(C)$ 中没出现函数符号，所以$\forall y(R(x,y)\rightarrow\tau^y(C))$ 没有出现函数符号。因此命题对$C=\forall R.C$成立。

d. 当$C=\exists R.\top$时，$\tau^x(\exists R.\top)=\exists y(R(x,y)\wedge\tau^y(\top))$
因为$\tau^y(\top)$ 中没有出现函数符号，所以$\exists y(R(x,y)\wedge\tau^y(\top))$ 中没有出现函数符号。因此命题对$C=\exists R.\top$成立。

综上所述，对于任意AL的概念C都有$\tau^x(C)$ 中不出现函数符号。同样，对于任意AL的概念C都有$\tau^y(C)$ 中也不出现函数符号。 □

Proposition 3. 对于任意的AL概念C，$\tau^x(C)$ 中若出现谓词，则谓词至多是二元的。

Proof. 对C的结构进行归纳：

1. 当C是简单概念时：
a. $C=\top$时，$\tau^x(\top)=x=x$ ，命题显然成立。
b. $C=\bot$时，$\tau^x(\bot)=\neg(x=x)$ ，命题显然成立。

c. $C = A$时，$\tau^x(A) = A(x)$ ，命题显然成立。

2. 假设对于比C结构简单的概念命题成立，则：

a. 当$C = \neg A$时，$\tau^x(\neg A) = \neg\tau^x(A)$。
因为$\tau^x(A)$ 只有一元谓词A，所以$\neg\tau^x(A)$ 中也只有一元谓词A。因此命题对$\neg A$成立。

b. 当$C = C \sqcap D$时，$\tau^x(C \sqcap D) = \tau^x(C) \wedge \tau^x(D)$。
因为$\tau^x(C)$ 和$\tau^x(D)$ 中的谓词至多是二元的，所以$\tau^x(C) \wedge \tau^x(D)$ 中的谓词也至多是二元的。因此命题对$C \sqcap D$成立。

c. 当$C = \forall R.C$时，$\tau^x(\forall R.C) = \forall y(R(x,y) \to \tau^y(C))$ 。
因为$\tau^y(C)$ 中的谓词至多是二元的，所以$\forall y(R(x,y) \to \tau^y(C))$ 中的谓词也至多是二元的。因此命题对$C = \forall R.C$ 成立。

d. 当$C = \exists R.\top$时，$\tau^x(\exists R.\top) = \exists y(R(x,y) \wedge \tau^y(\top))$
因为$\tau^y(\top)$ 中的谓词至多是二元的，所以$\exists y(R(x,y) \wedge \tau^y(\top))$ 中的谓词也至多是二元的。因此命题对$C = \exists R.\top$成立。

综上所述，对于任意AL的概念C都有$\tau^x(C)$ 中的谓词至多是二元的。同样，对于任意AL的概念C都有$\tau^y(C)$ 中的谓词也至多是二元的。 □

Proposition 4. 对于任意的AL概念C，$\tau^x(C)$ 中至多出现两个个体变元。

Proof. 对C的结构进行归纳：

1. 当C是简单概念时：
a. $C = \top$时，$\tau^x(\top) = x = x$ ，命题显然成立。
b. $C = \bot$时，$\tau^x(\bot) = \neg(x = x)$ ，命题显然成立。
c. $C = A$时，$\tau^x(A) = A(x)$ ，命题显然成立。

2. 假设对于比C结构简单的概念命题成立，则：

a. 当$C = \neg A$时，$\tau^x(\neg A) = \neg\tau^x(A)$。
因为$\tau^x(A)$ 中只有一个个体变元x，所以$\neg\tau^x(A)$ 中只有一个个体变元x。因此命题对$\neg A$成立。

b. 当$C = C \sqcap D$时，$\tau^x(C \sqcap D) = \tau^x(C) \wedge \tau^x(D)$。
因为$\tau^x(C)$ 和$\tau^x(D)$ 中至多出现两个个体变元，所以$\tau^x(C) \wedge \tau^x(D)$ 中至多出现两个个体变元。因此命题对$C \sqcap D$成立。

c. 当$C = \forall R.C$时，$\tau^x(\forall R.C) = \forall y(R(x, y) \rightarrow \tau^y(C))$ 。
因为$\tau^y(C)$ 中至多出现两个个体变元，所以$\forall y(R(x, y) \rightarrow \tau^y(C))$ 至多出现两个个体变元。因此命题对$C = \forall R.C$ 成立。

d. 当$C = \exists R.\top$时，$\tau^x(\exists R.\top) = \exists y(R(x, y) \wedge \tau^y(\top))$
因为$\tau^y(\top)$ 中只有一个个体变元y，所以$\exists y(R(x, y) \wedge \tau^y(\top))$ 中只有两个个体变元x, y。因此命题对$C = \exists R.\top$成立。

综上所述，对于任意AL的概念C都有$\tau^x(C)$ 中至多只有两个个体变元。同样，对于任意AL的概念C都有$\tau^y(C)$ 中也至多只有两个个体变元。 □

[1]

Proposition 5. 对于任意的AL概念C，C和$\tau^x(C)$，$\tau^y(C)$是可满足性等价的。即τ^x ，$\tau^y(C)$是可满足性保持的。并且对于任意$M =< D, I >$ 是一个一阶谓词逻辑模型，$M \models C$ 当且仅当存在指派σ 使得$M, \sigma \models \tau^C$。

Proof. 对AL概念C的结构进行归纳证明：

1. 当C是简单概念时：

[1]对于任意的AL公式α，$\tau^x(\alpha)$ 也满足以上四个命题。证明略。

a. $C=\top$时，$\top^I=D$ ，因此$M\models\top$ 。$\tau^x(\top)=x=x$ ，因为对于任意的指派σ 都有$\sigma(x)=\sigma(x)$，所以$M\models x=x$ 。因此命题成立。

b. $C=\bot$时，$\bot^I=\emptyset$ ，因此$M\not\models\bot$ 。$\tau^x(\bot)=\neg(x=x)$ ，因为对于任意的指派σ，都有$\sigma(x)=\sigma(x)$，所以$M\not\models\neg(x=x)$ 。因此命题成立。

c. $C=A$时，

$\Rightarrow$: 当A可满足时，即$A^I\neq\emptyset$ ，即存在个体$a\in D$ 使得$a\in A^I$。不防令$\sigma(x)=a$，因为$a\in A^I$，所以$M\models A(a)$ ，即$\tau^x(A)$ 是可满足的。
$\Leftarrow$: 当$\tau^x(A)$ 是可满足的，则$M\models A(x)$，即存在指派σ使得$\sigma(x)\in A^I$，因此A^I非空，故A是可满足的。

2. 假设对于比C结构简单的概念命题成立，则：

a. 当$C=\neg A$时，
$\Rightarrow$；当$\neg A$可满足时，即$\neg A^I\neq\emptyset$ ，即存在个体$a\in D$ 使得$a\in\neg A^I$。不防令$\sigma(x)=a$，因为$a\in\neg A^I$，所以$M\models A(a)$ ，即$\tau^x(\neg A)$ 是可满足的。
$\Leftarrow$: 当$\tau^x(\neg A)$ 是可满足的，则$M\models\neg A(x)$，即存在指派σ使得$\sigma(x)\in\neg A^I$，因此$\neg A^I$非空，故$\neg A$是可满足的。
b. 当$C=C\sqcap D$时，

$\Rightarrow$: 若$C\sqcap D$ 是可满足的，则存在一个模型$M=<D,I>$ 使得$M\models C$ 并且$M\models D$。由归纳假设知：存在指派σ，使得$M\models C$ 当且仅当存在指派σ 使得$M,\sigma\models\tau^C$；$M\models D$ 当且仅当存在指派σ 使得$M,\sigma\models\tau^D$。因此$M,\sigma\models\tau^{C\wedge D}$。即$\tau^{C\wedge D}$是可满足的。

$\Leftarrow$:当$\tau^{C\wedge D}$是可满足的，则存在指派σ 使得$M,\sigma\models\tau^{C\wedge D}$。即$M,\sigma\models\tau^C$且$M,\sigma\models\tau^D$。由归纳假设知：$M\models C$ 并且$M\models D$。因此$M\models C\wedge D$ ，即$C\sqcap D$是可满足的。
c. 当$C=\forall R.C$时，

$\Rightarrow$: 当$\forall R.C$可满足时，存在$a\in D$ 使得$\forall y(R(a,y)\rightarrow C(y))$。不防

令$\sigma(x) = a$, 则$M, \sigma \models \forall y(R(x, y) \to C(y))$，即$M, \sigma \models \tau^x(\forall R.C)$。$\Leftarrow$: 若$\tau^x(\forall R.C)$是可满足的，则存在$M, \sigma \models \tau^x(\forall R.C)$。即$M \models \forall y(R(\sigma(x), y) \to C(y))$，即$\forall R.C^I \neq \emptyset$，因此$\forall R.C$可满足。

d. 当$C = \exists R.\top$时，

$\Rightarrow$: 若$\exists R.\top$ 可满足，则存在$a \in D$使得$M \models \exists y(R(a, y) \wedge y = y)$。不防令$\sigma(x) = a$，则$M, \sigma \models \exists y(R(a, y) \wedge y = y)$，即$M, \sigma \models \tau(\exists R.\top)$。

$\Leftarrow$:若$\tau(\exists R.\top)$可满足，则存在M, σ 使得$M, \sigma \models \exists y(R(\sigma(x), y) \wedge y = y)$，即$\sigma(x) \in (\exists R.\top)^I$。因此$M \models \exists R.\top$，$\exists R.\top$ 是可满足的。

综上所述，对于任意AL的概念C该命题都成立。 □

[2]

定理6. 描述逻辑AL的概念和公式可以模型等价地翻译到至多含有两个个体变元且恰有一个自由变元、不含函数符号、谓词至多不超过二元的一阶公式。且$\tau^x(C)$以x为自由变元，$\tau^y(C)$以y为自由变元。

Proof. 证明可由以上命题3.2.1-3.2.5综合得到，不再赘述。 □

Corollary 7.

- 对于任意AL概念C，除了$C(a), R(a, b)$形式的闭公式之外的公式α，$\forall x \tau^x(C)$，$\forall x \tau^x(\alpha)$ 是一个至多含有两个个体变元且恰有一个自由变元、不含函数符号、谓词至多不超过二元的一阶句子。

- 一个至多含有两个个体变元且恰有一个自由变元、不含函数符号、谓词至多不超过二元的一阶句子的可满足性是可判定的。

- C与$\tau^x(C)$可满足性等价。

- 若$\forall x \tau^x(C)$ 是可满足的，则$\tau^x(C)$是可满足的。*(一阶逻辑的元理论。)*

- 若$\forall x \tau^x(\alpha)$ 是可满足的，则$\tau^x(\alpha)$是可满足的。*(一阶逻辑的元理论。)*

由以上AL的概念、公式到一阶谓词逻辑公式的翻译表，以及如上四个命题可知AL语言对应的一阶谓词语言是如下：

[2]对于任意的AL公式α和$\tau^x(\alpha)$是可满足性等价的。证明略。

个体常元：$c_1, c_2, \ldots$

个体变元：$x$fi$y$

一元谓词符号：$P_1^1, P_2^1, \ldots$

二元谓词符号:$P_1^2, P_2^2, \ldots$

逻辑常项：$\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \forall, \exists$

不妨将上述语言称为：$FO^{2,2,=}$，表示只有两个自由变元、只有一元谓词和二元谓词，带等词，且没有函数符号的一阶语言的子语言。$FO^{2,2,=}$的公式形成规则和FO相同。虽然$FO^{2,2,=}$是一阶语言的一个受限制的子语言，但是它的表达能力仍然比AL的表达力要强。将AL中的所有概念和公式被翻译的公式集合记为：$\tau(AL)$。$FO^{2,2,=}$的公式集记为：$F(FO^{2,2,=})$。因为AL中存在量词只允许出现在$\exists R.\top$ 类型的概念里，而$\tau^x(\exists R.\top)$=$\exists y(R(x,y) \wedge y=y)$，$\tau^x(AL)$中的存在量词只能在$\exists y(R(x,y) \wedge y=y)$类型的公式中出现。而所有$\Sigma_{(FO^{2,2,=})}$类型的公式都是$F(FO^{2,2,=})$中的公式。因此$F(FO^{2,2,=})$比$\tau(AL)$ 中的公式多。

至此，我们以描述逻辑的最基本的语言AL为例，澄清了“描述逻辑是一阶逻辑的可判定子集”的涵义。简而言之，描述逻辑AL对应于一阶逻辑的一个可判定片段。描述逻辑AL虽然表达方式比一阶逻辑简洁精巧，但是表达力弱。因此就有了对AL的各种扩张，且尽量保持逻辑的可判定性。在描述逻辑的研究历史上，很多专家学者对描述逻辑AL 逐步进行扩张，并且研究了这些描述逻辑与多模态逻辑K_m（*multi-modal logic*）、命题动态逻辑(*propositionositional dynamic logic*)、μ-演算、分级模态逻辑（*granded modal logic*）等之间的对应理论。这些研究表明：描述逻辑是逻辑与人工智能、计算机科学、数据管理、数据发掘等理论及应用领域的纽带，也彰显了逻辑对于这些学科的理论指导意义。

3 描述逻辑AL的自然推演系统

迄今为止，对于描述逻辑的研究主要关注于语言的扩张和判定算法的设计，没有描述逻辑的公理化系统或者自然推演系统。因此，描述逻辑语言背后的逻辑系统有待研究。本文尝试给出描述逻辑Al的自然推演系统。A是Al的原子概念，C, D, E是AL的概念，R, S, T 是AL 的角色，

a, b是AL的个体。

推理规则：

1. $C \sqsubseteq D, \quad D \sqsubseteq E \quad \Rightarrow \quad D \sqsubseteq E$
2. $C \equiv D, \quad D \equiv E \quad \Rightarrow \quad D \equiv E$
3. $\forall R.C(a), \quad R(a,b) \quad \Rightarrow \quad C(b)$
4. $\forall R.C(a), \quad \Rightarrow \quad \exists R.C(a)$
5. $\exists R.\top(a), \quad \Rightarrow \quad \exists b, R(a,b)$
6. $R \sqsubseteq S, \quad S \sqsubseteq T \quad \Rightarrow \quad R \sqsubseteq T$
7. $R \equiv S, \quad S \equiv T \quad \Rightarrow \quad R \equiv T$
8. $(C \wedge D)(a), \quad \Rightarrow \quad C(a)$
9. $(C \wedge D)(a), \quad \Rightarrow \quad D(a)$
10. $\neg A(a), A(a) \quad \Rightarrow \quad \perp(a)$
11. $R \sqsubseteq S, R(a,b) \quad \Rightarrow \quad S(a,b)$
12. $R \equiv S, R(a,b) \quad \Rightarrow \quad S(a,b)$
13. $R \sqsubseteq S \quad \Rightarrow \quad \forall S.C \sqsubseteq \forall R.C$
14. $R \equiv S \quad \Rightarrow \quad \forall S.C \equiv \forall R.C$
15. $C(a), D(a) \quad \Rightarrow \quad (C \sqcap D)(a)$
16. $R \sqsubseteq S \quad \Rightarrow \quad \exists S.C \sqsubseteq \exists R.C$
17. $R \equiv S \quad \Rightarrow \quad \exists S.\top \equiv \exists R.\top$
18. $R(a,b) \quad \Rightarrow \quad \exists R.\top(a)$
19. $\forall R.(C \sqcap D)(a) \quad \Rightarrow \quad \forall R.C(a), \forall R.D(a)$
20. $\forall R.(\neg A)(a), R(a,b), A(b) \quad \Rightarrow \quad \perp$

注： 本文目前只给出这20条推理规则，并非该逻辑恰有这20条推理规则，这些规则是否完备还有待证明。

将来的工作： 考察描述逻辑AL的本质及其自然推演系统研究不是最终目的，只是的后继的工作理论基础。接下来将在此基础上对其进行概称句的扩张，并且给出扩张后的逻辑演算系统，相关工作讲另文考察。

References

[1] Franz Baader, Deborah L. McGuinness,Daniele Nardi, Peter F.Patel-Schneider, The description logic handbook: Theory, implementation and application, 2007

[2] Alex Borgida, On the relative expressiveness of desvripiton logics and predicate logics , arificial intelligence 82(1996), page 353-367,1996.

[3] Klaus Schild, A correspondence theory for terminological logics: preliminary report, Knowledge Representation,In Proceedings of the 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-91), pages 466–471, 1991

[4] 余泉，王驹，模态描述逻辑的模型，南京大学学报数学半年刊，*Vol.24, No.2,Nov., 2007.*