几类性质词的逻辑特征

刘壮虎

(北京大学哲学系，北京，100871)

一阶逻辑中的谓词实质上是刻画类的谓词，并不直接刻画性质词，例如在刻画“红的”、“大的”等性质词时，实际上是刻画的是类谓词“红的物体”、“大的物体”等。在《复合谓词的逻辑系统》[1]（以下简称《复合谓词》）一文中，作者区分了性质词和类谓词，构造了更为精细的逻辑系统，直接处理性质词。本文在此基础上，讨论几类性质词的逻辑特征。

1　复合谓词的逻辑系统

从一个非逻辑符号是一元谓词的(不带等词的)一阶语言出发，进行精细化，就得到复合谓词逻辑的形式语言。

将一元谓词精细成以下几部分：

(1) 基本谓词；

(2) 性质词；

(3) 限制号 $\circ$；

(4) 联接号　$\cap$、$\cup$；

(5) 辅助符号　(，)。

其他初始符号同一阶逻辑。[2]

复合谓词逻辑形式语言的谓词（用 R, Q, S 等表示）由归纳定义得到：

(1) 基本谓词是谓词；

(2) 如果 R 是谓词，F 是性质词，则 $F\circ R$ 是谓词；

(3) 如果 R 和 Q 都是谓词，则$(R\cap Q)$和$(R\cup Q)$是谓词。

和一阶逻辑类似，描述一个复合谓词逻辑的语言只需描述它的谓词和性质词。

例 1　L = {**R**, **Q**, **F**, **G**, **H**}是一个语言，其中 **R**, **Q** 是谓词，**F**, **G**, **H** 是性质词。

因为在复合谓词逻辑的形式语言中没有常量和函数词，所以没有必要引进项的概念。

公式的定义除原子公式稍有差异外，其它同一阶逻辑[2]。原子公式的定义是：

如果 x 是变元，R 是谓词，则 $R(x)$是原子公式。[1]

因为复合谓词形式语言是一阶形式语言的精细化，所以它的语义也是一阶语义的精细化。

结构　一个结构是一个有序对 A = <D, η>，其中 D 是非空集合，η是全体谓词的集合到 P(D)的映射，满足：

(1) 任给谓词 R, Q，都有

$$\eta(R\cap Q) = \eta(R)\cap\eta(Q),$$

$$\eta(R\cup Q) = \eta(R)\cup\eta(Q)。$$

(2) 任给谓词 R 和性质词 F，都有

$$\eta(F\circ R) \subseteq \eta(R);$$

(3) 任给类谓词 R, Q 和性质谓词 F，都有

如果$\eta(R) = \eta(Q)$，则$\eta(F\circ R) = \eta(F\circ Q)$。

η的性质(3)体现了现在逻辑中重要的组合原则。由组合原则，性质词 F 的解释是一个有限制的二阶算子。

1　这里的形式语言和《复合谓词》一文中的形式语言稍有差别。

(1) 在《复合谓词》中用的是类谓词和性质谓词，考虑到性质谓词在语法和语义方面都不是谓词，所以本文中称为性质词而不称为性质谓词，而《复合谓词》中的类谓词在本文中称为谓词。

(2) 本文讨论的是性质词的逻辑特征，为简单起见，在语言中不引进常量。

(3) 在《复合谓词》中谓词的联接号还有 －（非），但类的“非”是一个复杂的问题，用一个简单的联接号来表示是不合适的，所以本文中不使用联接号－。

令$\Delta = \{\eta(R) \mid R$ 是类谓词$\}$，任给性质谓词 F，由η的性质(3)，可以构造Δ到Δ的映射

$\eta(F)$：$\Delta \to \Delta \quad \eta(F)(\eta(R)) = \eta(F \circ R)$。

$\eta(F)$就是性质谓词 F 在结构 A 中的解释。

有限制的意思是：$\eta(F)$仅仅对Δ中的集合有定义。从这个限制可以看到，在这个逻辑中，性质词的意义是和所使用的语言有关。

例 2 对于例 1 中的语言 $L = \{\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}\}$可以构造一个结构如下：其中 D 是全体笔的集合，$\eta(\mathbf{R}) =$ 钢笔，$\eta(\mathbf{Q}) =$ 铅笔，$\eta(\mathbf{F}) =$ 红的，$\eta(\mathbf{G}) =$ 蓝的，$\eta(\mathbf{H}) =$ 黄的。

在这个结构中，“红的”的意义是：将“钢笔”映到“红钢笔”（$\eta(\mathbf{F})(\eta(\mathbf{R})) = \eta(\mathbf{F} \circ \mathbf{R})$），将“铅笔”映到“红铅笔”（$\eta(\mathbf{F})(\eta(\mathbf{Q})) = \eta(\mathbf{F} \circ \mathbf{Q})$）。虽然 D 中有“粉笔”这个子集，但“红的”的意义和粉笔无关。

定义 2 赋值 $A = \langle D, \tau, \eta \rangle$是结构，A 上的一个赋值 V 是全体变元的集合到 D 的映射。

定义 3 解释 一个解释是有序对$\sigma = \langle A, V \rangle$，其中 A 是结构，V 是 A 上的赋值。

设 $A = \langle D, \eta \rangle$是结构，$\sigma = \langle A, V \rangle$是解释。任给变元 x，记 $V(x)$为$\sigma(x)$。任给类谓词 R，记$\eta(R)$为$\sigma(R)$。

定义 4 满足 $\sigma = \langle A, V \rangle$是解释，$R(x)$是原子公式，$\sigma \models R(x)$ (称为σ满足 $R(x)$)定义如下：

$\sigma \models R(x)$ 当且仅当 $\sigma(x) \in \sigma(R)$。

用和一阶逻辑同样的方法，通过归纳定义，可将满足关系扩充为$\sigma \models \alpha$ (称为σ满足α)，其中α是任何公式。

也和一阶逻辑一样，如果Φ是公式集，可以定义$\sigma \models \Phi$(称为σ满足α)如下：

$\sigma \models \Phi$ 当且仅当 任给$\alpha \in \Phi$，都有$\sigma \models \alpha$。

和一阶逻辑类似，当α是闭公式时，可以直接说一个结构 A 满足α (记为 $A \models \alpha$)。

对于带一个自由变元的公式$\alpha(x)$和 D 中的元素 d，也可以类似地定义 $A \models \alpha[d]$。[2]

定义 5 有效式 α是公式，如果任给解释σ，都有$\sigma \models \alpha$，则称α是有效式。

复合谓词逻辑的公理系统 CQL，CQL 对于上述语义解释的可靠性和完全性，可参考《复合谓词》一文。

2 完备的性质词

定义 6 完备 $A = \langle D, \eta \rangle$是一个结构，$F_1, \cdots, F_n$ 是一组性质词，R 是谓词。

(1) R 是谓词。如果$\eta(F_1 \circ R) \cup \cdots \cup \eta(F_n \circ R) = \eta(R)$，则称在结构 A 中，性质词组 $F_1, \cdots, F_n$ 对于谓词 R 是完备的。

(2) 如果对所有谓词 R，$F_1, \cdots, F_n$ 对于谓词 R 都是完备的，则称在结构 A 中，性质词组 $F_1, \cdots, F_n$ 是完备的。

例 3 考虑例 2 中的语言和结构，假设钢笔只有红和蓝两种颜色，铅笔红黄蓝三种颜色。

$\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 对于 $\mathbf{R}$ 是完备，对于 $\mathbf{Q}$ 不是完备的，所以在这个结构中 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 不是完备的。

$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ 对于 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{Q}$ 都是完备的，所以在这个结构中 $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ 是完备的。

例 4 同样考虑例 2 中的语言，结构稍有改动，将 $\mathbf{R}$ 解释成粉笔。

这样，$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ 对于 $\mathbf{R}$ 是不完备的，所以在这个结构中 $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ 不是完备的。

以下给出性质词组 $F_1, \cdots, F_n$ 在结构 A 中是完备的充要条件。

对于带一个自由变元的公式$\alpha(x)$可以定义 D 的子集

$D_\alpha = \{d \mid d \in D$ 且 $A \models \alpha[d]\}$

D_α有以下性质：

定理 1

(1) $D_{\alpha \wedge \beta} = D_\alpha \cap D_\beta$，$D_{\alpha \vee \beta} = D_\alpha \cup D_\beta$。

(2) $A \models \forall x(\alpha(x) \to \beta(x))$ 当且仅当 $D_\alpha \subseteq D_\beta$。

(3) $A \models \forall x(\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x))$，当且仅当 $D_\alpha = D_\beta$。

(4) 如果 R 是谓词，$\alpha(x) = R(x)$，则 $D_\alpha = \eta(R)$。

定理 2 以下两个条件等价。

(1) 在结构 A 中，性质词组 $F_1,\cdots,F_n$ 是完备的。

(2) 任给谓词 R，都有 $A \models \forall x(F_1\circ R(x)\vee\cdots\vee F_n\circ R(x)\Leftrightarrow R(x))$。

证 令$\beta(x) = R(x)$，$\alpha_i(x) = F_i\circ R(x)$，

$\alpha(x) = F_1\circ R(x)\vee\cdots\vee F_n\circ R(x)$。

(1)⇒(2)：因为$\eta(F_1\circ R)\cup\cdots\cup\eta(F_n\circ R) = \eta(R)$，所以由定理 1(4)得

$$D_{\alpha 1}\cup\cdots\cup D_{\alpha n}= D_\beta,$$

由定理 1(1)得 $D_\alpha = D_\beta$，再由定理 1(3)得

$$A\models \forall x(\alpha(x)\to\beta(x))$$

即 $A\models \forall x(F_1\circ R(x)\vee\cdots\vee F_n\circ R(x)\Leftrightarrow R(x))$。

(2)⇒(1)：因为 $A\models \forall x(F_1\circ R(x)\vee\cdots\vee F_n\circ R(x)\Leftrightarrow R(x))$，即

$$A\models \forall x(\alpha(x)\to\beta(x))$$

由定理 1(3)得 $D_\alpha = D_\beta$，再定理 1(1)得

$$D_{\alpha 1}\cup\cdots\cup D_{\alpha n}= D_\beta,$$

由定理 1(4)得$\eta(F_1\circ R)\cup\cdots\cup\eta(F_n\circ R) = \eta(R)$。■

3 相对性质词

在《复合谓词》一文中，通过“大的”这个性质词，说明了不是每个性质词都能够化为谓词。“大的”这个性质词还有更多的特征。

“大的”实际上并不在语言中单独出现，有“大的”，就有“小的”，有时还有“中的”。

“大的”、“中的”和“小的”，构成了一种“序”，它们作用在谓词，将谓词的解释（是一个类）分成了三个“有序”的类。这样的一组性质词称为相对性质词。

因为相对性质词是一种“序”，所以如果两个谓词 R 和 Q 的解释$\eta(R)\subseteq\eta(Q)$，则$\eta(R)$的“有序”类中总有一个包含在$\eta(Q)$的相应的“有序”类中。（这个性质可以称为相对性质词的弱单调性。）

例 5 考虑例 1 中的语言，给出一个新的结构如下：其中 D 是全体生物的集合，$\eta(\mathbf{R})=$ 蚂蚁，$\eta(\mathbf{Q})=$ 动物，$\eta(\mathbf{F})=$ 大的，$\eta(\mathbf{G})=$ 中的，$\eta(\mathbf{H})=$ 小的。

大的、中的、小的将动物分成大动物、中动物和小动物，将蚂蚁分成大蚂蚁、中蚂蚁和小蚂蚁。

虽然大蚂蚁并不是大动物，但小蚂蚁一定是小动物。

例 6 修改例 5 中的结构，将$\eta(\mathbf{R})$改为鲸鱼，其它不变。这时，小鲸鱼不是小动物，但大鲸鱼一定是大动物。

因为我们的语言无法直接表示“序”，所以用弱单调性来刻画相对性质词。注意，我们首先要求这组性质词是完备的，否则弱单调性就不一定成立。

例 7 修改例 5 中的结构，将$\eta(\mathbf{R})$改为老鼠（假设老鼠是中动物），其它不变。考虑不完备的一组性质词“大的”和“小的”，我们就有：小老鼠不是小动物，大老鼠也不是大动物。

定义 7 相对性质词 $A = \langle D, \eta\rangle$是一个结构，$F_1,\cdots,F_n$ 是一组性质词。在结构 A 中，性质词组 $F_1,\cdots,F_n$ 称为相对的，如果 $F_1,\cdots,F_n$ 满足以下条件：

(1) 在结构 A 中，性质词组 $F_1,\cdots,F_n$ 是完备的。

(2) 弱单调性 任给谓词 R 和 Q，如果$\eta(R)\subseteq\eta(Q)$，则存在 $1\le i\le n$，使得$\eta(F_i\circ R)\subseteq\eta(F_i\circ Q)$。

例 8 考虑例 5 和例 6 中的结构。对于这两个结构，**F, G, H** 都是相对的。

以下给出性质词组$F_1,\cdots,F_n$在结构A中是完备的充要条件。

定理 3 以下两个条件等价。

(1) 在结构 A 中，性质词组 $F_1,\cdots,F_n$ 有弱单调性。

(2) 任给谓词 R 和 Q，如果 $A\models\forall x(R(x)\to Q(x))$，则存在 $1\le i\le n$，使得 $A\models\forall x(F_i\circ R(x)\to F_i\circ Q(x))$。

证 (1)⇒(2)：任给谓词 R 和 Q，如果 $A\models\forall x(R(x)\to Q(x))$，则由定理 1(2)和(4)得

$$\eta(R)\subseteq\eta(Q),$$

由弱单调性得存在 $1\le i\le n$，使得$\eta(F_i\circ R)\subseteq\eta(F_i\circ Q)$，再由定理 1(2)

和(4)得

存在 1≤i≤n，使得 A$\models \forall x(F_i\circ R(x)\rightarrow F_i\circ Q(x))$

(2)⇒(1)：任给谓词 R 和 Q，如果$\eta(R)\subseteq\eta(Q)$，则由定理 1(2)和(4)得

A$\models \forall x(R(x)\rightarrow Q(x))$

所以存在 1≤i≤n，使得 A$\models \forall x(F_i\circ R(x)\rightarrow F_i\circ Q(x))$，再由定理 1(2)和(4)得

存在 1≤i≤n，使得$\eta(F_i\circ R)\subseteq\eta(F_i\circ Q)$。

■

定理 4 在结构 A 中，性质词组 $F_1,\cdots, F_n$ 是相对的，当且仅当，性质词组 $F_1,\cdots, F_n$ 满足以下条件：

(1) 任给谓词 R，都有 A$\models \forall x(F_1\circ R(x)\vee\cdots\vee F_n\circ R(x)\leftrightarrow R(x))$。

(2) 任给谓词 R 和 Q，如果 A$\models \forall x(R(x)\rightarrow Q(x))$，则存在 1≤i≤n，使得 A$\models \forall x(F_i\circ R(x)\rightarrow F_i\circ Q(x))$。

证 由定理 2 和 3。■

3 拟类性质词

虽然将性质词作为谓词会带来问题，但有不少性质词可以归约为谓词，如“红的”就可以归约为“红的物体”。在这种归约下，性质词对谓词的限制，就归约为两个谓词的交，如“红铅笔”就归约为“红的物体”和“铅笔”的交。

这样的性质词称为拟类性质词，以下是它的严格定义。

定义 6 拟类性质词 A = <D, η>是结构，F 是性质词。如果存在 D 的子集 E，使得任给谓词 R，都有$\eta(F\circ R)$ = E$\cap\eta(R)$，则称在结构 A 中，F 是拟类性质词。

拟类性质词和上面讨论的完备性质词和相对性质词不同。对于完备性质词和相对性质词，根据定义，很容易找出它们的语义条件。因为并没有谓词来表示类 E，所以并不能从直接从定义找出它的语义条件。

先来看看拟类性质词有什么性质？

定理 4 拟类性质词有以下重要性质。

(1) 单调性 任给谓词 R 和 Q，如果 A$\models \forall x(R(x)\rightarrow Q(x))$，则 A$\models \forall x(F\circ R(x)\rightarrow F\circ Q(x))$。

(2) 分配性 任给谓词 R 和 Q，都有

A$\models \forall x(F\circ(R\cap Q)(x)\leftrightarrow F\circ R(x)\wedge F\circ Q(x))$，

A$\models \forall x(F\circ(R\cup Q)(x)\leftrightarrow F\circ R(x)\vee F\circ Q(x))$。

证 (1) 如果 A$\models \forall x(R(x)\rightarrow Q(x))$，则$\eta(R)\subseteq\eta(Q)$，所以

E$\cap\eta(R)\subseteq$E$\cap\eta(Q)$，

也就是

$\eta(F\circ R)\subseteq\eta(F\circ Q)$，

因此 A$\models \forall x(F\circ R(x)\rightarrow F\circ Q(x))$。

(2) 因为$\eta(F\circ(R\cap Q)$ = E$\cap\eta(R\cap Q)$ = E$\cap(\eta(R)\cap\eta(Q))$

= (E$\cap\eta(R))\cap($E$\cap\eta(Q)) = \eta(F\circ R)\cap\eta(F\circ Q)$，

由定理 1(1), (3)和(4)得

A$\models \forall x(F\circ(R\cap Q)(x)\leftrightarrow F\circ R(x)\wedge F\circ Q(x))$。

因为$\eta(F\circ(R\cup Q)$ = E$\cap\eta(R\cup Q)$ = E$\cap(\eta(R)\cup\eta(Q))$

= (E$\cap\eta(R))\cup($E$\cap\eta(Q)) = \eta(F\circ R)\cup\eta(F\circ Q)$，

由定理 1(1), (3)和(4)得

A$\models \forall x(F\circ(R\cup Q)(x)\leftrightarrow F\circ R(x)\vee F\circ Q(x))$。

■

但是这些性质不足以刻画拟类性质词

例 9 L = {**R**, **Q**, **F**}，其中 **R**, **Q** 是谓词，**F** 是性质词。取结构如下：D = {0, 1, 2, 3}，η(**R**) = {0, 1, 2}，η(**Q**) = {0, 1, 3}，这样就有η(**R**∩**Q**) = {0, 1}，η(**R**∪**Q**) = {0, 1, 2, 3}。

η(**F**)将{0, 1, 2}映到{0}，将{0, 1, 3}映到{1}，将{0, 1, 2, 3}映到{0, 1}，将{0, 1}映到空集∅。

在这个结构中，**F** 有单调性和分配性，但 **F** 不是拟类性质词。

定理 5 以下两个条件等价。

(1) 在结构 A 中，F 是拟类性质词。

(2) 任给谓词 R 和 Q，都有

A$\models \forall x(F\circ R(x)\wedge Q(x)\leftrightarrow R(x)\wedge F\circ Q(x))$。

证 (1)$\Rightarrow$(2)：任给谓词 R 和 Q，都有

$$\eta(F\circ R)\cap\eta(Q) = (\mathrm{E}\cap\eta(R))\cap\eta(Q)$$
$$= \eta(R)\cap(\mathrm{E}\cap\eta(Q)) = \eta(R)\cap\eta(F\circ Q)$$

由定理 1(1), (3)和(4)得

$$\mathrm{A}\models\forall x(F\circ R(x)\wedge Q(x)\Leftrightarrow R(x)\wedge F\circ Q(x))。$$

(2)$\Rightarrow$(1)：任给谓词 R 和 Q，因为

$$\mathrm{A}\models\forall x(F\circ R(x)\wedge Q(x)\Leftrightarrow R(x)\wedge F\circ Q(x)),$$

所以

$$\eta(F\circ R)\cap\eta(Q) = \eta(R)\cap\eta(F\circ Q)$$

取$=\cup\{\eta(F\circ R)\mid R$ 是谓词$\}$，则任给谓词 Q，因为 $F\circ Q$ 是谓词，所以

$$\eta(F\circ Q)\subseteq\{\eta(R)\mid R \text{ 是谓词}\}$$

因此

$$\mathrm{E}\cap\eta(Q)$$
$$=\cup\{\eta(F\circ R)\mid R \text{ 是谓词}\}\cap\eta(Q)$$
$$=\cup\{\eta(F\circ R)\cap\eta(Q)\mid R \text{ 是谓词}\}$$
$$=\cup\{\eta(R)\cap\eta(F\circ Q)\mid R \text{ 是谓词}\}$$
$$=\cup\{\eta(R)\mid R \text{ 是谓词}\}\cap\eta(F\circ Q)$$
$$=\eta(F\circ Q)$$

■

参 考 文 献

[1] 刘壮虎. 复合谓词的逻辑[J]. 自然辩证法研究, 2000 增刊.

[2] 叶峰. 一阶逻辑与一阶理论[M]. 北京：中国社会科学出版社, 1994.