



北京大學

# 博士研究生学位论文

题目：弱聚合模态逻辑的模型论研究

姓名：刘佶鑫

学号：1501110832

院系：哲学系

专业：逻辑学

研究方向：模态逻辑

导师姓名：周北海 教授

二〇一九年五月

## 摘要

本文对弱聚合模态逻辑做了模型论视角的整体阐述，主要工作集中于语义学，表达力，和插值定理。<sup>①</sup>弱聚合模态逻辑 (WAML) 是正规多元模态逻辑 (PML) 的变形：它的  $n$  元模态算子辖域内的每个变项是相同的。本文的主要出发点是两种不同的语义学： $n$  元关系语义和邻域语义。

由于 WAML 在关系语义下可看作是 PML 的特例，故本文在第一部分工作中先介绍了 PML 的基础模型论理论并考察了正规多元模态逻辑  $\mathbb{K}_n$ 。 $\mathbb{K}_n$  是基本一元正规模态逻辑系统  $K$  在  $n$  元算子上的推广。本文对文献中的  $\mathbb{K}_n$  公理化做了一些澄清，并补充了有关滤 (filtration) 和超滤扩张 (ultrafilter extension) 的基础定理证明。同时，本文也重述了 PML 语言下的 van Benthem 刻画定理的证明，并利用紧致性给  $\mathbb{K}_n$  的 Craig 插值定理做了简化的模型论证明。

本文第二部分从关系语义出发，依靠标准典范模型方法对 WAML 基础系统  $\mathbb{K}_n^w$  的完全性做了简化版的典范模型证明。而后给出了新的互模拟 (bisimulation) 概念，并利用这种互模拟概念和饱和模型方法证明了 van Benthem 刻画定理。之后，本文利用  $n$  元树展开 (unraveling) 证明了 WAML 在有穷模型上的刻画定理—Rosen 定理。最后利用反例说明了  $\mathbb{K}_n^w$  缺少插值性，并且找到了二元 WAML 系统  $\mathbb{K}_2^w$  的一个特别的扩充  $\mathbb{K}_2^c$ 。利用有穷模型方法证明了  $\mathbb{K}_2^c$  上的 Craig 插值定理。

第三部分工作是研究 WAML 的邻域模型。WAML 的邻域模型对应的框架性质是滤子的一种推广— $n$ -滤子。本文利用布尔函数和 Post 格中的克隆理论证明了这类  $n$ -滤子邻域框架具有某种弱粘合性。同时，也证明了  $\mathbb{K}_2^c$  的有穷模型具有较强的粘合性，而这也说明了  $\mathbb{K}_2^c$  具有插值性的原因。这部分工作虽然无法直接应用，但从中亦可看出

<sup>①</sup>本文中有一部分工作是与王彦晶老师及丁一峰合作的，我将在文中注明。

插值性在模型论上是如何体现的。

**关键词：**多元模态逻辑，弱聚合模态逻辑，插值定理，刻画定理，完全性