强极小理论简介

秦云飞

北京大学哲学系

2019 年 11 月 5 日

1. 引言

一个理论 T 是完全的 $\Rightarrow$ 对 T 的任意两个模型 $\mathcal{M},\mathcal{N}$，$\mathcal{M}\equiv\mathcal{N}$.

一个理论 T 是?? 的 $\Rightarrow$ 对 T 的任意两个模型 $\mathcal{M},\mathcal{N}$，$\mathcal{M}\cong\mathcal{N}$.

Löwenheim-Skolem 定理

对任可数语言上的理论 T，如 T 有无穷模型，则对任 $\kappa\geq\aleph_0$，存在 $\mathcal{M}\models T$，$|\mathcal{M}|=\kappa$.

理论 T 的任意两个模型 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 都有 $\mathcal{M}\cong\mathcal{N}\Rightarrow T$ 只有有限模型.

1. 引言

退一步:
一个理论 T 是?? 的 $\Rightarrow$ 对 T 的任意两个模型 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$，如 $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}|$ 则 $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

定义

对任基数 κ，如果理论 T 的任意两个模型 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 都满足:
$|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}| \Rightarrow \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$，称 T 是 $\kappa-$ 范畴的（$\kappa-$categorical）。

不同的基数 κ 对“T 是 $\kappa-$ 范畴的”是否有什么不同的要求？

1. 引言

事实上，对所有不可数基数 κ，这样的“要求”是相同的：

Morley 定理

设 T 为可数语言上的完全理论，如果存在 $\kappa > \aleph_0$ 使得 T 是 $\kappa-$ 范畴的，则对任 $\lambda > \aleph_0$，T 是 $\lambda-$ 范畴的。

事实

T 是 $\aleph_0-$ 范畴的 $\not\Rightarrow$ 对任 $\lambda \geq \aleph_0$，T 是 $\lambda-$ 范畴的.
对 $\kappa > \aleph_0, T$ 是 $\kappa-$ 范畴的 $\not\Rightarrow$ T 是 $\aleph_0-$ 范畴的.

- 如何证明 Morley 定理？对强极小理论的研究是如何从 Morley 定理的证明中产生的？
- 有限模型理论的启示：对每一种可以用一阶语言描述的性质、关系，在一个模型中都只有有限多个元素能够满足之。
- 把无穷模型理论具有的这种有限性严格化表达，就是“强极小”。

2. 强极小理论的基本性质

对结构 $\mathcal{M}$，$a_1, \ldots, a_n \in M$，公式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$，如果对 $\mathcal{M}$ 上赋值 ρ，$\rho(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n) \vDash \phi(x_1, \ldots, x_n)$，我们简记为 $\mathcal{M} \vDash \phi(\bar{a})$.

定义

- 设 $\mathcal{M}$ 是一个结构，对任 $n \in \mathbf{N}$，对任 $D \subseteq M^n$，如果存在 $L-$ 公式 $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), b_1, \ldots, b_m \in M$，$D = \{(a_1, \ldots, a_n) | \mathcal{M} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)\}$，则称 D 是可定义集（definable set），记 D 为 $\phi(\mathcal{M}, b_1, \ldots, b_m)$ 或 $\phi(\mathcal{M}, \bar{b})$.
- 对可定义集 $\phi(\mathcal{M}, \bar{b})$，和任 $A \subseteq M$，如 $\bar{b} \in A$，称 $\phi(\mathcal{M}, \bar{b})$ 是 A-可定义集。

例

设 $\mathcal{M}$ 是一个结构，则

- $M^n, \emptyset$ 是在 $\mathcal{M}$ 上可定义的，且是 $\emptyset$-可定义的；
- 对任有限集 $D \subseteq M^n$，D 是可定义的，从而 M^n 的任一余有限子集也是可定义的。

2. 强极小理论的基本性质

定义

- 设 $\mathcal{M}$ 是一个结构，且 $|M| \geq \omega$，如 $\mathcal{M}$ 上任意可定义集的都是有穷或余有穷的，称 $\mathcal{M}$ 是一个极小结构（minimal structure）。
- 设 $\mathcal{M}$ 是一个结构，如对任结构 $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$，都有 $\mathcal{M}'$ 是极小结构，则称 $\mathcal{M}$ 是强极小结构（strong minimal structure）。
- 如理论 T 的任一模型都是极小的，称 T 是强极小理论（strong minimal theory）。

显然

- T 强极小 $\Leftrightarrow \forall \mathcal{M} \vDash T, \mathcal{M}$ 强极小；
- 如 T 完全，T 强极小 $\Leftrightarrow \exists \mathcal{M} \vDash T$ 强极小。

2. 强极小理论的基本性质

引理 2.1

设 T 为强极小理论，则对任公式 $\phi(x,\bar{y})$，存在 $n_\phi \in \mathbb{N}$，对任 $\mathcal{M} \models T$，对任 $\bar{b} \in M$，$|\phi(\mathcal{M},\bar{b})| \leq n_\phi$ 或 $|M \setminus \phi(\mathcal{M},\bar{b})| \leq n_\phi$.

证明.

令语言 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{b_1, ..., b_{|\bar{y}|}\}$ ($\bar{b} \notin \mathcal{L}$)，对任 $n \in \mathbb{N}$，定义 $\mathcal{L}'$-公式 $\sigma_n = \exists^{>n} x\phi(x,\bar{b}) \wedge \exists^{>n} x\neg\phi(x,\bar{b})$，令 $T' = T \cup \{\sigma_n | n \in \mathbb{N}^+\}$.
设引理不成立，则对任 $n \in \mathbb{N}^+$，存在 $\mathcal{M}_n \models T$ 和 $\bar{c} \in M_n$，使得 $|\phi(\mathcal{M}_n,\bar{c})| > n$ 且 $|M_n \setminus \phi(\mathcal{M}_n,\bar{c})| > n$，知 $\mathcal{M}_n \models T \cup \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$，故对任 $n \in \mathbb{N}^+$，$T \cup \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ 可满足，显然有 T' 任一有穷子集都可满足，由紧致性定理，存在 $\mathcal{M} \models T'$，从而 $\phi(\mathcal{M},\bar{c})$ 无穷且余无穷，与 T 强极小矛盾。 □

定理 2.2

设 T 为强极小理论，则对任公式 $\phi(\bar{x},\bar{y})$，存在公式 $\psi(\bar{y})$，使得对任 $\mathcal{M}\vDash T$ 和 $\bar{b}\in M$，$\phi(\mathcal{M},\bar{b})$ 无穷 $\Leftrightarrow \mathcal{M}\vDash\psi(\bar{b})$。

证明.

如 $|\bar{x}|=n>1$，则对任 $\mathcal{M}\vDash T$ 和 $\bar{b}\in M$，存在 $i\in\{1,...,n\}$ s.t.

$$\begin{aligned}
&\phi(\mathcal{M},\bar{b})\ \text{无穷}\\
\Leftrightarrow\quad&\{\bar{a}|\mathcal{M}\vDash\phi(\bar{a},\bar{b})\}\ \text{无穷}\\
\Leftrightarrow\quad&\{a_i|\mathcal{M}\vDash\exists x_1...\exists x_{i-1}\exists x_{i+1}...\exists x_n\phi(a_i,\bar{b})\}\ \text{无穷}\\
\Leftrightarrow\quad&\exists x_1...\exists x_{i-1}\exists x_{i+1}...\exists x_n\phi(\mathcal{M},\bar{b})\ \text{无穷}.
\end{aligned}$$

故不失一般性，可设 $|\bar{x}|=1$，记为 x，由引理 2.1，存在 $n_\phi\in\mathbb{N}$，$\phi(\mathcal{M},\bar{b})$ 有限 $\Leftrightarrow|\phi(\mathcal{M},\bar{b})|\leq n_\phi\Leftrightarrow\neg\exists^{>n_\phi}x\phi(a,\bar{b})$，故 $\phi(\mathcal{M},\bar{b})$ 无穷 $\Leftrightarrow\exists^{>n_\phi}x\phi(a,\bar{b})$。 □

以后，对这样的 $\psi(\bar{y})$，我们记为 $\exists^\infty\bar{x}\phi(\bar{x},\bar{y})$。

3. 拟形

定义

设 X 是一个集合，映射 $cl: P(X) \to P(X)$ 如满足下列条件，称为 X 上有限闭包运算（finitary closure operation）：

- 扩张性：$A \subseteq cl(A)$；
- 单调性：$A \subseteq B \Rightarrow cl(A) \subseteq cl(B)$；
- 幂等性：$cl(cl(A)) = cl(A)$；
- 有限性：$a \in cl(A) \Rightarrow$ 存在有限集 $A' \subseteq A$ s.t. $a \in cl(A')$。

例

设 V 是一个线性空间，$cl(A) = \{\beta|\beta$ 可由 A 中向量线性表出 $\}$，则 cl 是 V 上有限闭包运算。

定义

设 $\mathcal{M}$ 是一结构

- 对任 $S \subseteq M$，对任 $a \in M$，如果存在有限集 $D \subseteq M$ s.t. $a \in D$ 且 D 是 S-可定义的，则称 a 是 S 上代数（algebraic over S）;
- $\mathcal{M}$ 上代数闭包运算（algebraic closure operation）$acl : P(M) \to P(M)$ 定义为：$acl(S) = \{a \in M | a$ 是 S 上代数 $\}$。

命题 3.1

对任结构 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}$ 上代数闭包运算 acl 是一个闭包运算。

证明.

扩张性，单调性显然;
有限性：对任 $S \subseteq M$，对任 $a \in acl(S)$，知存在公式 $\phi(x, \bar{y})$，存在 $\bar{b} \in S$ s.t. $a \in \phi(\mathcal{M}, \bar{b})$，知 $a \in acl(\bar{b})$ 且 $\{\bar{b}\}$ 有限，由 S, a 任意性，acl 有有限性。 □

证明.3.1. 续.

幂等性：由扩张性，只需证 $acl(acl(S)) \subseteq acl(S)$：
对任 $a \in acl(acl(S))$，知存在公式 $\phi(x, \bar{y})$，$\bar{b} \in acl(S)$，$\phi(a, \bar{b})$ 且 $\phi(\mathcal{M}, \bar{b})$ 有限，设 $|\phi(\mathcal{M}, \bar{b})| = k$；对每个 $b_i \in \bar{b}$ 知存在公式 $\psi_i(y_i, \bar{z}_i)$，$\bar{c}_i \in S$，$\mathcal{M} \vDash \psi_i(b_i, \bar{c}_i)$ 且 $\psi_i(\mathcal{M}, \bar{c}_i)$ 有限，构造公式 $\chi(x, \bar{z}_1, ..., \bar{z}_{|\bar{b}|})$ 为：
$\exists \bar{y}(\phi(x, \bar{y}) \wedge \neg \exists^{>k} x \phi(x, \bar{y}) \wedge \bigwedge \{\psi_i(y_i, \bar{z}_i) | i = 1, ..., |b|\})$，则 $\mathcal{M} \vDash \chi(a, \bar{c}_1, ..., \bar{c}_{|\bar{b}|})$ 且 $\chi(\mathcal{M}, \bar{c}_1, ..., \bar{c}_{|\bar{b}|})$ 有限，知 $a \in acl(S)$。 □

3. 拟形

定义

设 X 是一集合，cl 是 X 上有限闭包运算，如对任 $S \subseteq X$，对任 $a, b \notin cl(S)$，$a \in cl(S \cup \{b\}) \Leftrightarrow b \in cl(S \cup \{a\})$，则称 (X, cl) 是一个拟形（pregeometry）。

例

设 V 是一个线性空间，$cl(A) = \{\beta | \beta$ 可由 A 中向量线性表出 $\}$，则 (V, cl) 是一个拟形。

命题 3.2

设 $\mathcal{M}$ 是一个强极小结构，则 (M, acl) 是一个拟形。

证明.

对任 $S \subseteq X$，对任 $a, b \notin cl(S)$，设 $a \in cl(S \cup \{b\})$，知存在 $\mathcal{L} \cup S$-公式 $\phi(x, y)$，$a \in \phi(\mathcal{M}, b) \subseteq acl(S \cup \{b\})$，且 $\phi(\mathcal{M}, b)$ 有限，设 $|\phi(\mathcal{M}, b)| = n$，令 $\psi(x, y)$ 为：$\phi(x, y) \wedge \exists^{=n} x\phi(x, y)$，知 $\mathcal{M} \vDash \psi(a, b)$. 如 $\psi(a, \mathcal{M})$ 无限，由定理 2.2，存在 $\mathcal{L} \cup S$-公式 $\chi(x)$ 为：$\exists^{\infty} y\psi(x, y)$，知 $\mathcal{M} \vDash \chi(a)$。

- 如 $\chi(\mathcal{M})$ 有限，则 $a \in cal(S)$，矛盾；
- 如 $\chi(\mathcal{M})$ 无限，知存在两两不同的 $a_1, ..., a_{n+1} \in M$，对每个 $i = 1, ..., n+1$，$\mathcal{M} \vDash \chi(a_i)$，从而 $\psi(a_i, \mathcal{M})$ 无穷，由 $\mathcal{M}$ 强极小，知 $\psi(a_i, \mathcal{M})$ 余有穷，故 $\bigcap_{i=1}^{n+1} \psi(a_i, \mathcal{M})$ 必非空，任取 $b' \in \bigcap_{i=1}^{n+1} \psi(a_i, \mathcal{M})$，知 $|\phi(\mathcal{M}, b')| \geq n+1$，但 $|\phi(\mathcal{M}, b')| = n$，矛盾。

故 $\psi(a, \mathcal{M})$ 有限，从而 $b \in acl(S \cup \{a\})$。 □

3. 拟形

定义

设 (X, cl) 是一个拟形，$S \subseteq X$，

- 如 $\forall a \in S$，$a \notin cl(S \setminus \{a\})$，则称 S 是独立的；
- 如 $cl(S) = X$，则称 S 是全盖的；
- 如 S 是独立的，且是全盖的，则称 S 是一个基。

例

设 V 是一个线性空间，$cl(A) = \{\beta | \beta$ 可由 A 中向量线性表出 $\}$，如 $B \subseteq V$ 是线性空间的一个基，则 B 也是拟形 (V, cl) 的一个基。

定理 3.3

设 (X, cl) 是一个拟形，则

1. (X, cl) 至少有一个基；
2. 如 B, B' 均为 (X, cl) 的基，$|B| = |B'|$；
3. 对两两不同的 $a_1, ..., a_n \in X$，
   $\{a_1, ..., a_n\}$ 独立 $\Leftrightarrow \forall i < n$，$a_{i+1} \notin cl(\{a_1, ..., a_i\})$。

证明.

1. $cl(X) = X$，知 (X, cl) 有全盖集，任取 (X, cl) 极小全盖集 S，如 S 不独立，知存在 $a \in S$，$a \in cl(S \setminus \{a\})$，从而 $S \subseteq cl(S \setminus \{a\})$，则 $cl(S) \subseteq cl(cl(S \setminus \{a\})) = cl(S \setminus \{a\})$，知 $S \setminus \{a\}$ 也全盖，矛盾，故 S 独立，知 S 是基。

- 如 B 有限，设 $|B|=n$，如 $|B'|>n$，归纳证明：存在 $A'\subseteq B'$ s.t. $|A'|=n$，A 是一个基：

  BS: B 是一个基；

  IH: 任取 $\{a_1,...,a_k\}\subseteq B'$，存在 $\{b_1,...,b_k\}\subseteq B$，
  $\{a_1,...,a_k\}\cup(B\setminus\{b_1,...,b_k\})$ 是一个基；

  IS: 任取 $\{a_1,...,a_{k+1}\}\subseteq B'$，由 IH，存在 $\{b_1,...,b_k\}\subseteq B$，
  $\{a_1,...,a_k\}\cup(B\setminus\{b_1,...,b_k\})$ 是一个基。
  如 $a_{k+1}\in B\setminus\{b_1,...,b_k\}$，取 $b_{k+1}=a_{k+1}$ 即可；如
  $a_{k+1}\notin B\setminus\{b_1,...,b_k\}$，取 $C\subseteq\{\bar{a}\}\cup(B\setminus\{\bar{b}\})$ s.t. $a_{k+1}\in cl(C)$ 且
  C 极小，因 B' 独立，知 $a_{k+1}\notin cl(\{\bar{a}\})$，故必有 $(B\setminus\{\bar{b}\})\cap C\neq\emptyset$。
  任取 $b_{k+1}\in(B\setminus\{\bar{b}\})\cap C$ 知 $a_{k+1}\in cl(C)=cl(C\setminus\{b_{k+1}\}\cup\{b_{k+1}\})$，
  但 a_{k+1} $b_{k+1}\notin cl(C\setminus\{b_{k+1}\})$，由拟形定义，
  $b_{k+1}\in cl(C\setminus\{b_{k+1}\}\cup\{a_{k+1}\})\subseteq\{\bar{a},a_{k+1}\}\cup(B\setminus\{\bar{b},b_{k+1}\})$。
  显然 $\{\bar{a},a_{k+1}\}\cup(B\setminus\{\bar{b},b_{k+1}\})$ 全盖，易证也是独立的，知是个基。

  取 $A'=\{a_1,...,a_n\}\subset B'$，知 A‘ 是一个基，则 B' 不独立，矛盾，故 $|B'|\leq|B|$，同理 $|B|\leq|B'|$，知 $|B|=|B'|$。

- 如 B 无穷，知 $B'\subseteq cl(B)=\bigcup\{cl(A)|A\subseteq B$ 且有限 $\}$，而对每个这样的 A，类似上面证法，$|B'\cap A|\leq|A|$，知
  $|B'|\leq\Sigma_{A\subseteq^{fin}B}|B'\cap cl(A)|=|A\subseteq^{fin}B|=\Sigma_{n<\omega}|B|^n=|B|$，同理，
  $|B|\leq|B'|$，知 $|B|=|B'|$。

3. 拟形

定理 3.3

设 (X, cl) 是一个拟形，则

1. (X, cl) 至少有一个基；
2. 如 B, B' 均为 (X, cl) 的基，$|B| = |B'|$；
3. 对两两不同的 $a_1, ..., a_n \in X$，$\{a_1, ..., a_n\}$ 独立 $\Leftrightarrow \forall i < n$，$a_{i+1} \notin cl(\{a_1, ..., a_i\})$。

证明.(3).

$\Rightarrow$: 显然；

$\Leftarrow$: 设 $\{a_1, ..., a_n\}$ 不独立，知存在 $a_i \in cl(\{\bar{a} \setminus \{a_i\})$，取 $\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\} \subseteq \{\bar{a}\}$ s.t. $a_i \in cl(\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\})$ 且 $\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\}$ 极小，如 $i_k < i$，矛盾，如 $i_k > i$，由 $\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\}$ 极小知独立，故 $a_i, a_{i_k} \notin cl(\{a_{i_1}, ..., a_{i_{k-1}}\})$，由拟形定义，$a_{i_k} \in cl(\{a_{i_1}, ..., a_{i_{k-1}}, a_i\})$，矛盾。 □

3. 拟形

定义

设 (X, cl) 是拟形，$A, S \subseteq X$，定义 $cl_S : P(A) \to P(A)$ 为：
$cl_S(A') = cl(A' \cup S) \cap A$，则称 (A, cl_S) 为 S 在 A 上生成的拟形。

事实

设 (X, cl) 是拟形，$A, S \subseteq X$，S 在 A 上生成的拟形 (A, cl_S) 是一个拟形。

定义

设 $\mathcal{M}$ 是一结构，$A \subseteq M$

- $\mathcal{M}$ 的一个 A 上 n-型（n-type）$p(x_1, ..., x_n)$ 是 $\{\phi(x_1, ...x_n) | \phi$ 是 $\mathcal{L} \cup A$-公式 $\}$ 的一个子集 s.t. $p(\bar{x}) \cup Th(M)$ 可满足；
- 对 A 上 n-型 $p(\bar{x})$，如果对任 $\mathcal{L} \cup A$-公式 $\phi(\bar{x})$，或者 $\phi \in p(\bar{x})$ 或者 $\neg\phi \in p(\bar{x})$，则称 $\phi(\bar{x})$ 是完全的；
- $S_n^{\mathcal{M}}(A) := \{p(x_1, ..., x_n) | p(\bar{x})$ 是完全的 A 上 n-型 $\}$；
- $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) := \{\phi(\bar{x}) | \phi$ 是 $\mathcal{L} \cup A$-公式，$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}$；
- 如果 $p(\bar{x}) \subseteq tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A)$，称 $\bar{a}$ 实现 $p(\bar{x})$，记为 $\mathcal{M} \models p(\bar{a})$。

显然

- $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) \in S_{|\bar{a}|}^{\mathcal{M}}$；
- 对任 $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$，$Th_A(\mathcal{M}) \subseteq p(\bar{a})$。

4. 强极小理论的饱和模型

定义

对任结构 $\mathcal{M}$，无穷基数 κ，如果对任 $A \subseteq M$ s.t.$|A| < \kappa$，对任 A 上完全型 $p(\overline{x})$，$p(\overline{x})$ 在 $\mathcal{M}$ 中可实现，则称 $\mathcal{M}$ 是 κ-饱和的（κ-satutated）

定义

$Aut(\mathcal{M}/A) := \{\sigma : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}|$ 对任 $a \in A, \sigma(a) = a\}$。

定义

对结构 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$，如存在嵌入 $f: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ s.t. 对任 $\overline{a} \in M$，$tp^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = tp^{\mathcal{N}}(f(\overline{a}))$，则称 f 是一个初等嵌入，记为 $f: \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$。

事实 4.1

对任结构 $\mathcal{M}$，对任无穷基数 κ，存在 κ-饱和结构 $\mathcal{N}$，$\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$。

定义

对结构 $\mathcal{M},\mathcal{N}$，定义从 $A \subseteq \mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的部分初等映射 f 为:

- f 是单射;
- 对任 $\bar{a} \in dom(f)$，$tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = tp^{\mathcal{N}}(f(\bar{a}))$。

事实

上面定义中，如果取 $A = M$，则 f 是初等嵌入;
f^{-1} 也是部分初等映射。

引理 4.2

对任 κ-饱和结构 $\mathcal{M}$，任 $A \subseteq M$ s.t. $|A| < \kappa$ 和部分初等映射 $f : A \to \mathcal{M}$，对任 $b \in M \setminus A$，存在部分初等映射 $g : A \cup \{b\} \to \mathcal{M}$ s.t. $f \subset g$。

证明.

令 $\Gamma = \{\phi(x, f(\bar{a})|\bar{a} \in A, \mathcal{M} \vDash \phi(b, \bar{a}))\}$，知对任 $\phi(x, f(\bar{a})) \in \Gamma$，$\mathcal{M} \vDash \exists x\phi(x, \bar{a})$，知 $\mathcal{M} \vDash \exists x\phi(x, f(\bar{a}))$ 从而 $\phi(x, f(\bar{a}))$ 可满足，显然 Γ 有限可满足，由紧致性定理，Γ 可满足，知 $\Gamma \in S_1^{\mathcal{M}}(f[A])$，由 $\mathcal{M}\kappa$-饱和，存在 $b' \in M$，$\mathcal{M} \vDash \Gamma(b')$，令 $g = f \cup \{(b, b')\}$，知 g 是部分初等映射。 $\square$

4. 强极小理论的饱和模型

引理 4.3

对任 κ-饱和结构 $\mathcal{M}$，任 $A \subseteq M$ s.t. $|A| < \kappa$ 和部分初等映射 $f : A \to \mathcal{M}$，存在一个 $\mathcal{M}$ 自同构 σ s.t. $f \subseteq \sigma$。

证明思路.

将 M 良序化，设 $M = \{a_\alpha | \alpha < \kappa\}$，使用超穷归纳法：

- BS: f 是部分初等映射，记为 f_0；
- IH: 对任 $\beta < \alpha$，存在部分初等映射 $f_\beta : A \cup \{a_\gamma | \gamma \leq \beta\} \to M$ s.t. $\{a_\gamma | \gamma \leq \beta\} \subseteq ran(f_\beta)$；
- IS: 如 α 是后继序数，知存在部分初等映射 $f_{\alpha^-} : A \cup \{a_\gamma | \gamma \leq \alpha^-\} \to M$ s.t. $\{a_\gamma | \gamma \leq \alpha^-\} \subseteq ran(f_{\alpha^-})$；由 4.2，可构造部分初等映射 g 使 $f \subseteq g$ 且 $\alpha \in dom(g)$，知 g^{-1} 也是部分初等映射，可构造部分初等映射 g' 使 $g^{-1} \subseteq g'$ 且 $\alpha \in dom(g')$，取 $f_\alpha = g'^{-1}$ 即可；
  如 α 是极限序数，取 $f_\alpha = \bigcup\{f_\beta | \beta < \alpha\}$。

取 $\sigma = \bigcup\{f_\beta | \beta < \kappa\}$，知 $\sigma : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}$。 □

4. 强极小理论的饱和模型

推论

对任 κ-饱和结构 $\mathcal{M}$，任 $A \subseteq M$ s.t. $|A| < \kappa$，对任 $\bar{a}, \bar{b} \in M$ s.t. $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = tp^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$，存在一个 $\mathcal{M}$ 自同构 $\sigma \in Aut(M/A)$ s.t. $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$。

证明.

知含入映射 $f: A \to \mathcal{M}$ 是部分初等映射，$f \cup \{(a_i, b_i) | a_i \in \bar{a}, b_i \in \bar{b}\}$ 也是部分初等映射，由引理得证。 □

命题 4.4

设 $\mathcal{M}$ 为强极小结构，$A \subseteq M$ s.t. $|A| < \kappa$，对任 $a, b \in M \setminus acl(A)$，$tp^{\mathcal{M}}(a/A) = tp^{\mathcal{M}}(b/A)$。

证明.

设 $tp^{\mathcal{M}}(a/A) \neq tp^{\mathcal{M}}(b/A)$，知存在公式 $\phi(x, \bar{y})$，$\bar{c} \in A$，$a \in \phi(\mathcal{M}, \bar{c})$，$b \in \neg\phi(\mathcal{M}, \bar{c})$，由 $\mathcal{M}$ 强极小，$\phi(\mathcal{M}, \bar{c})$ 有限或 $\neg\phi(\mathcal{M}, \bar{c})$ 有限，知 $a \in acl(A)$ 或 $b \in acl(A)$，矛盾。 □

定理 4.5

设对某一无穷基数 κ，$\mathcal{M}$ 是不可数的强极小 κ-饱和模型，$A \subseteq M$ 且 $|A| < \kappa$，则对任 $n \in \mathrm{N}^+$，存在一个 A 上 n-完全型 $p_n(\overline{x})$ s.t. $\forall \overline{a} \in M, \mathcal{M} \vDash p_n(\overline{a}) \Leftrightarrow$ 对拟形 $(\mathcal{M}, acl_A), \overline{a}$ 独立。

证明.

$\Rightarrow$: 由 $\mathcal{M}$ 不可数，$|M \setminus acl(A)| = |M \setminus acl(\emptyset)| = |M| \neq \emptyset$，对任 $n \in \mathrm{N}^+$，都可取 $b_1 \notin acl_A(\emptyset) = acl(A), \ldots, b_n \notin acl_A(b_1, \ldots, b_{n-1})$，知 $\overline{b}$ 独立，令 $p_n(\overline{x}) = tp^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A)$，对任 $\overline{a} \in M$，如 $\mathcal{M} \vDash p_n(\overline{a})$，知 $tp^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A) = tp^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A)$，由 4.3 推论，存在一个 $\mathcal{M}$ 自同构 $\sigma \in Aut(M/A)$ s.t. $\sigma(\overline{a}) = \overline{b}$，易得 $\overline{a}$ 独立。

$\Leftarrow$: BS: $n = 1$ 时，$\forall a \in M$，如 $\{a\}$ 独立，知 $a \notin acl_A(\emptyset) = acl(A)$，由命题 4.4，$tp^{\mathcal{M}}(a/A) = tp^{\mathcal{M}}(b/A)$，知 $\mathcal{M} \vDash p_1(a)$，且存在一个 $\mathcal{M}$ 自同构 $\sigma \in Aut(M/A)$ s.t. $\sigma(a) = b$;

IH: 设 $n = k$ 时，$\forall \overline{a} \in M$，如 $\{a\}$ 独立，$\mathcal{M} \vDash p_n(a)$，且存在一个 $\mathcal{M}$ 自同构 $\sigma \in Aut(M/A)$ s.t. $\sigma(\overline{a}) = \overline{b}$;

4. 强极小理论的饱和模型

定理 4.5

设对某一无穷基数 κ，$\mathcal{M}$ 是不可数的强极小 κ-饱和模型，$A \subseteq M$ 且 $|A| < \kappa$，则对任 $n \in \mathrm{N}^+$，存在一个 A 上 n-完全型 $p_n(\bar{x})$ s.t. $\forall \bar{a} \in M, \mathcal{M} \vDash p_n(\bar{a}) \Leftrightarrow$ 对拟形 $(\mathcal{M}, acl_A), \bar{a}$ 独立。

证明.

IS: $n = k + 1$ 时，由 IH，知存在 $\sigma \in Aut(M/A)$ s.t. $\forall i \leq k, \sigma(a_i) = b_i$，由 $\bar{a}$ 独立，知 $\{b_1, ..., b_k, \sigma(a_n)\}$ 也独立，知 $\sigma(a_n) \notin acl(A \cup \{b_1, ..., b_k\})$，又 $b_n \notin acl(A \cup \{b_1, ..., b_k\})$，知 $\sigma(a_n), b_n$ 均在拟形 $(M, acl_{A \cup \{b_1, ..., b_k\}})$ 中独立，由命题 4.4，$tp^{\mathcal{M}}(\sigma(a_n)/A \cup \{b_1, ..., b_k\}) = tp^{\mathcal{M}}(b_n/A \cup \{b_1, ..., b_k\})$，知存在 $\sigma` \in Aut(M/A \cup \{b_1, ..., b_k\}) \subseteq Aut(M/A\})$ s.t. $\sigma'(\sigma(a_n)) = b_n$，知 $\sigma' \circ \sigma(\bar{a}) = \bar{b}$，且 $\sigma' \circ \sigma \in Aut(M/A\})$，知 $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = tp^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$，从而 $\mathcal{M} \vDash p_n(\bar{a})$。

□

5. 强极小理论的“Morley 定理”

事实 5.1

- 设理论 T 是可数语言上的完全理论，则对 T 的任两个模型 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$，都存在 $\mathcal{M}' \vDash T$，$\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ 且 $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}'$；
- 对任结构 $\mathcal{M}$，对任无穷基数 κ，存在 κ-饱和结构 $\mathcal{N}$，$\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$。

定理 5.2

设理论 T 完全且强极小，则对任 $\kappa > \aleph_0, T$ 是 κ-范畴的。

证明.

任取 $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ s.t. $|M| = |N| = \kappa$，由 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 强极小，知 $(\mathcal{M}, acl), (\mathcal{N}, acl)$ 是拟形，设 B, B' 分别是 $(\mathcal{M}, acl), (\mathcal{N}, acl)$ 的基，由 acl 定义，知 $|B| = |M| = \kappa = |N| = |B'|$，任取双射 $\sigma : B \to B'$，知对任 $\bar{b} \in B$，$\bar{b}, \sigma(\bar{b})$ 均独立。由 5.1，存在 κ-饱和结构 $\mathcal{M}'$，$\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ 且 $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}'$，易证 $\bar{b}, \sigma(\bar{b})$ 也均对 $(\mathcal{M}', acl)$ 独立。

证明. 续.

由定理 4.5，知对任公式 $\phi(\bar{x})$，$\mathcal{M} \vDash \phi(\bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M}' \vDash \phi(\bar{b}) \Leftrightarrow \phi(\bar{x}) \in p_{|\bar{b}|}(\bar{x}) \Leftrightarrow \mathcal{M}' \vDash \phi(\sigma(\bar{b})) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi(\sigma(\bar{b}))$，知 σ 是 $\mathcal{M}'$ 上部分初等映射，由引理 4.3，存在一个 $\mathcal{M}$ 自同构 σ' s.t. $\sigma \subseteq \sigma'$。
易证 $acl(B) = M, acl(B') = N$ 且 $\sigma'[acl(B)] = acl(B')$，知 $\sigma'[M] = N$，故 $\sigma'|_M : \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$。 $\square$

不可数范畴的理论并不一定是强极小理论，但强极小理论的“Morley 定理”的证明过程，提示了一般的 Morley 定理的证明思路。