《哲学研究》2000 年 9 期

邻域语义学与推演系统的完全性

刘 壮 虎

推演系统并不一定是逻辑系统，在讨论一个推演系统是不是逻辑系统时，完全性是一个重要的标准。然而，完全性是相对于语义解释的，如果允许任意的语义解释，则完全性标准可能是无用的。设想这样的情况，有一种语义解释，使得所有的推演系统对于它都是完全的。实际上，确实有这样的语义解释。

在本文中，我们构造一种适合于一切命题逻辑的语义学，在这种语义学中讨论推演系统的完全性。并利用这种完全性简单地讨论怎样的推演系统是逻辑系统。

一、从模态逻辑谈起

模态逻辑的的关系框架是二元组 K = <W, R>，用 Form 表示全体公式的集合，用 P(W)表示 W 的幂集，K 上的赋值是 Form 到 P(W)的映射 V，$\Box\alpha$赋值的条件是：

$$u\in V(\Box\alpha) \text{ 当且仅当 } (\text{任给 } v\in W)(\text{如果 } uRv\text{，则 } v\in V(\alpha))\text{。}$$

我们将这个条件作一些形式的变换。

任给 $u\in W$，令 $R(u) = \{v\in W \mid uRv\}$，则$\Box\alpha$赋值的条件就变成：

$$u\in V(\Box\alpha) \text{ 当且仅当 } R(u) \subseteq V(\alpha)\text{，}$$

再构造 W 到 P(P(W))的映射

$$N_{\Box}: W\to P(P(W)) \quad N_{\Box}(u) = \{S \mid R(u) \subseteq S\}\text{，}$$

则$\Box\alpha$赋值的条件又变成：

$$u\in V(\Box\alpha) \text{ 当且仅当 } V(\alpha)\in N_{\Box}(u)$$

进一步，我们构造

$$N_{\neg}: W\to P(P(W)) \quad N_{\neg}(u) = \{S \mid u\notin S\}$$

和

$$N_{\wedge}: W\to P(P(W)^2) \quad N_{\wedge}(u) = \{<S, Q> \mid u\in S\text{且}u\in Q\}\text{，}$$

则$\neg\alpha$和$\alpha\wedge\beta$赋值的条件分别是：

$$u\in V(\neg\alpha) \text{ 当且仅当 } V(\alpha)\in N_{\neg}(u)$$

和

$$u\in V(\alpha\wedge\beta) \text{ 当且仅当 } <V(\alpha), V(\beta)>\in N_{\wedge}(u)$$

这样，在模态逻辑中算子(我们将联结词也称为算子)¬、∧和□的解释都有相同的形式，

都是通过W到$P(P(W)^n)$的映射来定义的。W到$P(P(W)^n)$的映射称为邻域映射，用邻域映射去解释算子的语义学称为邻域语义学。

每个关系都可以转化为邻域映射，但并非所有的邻域映射都是由关系转化而来，所以模态逻辑的邻域语义学是比关系语义学更为广泛的一种语义学。

邻域语义学的意义在于它不仅能用于模态逻辑，而且能用于极大多数的命题逻辑。用以上类似的方法可以将广义模态逻辑、时态逻辑、相干逻辑、直觉主义逻辑(及其极小逻辑、初基演算等)、部分条件句逻辑(命题型的条件句逻辑)等逻辑系统的语义转化为邻域语义。

二、形式语言

我们抽象地考虑命题逻辑的形式语言，它适合一切命题逻辑。

2.1 定义 形式语言 一个(命题)形式语言由初始符号和形成规则组成：

初始符号 (1) 命题变项；(2) 命题常项集 C；(3) 命题算子集 F。

命题变项有可数个，用 p, q, r 等表示。

C 的元素用 a, b, c 等表示，C 可以是空集。

F 的元素用 f, g, h 等表示，对每个 $f \in F$，有一个元数 $n \geq 1$，f 称为 n 元算子，F 中至少有一个元数≥2 的算子。

形成规则 (1) 命题变项和命题常项是公式；(2) 如果f是n元命题算子，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是n个公式，则$f\alpha_1 \cdots \alpha_n$是公式；(3) 只有以上的是公式。

不同的形式语言的区别在于命题常项集 C 和命题算子集 F。所以可以将形式语言记为 P = <C, F>。P 的全体公式记为 Form(P)。

2.2 定义 代入 $\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n$是公式，$p_1, \cdots, p_n$ 是命题变项。$\alpha(\beta_1/p_1, \cdots, \beta_n/p_n)$(在$\alpha$中将$\beta_i$代入$p_i$)归纳定义如下：

(1) α是命题变项，$\alpha(\beta_1/p_1, \cdots, \beta_n/p_n) = \begin{cases} \beta_i & \text{如果 } \alpha = p_i \\ \alpha & \text{如果 } \alpha \neq p_i \end{cases}$；

(2) α是命题常项，$\alpha(\beta_1/p_1, \cdots, \beta_n/p_n) = \alpha$；

(3) $\alpha = f\alpha_1 \cdots \alpha_m$，$\alpha(\beta_1/p_1, \cdots, \beta_n/p_n) = f\alpha_1(\beta_1/p_1, \cdots, \beta_n/p_n) \cdots \alpha_m(\beta_1/p_1, \cdots, \beta_n/p_n)$。

2.3 定义 置换 α, β, γ是公式。$\alpha[\gamma/\beta]$(在α中将γ置换β)归纳定义如下：

(1) β不是α的子公式，则$\alpha[\gamma/\beta] = \alpha$；

(2) $\beta = \alpha$，则$\alpha[\gamma/\beta] = \gamma$

(3) $\alpha = f\alpha_1 \cdots \alpha_n$，$\beta$是$\alpha_i$的子公式，则$\alpha[\gamma/\beta] = f\alpha_1 \cdots \alpha_i[\gamma/\beta] \cdots \alpha_n$。

三、框架和模型

3.1 定义 邻域 W是一个非空的集合，W到 $P(P(W)^n)$的映射N称为W的n元邻域映射。任给$x \in W$，$N(x)$称为x的n元邻域类，$N(x)$中的元素称为x的n元邻域。

N是W的n元邻域映射，由N可以构造从$P(W)^n$到P(W)的映射

N^*：$P(W)^n \to P(W)$ $\quad N^*(<S_1,\cdots, S_n>) = \{x \mid <S_1,\cdots, S_n> \in N(x)\}$

3.3 定义 框架 P是形式语言，P的一个框架是三元组$K = <W, \{C_a \mid a\in C\}, \{N_f \mid f\in F\}>$，其中：

(1) W 是一个非空的集合，记 $W = \|K\|$；

(2) 任给$a\in C$，都有$C_a \subseteq W$；

(3) 任给$f\in F$，如果f是n元算子，则N_f是W的n元邻域映射。

3.4 定义 赋值和模型 $P = <C, F>$是形式语言，K 是 P 的框架，$W = \|K\|$，K 上的一个赋值是 Form(P)到 P(W)映射 V，并且满足：

(1) 任给$a\in C$，都有$V(a) = C_a$；

(2) 任给$f\in F$，任给公式$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，任给$x\in W$，都有

$x\in V(f\alpha_1\cdots\alpha_n)$当且仅当$<V(\alpha_1),\cdots,V(\alpha_n)>\in N_f(x)$，也就是$V(f\alpha_1\cdots\alpha_n) = N_f^*(<V(\alpha_1),\cdots, V(\alpha_n)>)$。

$M = <K, V>$称为 P 的模型。记$\|M\| = \|K\|$。

3.5 定理 组合原理

(1) 如果$V(\alpha_1) = V'(\alpha_1),\cdots,V(\alpha_n) = V'(\alpha_n)$，则$V(f\alpha_1\cdots\alpha_n) = V'(f\alpha_1\cdots\alpha_n)$。

(2) 如果$V(\alpha_1) = V(\beta_1),\cdots,V(\alpha_n) =V(\beta_n)$，则$V(f\alpha_1\cdots\alpha_n) =V(f\beta_1\cdots\beta_n)$。■

由组合原理(1)可得：如果任给命题变项 p，都有 $V(p) = V'(p)$，则任给公式α，都有 $V(\alpha) = V'(\alpha)$。这就是说，赋值 V 由 V 在命题变项上的值所确定。

由组合原理(2)可得：如果 $V(\beta) = V(\gamma)$，则任给公式α，都有 $V(\alpha) = V(\alpha[\gamma/\beta])$。

3.6 定义 满足和模型有效 $M = <K, V>$是模型，$W = \|M\|$。

(1) 如果$x\in V(\alpha)$，则称模型M在可能世界x满足公式α，记为$M \models_x \alpha$。

(2) 如果任给$x\in W$，都有$M \models_x \alpha$，则称M是α的模型，记为$M \models \alpha$。

(3) 任给$\alpha\in A$，都有 $M \models \alpha$，则称 M 是 A 的模型，记为 $M \models A$。

3.7 定义 框架有效 K 是框架，Γ是框架类。

(1) 如果任给 K 上赋值 V，都有$<K, V> \models \alpha$，则称 K 是α的框架，记为 $K \models \alpha$。

(2) 如果任给$\alpha\in A$，都有 $K \models \alpha$，则称 K 是 A 的框架，记为 $K \models A$。

(3) 如果任给 $K\in\Gamma$ ，都有 $K \models \alpha$，则称Γ是α的框架类，记为$\Gamma \models \alpha$。

(4) 如果任给$\alpha\in A$，任给 $K\in\Gamma$，都有 $K \models \alpha$，则称Γ是 A 的框架类，记为$\Gamma \models A$。

四、完全性和典范模型

X 是集合，记 $F(X) = \{Y \mid Y\subseteq X$ 且 Y 是有限的$\}$，即 $F(X)$是 X 的全体有限子集的集合。

4.1 定义 推演系统 一个推演系统是三元组 $D = <P, A, R>$，其中 P 是形式语言，$A \subseteq Form(P)$，$R \subseteq F(Form(P))\times Form(P)$。

A 称为公理集，A 中的元素称为公理。R 称为推演规则集，R 中的元素称为推演规则。

4.2 定义 证明 D是推演系统。D的一个证明是一个有限的公式序列$\alpha_1,\cdots, \alpha_n$，其中每个

α_i满足以下条件之一：

(1) $\alpha_i \in$A；

(2) 存在公式集A，使得$A \subseteq \{\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}\}$且$<A, \alpha_i> \in$R。

4.3 定义 内定理 D推演系统。如果存在D的证明$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，使得$\alpha_n = \alpha$，则称α是D的内定理，记为 $\vdash\alpha$。D的全体内定理的集合记为T(D)。

4.4 定义 完全性 D 是推演系统。

(1) 如果存在模型 M，使得 $\vdash\alpha$当且仅当 M$\models\alpha$，则称 D 是模型完全的。

(2) 如果存在框架类Γ，使得 $\vdash\alpha$当且仅当$\Gamma\models\alpha$，则称 D 是框架完全的。

因为任何框架类都等价于一个框架，所以，如果 D 是框架完全的，则存在框架 K，使得 $\vdash\alpha$ 当且仅当 K$\models\alpha$。

证明模型完全性最主要的工具是典范模型。

给定 W $\subseteq$ P(Form(P))，任给公式α，记$|\alpha| = \{u \mid u\in$W 且$\alpha\in u\}$。

4.5 定义 典范模型 D是推演系统，K = <W, C_a, N_f>是框架。模型
M = <K, V>称为 D 的典范模型，如果 M 满足以下条件：

(1) W $\subseteq$ P(Form(P))；

(2) 任给 $u\in$W，都有 T(D) $\subseteq u$；

(3) 如果 $\nvdash\alpha$，则存在 $u\in$W，使得$\alpha\notin u$；

(4) 任给a$\in$C，都有C_a = |a|；

(5) 任给$f\in$F，都有$<|\alpha_1|,\cdots,|\alpha_n|> \in N_f(u)$当且仅当$f\alpha_1\cdots\alpha_n \in u$；

(6) 任给命题变项 p，都有 V(p) = $|p|$。

4.6 定理 典范模型的性质 如果 M = <K, V>是 D 的典范模型，W = ||K||，则

(1) 任给公式α，都有 V(α) = $|\alpha|$(也就是 $u\in$V(α)当且仅当$\alpha\in u$)。

(2) $\vdash\alpha$当且仅当$|\alpha|$ = W。■

4.7 定理 如果 D 有典范模型 M，则 D 是模型完全的。■

定理 4.6 和定理 4.7 的证明可参考[1]。

M = <K, V>是 D 的典范模型，则称 K 是 D 的典范框架。和典范模型不一样，D 的典范框架并不一定是 T(D)的的框架。但如果 D 有典范框架 K 是 T(D)的框架，则 D 是框架完全的。

用典范框架证明 D 的框架完全性的关键在于证明典范框架 K 是 T(D)的框架。具体的说就是：证明每个公理被 K 所满足，每个推演规则保持可满足性不变。

五、一般框架

5.1 定义 合适 P是形式语言，K = <W, C_a, N_f,>是P的框架，$\pi \subseteq$ P(W)称为K上一个合适的子集族，如果π满足以下条件：

(1) 任给a$\in$C，都有$C_a \in \pi$；

(2) 任给$f\in$F，都有如果$S_1,\cdots,S_n \in \pi$，则$N_f{*}(<S_1,\cdots,S_n>) \in \pi$。

5.2 定义 一般框架 P是形式语言，P的一个一般框架是四元组GK = <W, C_a , N_f, π>，其

中$K = \langle W, C_a, N_f \rangle$是P的框架，$\pi$是K上一个合适的子集族。

从一般框架$GK = \langle W, C_a, N_f, \pi \rangle$可以得到框架$K = \langle W, C_a, N_f \rangle$。

5.3 定义 赋值和模型 $GK = \langle W, C_a, N_f, \pi \rangle$是一般框架，V是K上的赋值，如果V满足：任给命题变项p，都有$V(p) \in \pi$，则称V是GK上的一个赋值。称$M = \langle GK, V \rangle$为模型。

GK 上的赋值也是 K 上的赋值，所以模型$\langle GK, V \rangle$和模型$\langle K, V \rangle$是一回事。所以一般框架上的满足、模型有效等概念和框架上的相应概念一样。一般框架有效和框架有效稍有差别。

5.4 定义 一般框架有效 GK 是一般框架，α是公式，A 是公式集。

(1) 如果任给GK上赋值V，都有$\langle GK, V \rangle \models \alpha$，则称GK是$\alpha$的一般框架，记为$GK \models \alpha$。

(2) 如果任给$\alpha \in A$，都有 $K \models \alpha$，则称 GK 是 A 的一般框架，记为 $GK \models A$。

由一般框架有效的定义可知，框架是一般框架的特例(π = P(W))。

5.5 定义 一般框架完全性 D 是推演系统。如果存在一般框架 GK，使得 $\vdash \alpha$当且仅当$GK \models \alpha$，则称 D 是一般框架完全的。

V 是 GK 上的一个赋值，则命题变项在 V 下的值属于π，实际上任何公式在 V 下的值都属于π。

5.6 定理 $GK = \langle W, C_a, N_f, \pi \rangle$是一般框架，V是GK上的赋值，则任给公式$\alpha$，都有$V(\alpha) \in \pi$。■

六、弱框架

6.1 定义 弱框架 P是形式语言，P的一个弱框架是四元组$WK = \langle W, W_0, C_a, N_f \rangle$，其中：$K = \langle W, C_a, N_f \rangle$是P的框架，$W_0$是W的子集。

从弱框架$WK = \langle W, W_0, C_a, N_f \rangle$可以得到框架$K = \langle W, C_a, N_f \rangle$。

6.2 定义 赋值和弱模型 $WK = \langle W, W_0, C_a, N_f \rangle$是弱框架，K上的赋值也称为WK上的赋值。$WM = \langle WK, V \rangle$称为弱模型。

弱框架上的模型在可能世界 x 满足的概念和框架上的相应概念一样，其它概念和框架上的相应概念稍有差别。

6.3 定义 弱模型有效 $WM = \langle WK, V \rangle$是弱模型，$\alpha$是公式，$A$ 是公式集。

(1) 如果任给$x \in W_0$，都有$WM \models_x \alpha$，则称WM是α的模型，记为$WM \models \alpha$。

(2) 如果任给$\alpha \in A$，都有 $WM \models \alpha$，则称 WM 是 A 的模型，记为 $WM \models A$。

6.4 定义 弱框架有效 WK 是弱框架，$W\Gamma$是弱框架类，α是公式，A 是公式集。

(1) 如果任给 WK 上赋值 V，都有$\langle WK, V \rangle \models \alpha$，则称 WK 是$\alpha$的框架，记为 $WK \models \alpha$。

(2) 如果任给$\alpha \in A$，都有 $WK \models \alpha$，则称 WK 是 A 的框架，记为 $WK \models A$。

(3) 如果任给 $WK \in \Gamma$ ，都有 $WK \models \alpha$，则称 $W\Gamma$是α的弱框架类，记为 $W\Gamma \models \alpha$。

(4) 如果任给$\alpha \in A$，任给 $WK \in W\Gamma$，都有 $WK \models \alpha$，则称 $W\Gamma$是 A 的弱框架类，记为$W\Gamma \models A$。

从弱有效性的定义可知，框架是弱框架的特例，弱模型是模型的特例($W_0 = W$)。

6.5 定义 弱完全性 D 是推演系统。

(1) 如果存在弱模型 WM，使得 $\vdash\alpha$当且仅当 WM $\models\alpha$，则称 D 是弱模型完全的。

(2) 如果存在弱框架类 WΓ，使得 $\vdash\alpha$当且仅当 WΓ $\models\alpha$，则称 D 是弱框架完全的。

和框架完全性类似，如果 D 是弱框架完全的，则存在弱框架 WK，使得 D 是弱框架完全的。

证明模型完全性用的是典范模型。证明弱模型完全性用的是和典范模型类似的弱典范模型。

给定 W ⊆ P(Form(P))，对于任何公式α，记$|\alpha| = \{ u \mid u\in W$ 且$\alpha\in u \}$。

6.6 定义　弱典范模型　D是推演系统，WK = <W, W_0, C_a, N_f>是弱框架，弱模型WM = <WK, V>称为D的弱典范模型，如果WM满足以下条件：

(1) W ⊆ P(Form(P))；

(2) 任给$u\in W_0$，都有T(D) ⊆ u；

(3) 如果 $\nvdash\alpha$，则存在$u\in W_0$，使得$\alpha\notin u$；

(4) 任给a∈C，都有$C_a = |a|$；

(5) 任给f∈F，都有$<|\alpha_1|,\cdots, |\alpha_n|>\in N_f(u)$当且仅当$f\alpha_1\cdots\alpha_n\in u$；

(6) 任给命题变项 p，都有 $V(p) = |p|$。

弱典范模型和典范模型的差别在于条件(2)和(3)，(2)的要求减弱了而(3)的要求加强了。

弱典范模型和典范模型有类似的性质。

6.7 定理　弱典范模型的性质　如果 M = <K, V>是 D 的典范模型，
W = ||K||，则

(1) 任给公式α，都有 $V(\alpha) = |\alpha|$(也就是 $u\in V(\alpha)$当且仅当$\alpha\in u$)。

(2) $\vdash\alpha$当且仅当$W_0 \subseteq V(\alpha)$。■

6.8 定理　如果 D 有弱典范模型 M，则 D 是弱模型完全的。■

定理 6.7 和定理 6.8 的证明可参考[1]。

还有更一般的一般弱框架。

6.9 定义　一般弱框架　P = <C, F>是形式语言，P的一个一般弱框架是五元组GWK = <W, W_0, C_a, N_f, π>，其中K = <W, C_a, N_f>是P的框架，W_0是W的子集，π是K上一个合适的子集族。

6.11 定义　赋值和弱模型　GWK = <W, W_0, C_a, N_f, π>是一般弱框架，V是WK上的赋值，如果V满足：任给命题变项p，都有$V(p)\in\pi$，则称V是GWK上的一个赋值。

M = <GWK, V>称为弱模型。

GWK 上的赋值也是 WK 上的赋值，所以弱模型<GWK, V>和弱模型<WK, V>是一回事。所以一般弱框架上的满足、模型有效等概念和弱框架上的相应概念一样。一般弱框架有效和弱框架有效稍有差别。

6.12 定义　一般弱框架有效　GWK 是一般弱框架，α是公式，A 是公式集。

(1) 如果任给 GWK 上赋值 V，都有<GWK, V> $\models\alpha$，则称 GWK 是α的一般弱框架，记为 GWK $\models\alpha$。

(2) 如果任给$\alpha\in A$，都有 K $\models\alpha$，则称 GWK 是 A 的一般弱框架，记为 GWK $\models A$。

从一般弱框架有效性的定义可知，弱框架(π = P(W))，一般框架(W_0 = W)和框架(π = P(W), W_0 = W)都是一般弱框架的特例。

从一般弱框架GWK = <W, W_0, C_a , N_f, π>可以得到弱框架WK = <W, W_0, C_a, N_f>，一般框架GK = <W, C_a , N_f, π>和框架K = <W, C_a, N_f>。

6.13 定义 一般弱框架完全性 D 是推演系统。如果存在一般弱框架 GWK，使得 $\vdash\alpha$当且仅当 GWK $\models\alpha$，则称 D 是一般弱框架完全的。

七、完全性的性质和意义

框架完全性、一般框架完全性和模型完全性依次减弱。

弱完全性要比相应的完全性弱。

六种完全性强弱关系如下：

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{弱模型完全性} & \rightarrow & \text{一般弱框架完全性} & \rightarrow & \text{弱框架完全性} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{模型完全性} & \rightarrow & \text{一般框架完全性} & \rightarrow & \text{框架完全性}
\end{array}
$$

前四种完全性有一般的刻画。

7.1 定义 置换封闭性 D 是推演系统。如果 D 满足：任给$\alpha, \beta, \gamma\in$T(D)，都有$\alpha[\gamma/\beta]\in$T(D)，则称 D 有(内定理)置换封闭性。

7.2 定义 代入封闭性 D是推演系统，如果从$\alpha\in$T(D)能得到$\alpha(\beta_1/p_1,\cdots, \beta_n/p_n)\in$T(D)，则称D有代入封闭性。

7.3 定理 任何推演系统 D 都是是弱模型完全的。■

7.4 定理 D 是推演系统。D 是模型完全的当且仅当 D 有置换封闭性。■

定理 7.3 和定理 7.4 的证明可参考[1]。

7.5 定理 D 是推演系统。D 是一般弱框架完全的当且仅当 D 有代入封闭性。■

7.6 定理 D 是推演系统。D 是一般框架完全的当且仅当 D 有置换封闭性和代入封闭性。■

定理 7.3 和定理 7.4 的证明用类似于模态逻辑中证明一般框架完全性的方法。

下面，我们从更一般的语义学角度来看以上六种完全性的意义。

任何一种语义都是由值域 R(一个非空集合)、赋值(全体公式集到值域的映射)和有效性的定义三部分组成。赋值和有效性定义中有一些基本的原则。

赋值的基本原则有：

(1) 组合原则 赋值 V 由 V 在命题变项上的值所确定。这样，所有的赋值都是全体命题变项到值域的映射的扩充。

(2) 普遍性原则 命题变项可以取值域中的任何值。这样，任何一个全体命题变项到值域的映射都可以扩充为一个赋值。

由(1)和(2)，所有的赋值恰好是全体命题变项到值域的映射的扩充。

(3) 值域是非空集合的幂集。这只是一个要求而不是一个原则。这个要求背后是什么原则，是需要进一步讨论的。

有效性定义的基本原则有：

(1) 值确定原则(弱)　有效性是由值所确定的。就是说，如果两个公式在任何赋值下的值都相同，则它们的有效性是一样的。

(2) 值确定原则(强)　存在 R 的子集 I(特指集)，使得：一个公式是有效的当且仅当它在任何赋值下的值都在 I 中。

(3) 唯一性原则　特指集 I 只有一个元素。

组合原则和强的值确定原则是建立邻域语义学的基础，它对应的是弱模型完全性。普遍性原则区分了模型完全和一般框架完全。赋值的原则(3)区分了一般框架完全和框架完全。唯一性原则区分了强和弱。

弱模型完全性	一般弱框架完全性	弱框架完全性	(2)
模型完全性	一般框架完全性	框架完全性	(3)
(1)	(2)	(3)	

反之，任何满足组合原则和强的值确定原则的语义学都可以转化成邻域语义学，所以邻域语义学是满足组合原则和强的值确定原则的最一般的语义学。而且在那些语义学中满足以上某些原则的完全性都可以转化为邻域语义学中相应的完全性。

八、什么是逻辑系统？

要在邻域语义学内讨论什么是逻辑系统，首先要解决为何逻辑系统必须有组合原则和强的值确定原则。

组合原则是弗雷格创立现代逻辑的重要原则之一，也是现有的大多数逻辑语义学的基本原则。然而，现在也有不少被称为“逻辑”的推演系统的语义学不满足组合原则。也有学者对组合原则提出了批评，但他们的批评是对某些语言现象的某种语义分析来说的，所以他们的批评至多说明了这种特定的语义分析不满足组合原则，并不能说明逻辑系统可以不满足组合原则。

逻辑分析是一种语义分析，但语义分析不一定是逻辑分析。逻辑分析是一种彻底的语义分析。所谓彻底，就是说我们提出的语义概念能够完全说明系统在这种语义下的性质。

如用真值(真和假)去分析古典逻辑系统，就是一种彻底的语义分析，因为用真值可以完全说明系统在真值意义下的全部性质。而用真值去分析模态逻辑系统，就不是一种彻底的语义分析，因为仅用真值一般无法确定必然命题的真假。

既然一般命题逻辑系统中的公式是由命题变项和算子组成，所以公式的语义就应该由命

题变项和算子的语义所确定，这就是组合原则。

弱的值确定原则是类似的。在彻底的语义分析中，有效性也应该由语义完全确定，所以两个语义完全相同的公式，它们的有效性当然是一样的。

以上讨论说明了，如果一种语义学不满足组合原则和弱的值确定原则，就不是一种彻底的分析，因而不能充当一种逻辑意义上的语义学。

我不能为强的值确定原则作辩护，幸运的是命题逻辑中还没有发现不符合强的值确定原则的语义学。

作为逻辑系统，仅有组合原则和弱的值确定原则还是不够的，普遍性原则也是必须的。这就是说仅有模型完全性是不够的，至少要有一般框架完全性。

从一般框架完全性到框架完全性还可以作更细的分类。首先来看框架完全性的意义。

按“内涵是可能世界到真值的函数”的看法，可以对赋值的条件(3)作出分析。经过简单的转化，内涵也可以看成可能世界的子集。赋值的条件(3)实际上包含两个关于内涵的原则。

原子性原则。任何内涵都是由一些互相独立的极小的内涵(单元集)组合而成。

完备性原则。内涵的任何组合还是内涵。

这里说的组合是指广义的布尔运算(广义交、广义并、差)。

可以用有限组合原则将条件(3)减弱为：值域是一个布尔代数。在组合的含义中去掉差，减弱为格，再去掉并，减弱为下半格。还可以在从下半格到格、从格到布尔代数作出更细的分类。

从框架完全性的意义来看，具有框架完全性的系统是逻辑系统是没有问题的，而且还是一类较强的逻辑。

至于从一般框架完全性到框架完全性，承认那一类是逻辑，仅在邻域语义学的范围内很难找到标准。

参 考 文 献

[1] 刘壮虎　邻域语义学和模型完全性，载《北京大学学报(哲学社会科学版)》1995 年 5 期

[2] 刘壮虎　直觉主义逻辑的完全性和不完全性，载《哲学研究》1995 年增刊

[3] 刘壮虎　相干逻辑的邻域语义学，载《自然辩证法研究》1995 年增刊

[4] 刘壮虎　*Neighborhood Semantics of Modal Predicate Logic*，载《南京大学学报》1998 年数学半年刊

[5] 刘壮虎　初基演算的邻域语义学，载《摹物求比—沈有鼎及其治学之路》,社会科学文献出版社, 2000 年

[6] 毛　翊　条件句逻辑的邻域语义学，载《理有固然》，社会科学文献出版社，1995 年

[7] 周北海　《模态逻辑导论》，北京大学出版社，1997 年

[8] 张清宇,郭世铭,李小五　《哲学逻辑研究》，北京大学出版社，1997 年

(作者单位　北京大学哲学系)