主次条件句逻辑

刘壮虎[1]　李小五[2]

(1. 北京大学哲学系，北京　100871；2. 中山大学逻辑与认知科学研究所，广东 广州 510275)

摘要：首先，我们分析了主次条件句的性质，建立了主次条件句的极小系统 $C2L_m$，证明了一些有重要直观意义的内定理。其次，我们构造了一种邻域语义学，证明了 $C2L_m$ 的可靠性，并据邻域语义学引进了一般的典范模型的概念，然后应用典范模型证明了 $C2L_m$ 的完全性。最后，根据极小系统 $C2L_m$ 的技术性结果，我们简单讨论了相关主次条件句的一些重要问题。

关键词：条件句逻辑；主次条件句；邻域语义学；典范模型；单调性

中图分类号： B81　**文献标识码：** A

条件句刻画条件和结果的联系。通常的条件句逻辑只刻画一个条件下的结果；当遇到多个条件时，将其合取起来成为一个条件。这种处理有时是不合适的，因为在得到结果时，这多个条件的作用可能是不同的，而将它们简单地合取在一起就有可能抹杀它们的差别。因此我们需要直接处理多个条件的条件句。

本文讨论两个条件有差别的一类条件句，这两个条件分为主要条件和次要条件，所以我们称这种条件句逻辑为主次条件句逻辑。

一、基本思想

同时考虑两个条件和一个结果，就需要用三元联接词≥。$\alpha\beta\geq\gamma$的直观意义是：

(1) 从条件 α 和 β 得到结果 γ；

(2) α 是主要条件，β 是次要条件。

注意(2)没有说 α 不是次要条件，β 不是主要条件，所以可能同时有：β 是主要条件，α 是次要条件。因此≥刻画的是一种更为宽泛的双条件句。

但有了这种宽泛的双条件句，我们可以定义严格的区分主次的条件句。

$$(\alpha\beta\geq\gamma)\wedge\neg(\beta\alpha\geq\gamma)$$

就可以用来表示α是主要条件，β是次要条件的严格的条件句。

用这种宽泛的双条件句，我们还可以定义单条件的条件句。单条件的条件句$\alpha>\gamma$可以用$\alpha\alpha\geq\gamma$来定义。

条件(1)是说：从 α 和 β 得到 γ，但并不排除从单独的α或β也能得到γ的情况，而且主要条件和次要条件的差别能在这种情况下得到体现。

如果两个条件能得到一个结果，其中一个条件可以单独得到此结果，而另一个条件不能单独得到此结果，则这不能单独得到此结果的条件不能是主要条件。

从这个基本假定可以得到：如果 $\alpha\beta\geq\gamma$ 成立，则$\neg(\alpha>\gamma)$和 $\beta>\gamma$ 不能同时成立，也就是说：如果 $\alpha\beta\geq\gamma$ 和 $\beta>\gamma$ 都成立，则 $\alpha>\gamma$ 也一定成立。所以有以下公理：

$$(\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\beta>\gamma)\rightarrow(\alpha>\gamma)。$$

但在 $\alpha\beta\geq\gamma$ 和 $\alpha>\gamma$ 同时成立的情况下，$\beta>\gamma$ 可以成立，也可以不成立。所以这公理的对称形式

$$(\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\alpha>\gamma)\rightarrow(\beta>\gamma)$$

不是公理。

满足这基本假设的主次条件句逻辑就是极小的主次条件句逻辑。当然，主次条件句也是条件句，所以它们还应满足条件句的性质。

按作者的看法[1]，$>$成为蕴涵的最小要求是：

(1) 保真性　α 真且$\alpha>\gamma$真，则 γ 真，形式表示就是公理：$\alpha\wedge(\alpha>\gamma)\rightarrow\gamma$。（这也可以形式表示为：$(\alpha>\gamma)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$。）

(2) 完备性　如果在任何情况下，都能从 α 得到γ，则$\alpha>\gamma$成立。

在任何情况下，都能从 α 得到γ，就是说 $\alpha\rightarrow\gamma$ 成立，所以完备性的形式表示是推演规则：从 $\alpha\rightarrow\gamma$ 得到$\alpha>\gamma$。

条件句可以看作相对前提的必然句，$\alpha>\gamma$可以看作$\Box_\alpha\gamma$。[2] 按作者的看法，必然算子的最小要求是：

单 调 性　从$\gamma\rightarrow\delta$得到$\Box_\alpha\gamma\rightarrow\Box_\alpha\delta$。

合取原则　$\Box_\alpha(\gamma\wedge\delta)\rightarrow\Box_\alpha\gamma\wedge\Box_\alpha\delta$是公理[3]。

所以条件蕴涵的最小要求是：

(3) 结果单调性　从$\gamma\rightarrow\delta$得到$(\alpha>\gamma)\rightarrow(\alpha>\delta)$。

(4) 结果合取原则　$(\alpha>\gamma)\wedge(\alpha>\delta)\rightarrow(\alpha>\gamma\wedge\delta)$是公理。

从(2)可以得到 $\alpha>\alpha$，从 $\alpha>\alpha$ 和(3)能得到完备性。所以在条件句逻辑里，经常用公理$\alpha>\alpha$，而不用推演规则：从 $\alpha\rightarrow\gamma$ 得到$\alpha>\gamma$。

虽然条件句逻辑并不一定满足组合原则，但我们这里只讨论满足组合原则的条件句逻辑。组合原则在系统中体现为基本置换定理。古典联接词是满足组合原则的，由结果单调性，结果也能满足组合原则，所以只需加上条件的置换原则。

(5) 条件置换原则　从$\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2$得到$(\alpha_1>\gamma)\leftrightarrow(\alpha_2>\gamma)$。

我们需要将$>$推广到$\geq$，即(1)、(3)、(4)和(5)分别推广为：

$\alpha\wedge\beta\wedge(\alpha\beta\geq\gamma)\rightarrow\gamma$ 是公理，

从$\gamma\rightarrow\delta$得到$(\alpha\beta\geq\gamma)\rightarrow(\alpha\beta\geq\delta)$，

$(\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\alpha\beta\geq\delta)\rightarrow(\alpha\beta\geq\gamma\wedge\delta)$是公理。

从$\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2$和$\beta_1\leftrightarrow\beta_2$得到$(\alpha_1\beta_1\geq\gamma)\leftrightarrow(\alpha_2\beta_2\geq\gamma)$。

$\alpha>\alpha$是公理的推广为：$\alpha\beta\geq\alpha$是公理。注意$\alpha\beta\geq\beta$不是公理，这也体现了主要条件和次要条件的差异。

二、主次条件句逻辑的极小系统

主次条件句逻辑的形式语言是古典命题逻辑的形式语言（联结词取$\neg$和$\wedge$）加上三元联接词$\geq$。在公式的形成规则中加上：

如果α, β, γ是公式，则$\alpha\beta\geq\gamma$也是公式。

全体公式的集合记为 Form。

用通常的方式定义公式的置换$\alpha[\gamma/\beta]$和公式的代入$\alpha(\beta_1/p_1,\cdots,\beta_n/p_n)$。

像古典命题逻辑一样定义$\vee$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$。定义单条件的条件蕴涵$>$如下：

$$\alpha>\gamma =_{df} \alpha\alpha\geq\gamma。$$

主次条件句逻辑的极小系统 $C2L_m$ 由以下公理和推演规则构成：

公理

(1) 重言式的代入；

(2) 保真性公理 $\alpha\wedge\beta\wedge(\alpha\beta\geq\gamma)\rightarrow\gamma$；

(3) 结果合取公理 $(\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\alpha\beta\geq\delta)\rightarrow(\alpha\beta\geq\gamma\wedge\delta)$；

(4) 主要条件自蕴涵公理 $\alpha\beta\geq\alpha$；

(5) 主次条件基本公理 $(\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\beta>\gamma)\rightarrow(\alpha>\gamma)$。

推演规则

(1) 分离规则 从α和$\alpha\rightarrow\beta$得到β；

(2) 结果单调性规则 从$\gamma\rightarrow\delta$得到$(\alpha\beta\geq\gamma)\rightarrow(\alpha\beta\geq\delta)$。

(3) 条件置换规则 从$\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2$和$\beta_1\leftrightarrow\beta_2$得到$(\alpha_1\beta_1\geq\gamma)\leftrightarrow(\alpha_2\beta_2\geq\gamma)$。

（$C2L_m$中的 C2 表示双条件句，下标 m 表示极小（minimal）。）

α是 $C2L_m$的内定理记为 $\vdash\alpha$，全体内定理的集合记为 Th($C2L_m$)。

在 $C2L_m$中定义的单条件蕴涵满足条件蕴涵的最小要求：

定理 2.1 单条件蕴涵的性质

(1) 保真性 $\vdash(\alpha>\gamma)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$；

(2) 自蕴涵 $\vdash\alpha>\alpha$。

(3) 结果合取原则 $\vdash(\alpha>\gamma)\wedge(\alpha>\delta)\rightarrow(\alpha>\gamma\wedge\delta)$。

(4) 结果单调性 如果 $\vdash\gamma\rightarrow\delta$，则 $\vdash(\alpha>\gamma)\rightarrow(\alpha>\delta)$。

(5) 完备性 如果 $\vdash\alpha\rightarrow\gamma$，则 $\vdash\alpha>\gamma$。

(6) 条件置换原则 如果 $\vdash\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2$，则 $\vdash(\alpha_1>\gamma)\leftrightarrow(\alpha_2>\gamma)$。

证 由定义很容易证明，详细证明略。¦

在 $C2L_m$中，有一些关于主次条件的重要结果：

定理 2.2 主要条件的完备性 如果 $\vdash\alpha\rightarrow\gamma$，则 $\vdash\alpha\beta\geq\gamma$。

证 由结果单调性规则得到 $(\alpha\beta\geq\alpha)\rightarrow(\alpha\beta\geq\gamma)$，再由主要条件自蕴涵公理$\alpha\beta\geq\alpha$和分离规则得$\alpha\beta\geq\gamma$。¦

定理 2.3 单条件是主要条件 如果 $\vdash\alpha>\gamma$，则 $\vdash\alpha\beta\geq\gamma$。

证 由定理 2.1(1)和分离规则得 $\alpha\rightarrow\gamma$，再由定理 2.2 得$\alpha\beta\geq\gamma$。¦

两个条件能得到结果，但任何一个单独条件都不能得到结果，这种情况称为非退化的。这也是我们主要讨论的情况。

定理 2.4 非退化原则 $\vdash(\alpha\beta\geq\gamma)\wedge\neg(\alpha>\gamma)\rightarrow\neg(\beta>\gamma)$。

证 由主次条件基本公理$(\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\beta>\gamma)\rightarrow(\alpha>\gamma)$。¦

这原则告诉我们：只要主要条件不能单独得到结果，则主次条件句就是非退化的。

主要条件是可以作为结果的（公理 4），次要条件什么时候也能作为结果呢？这和次要条件是否多余有关。

设α和β是两个条件，如果α能得到β，则称条件β是多余的。

定理 2.5 $\vdash(\alpha\beta\geq\beta)\rightarrow(\alpha>\beta)$。

证　由公理$(\alpha\beta\geq\beta)\wedge(\beta>\beta)\to(\alpha>\beta)$得$(\beta>\beta)\to((\alpha\beta\geq\beta)\to(\alpha>\beta))$。由定理 2.1(2)和分离规则得$(\alpha\beta\geq\beta)\to(\alpha>\beta)$。¦

由定理 2.3（取γ为β）和 2.5 得：

定理 2.6　次要条件能够作为结果的充要条件　$\vdash\alpha>\beta$ 当且仅当 $\vdash\alpha\beta\geq\beta$。¦

$C2L_m$满足组合原则：

定理 2.7　结果置换原则　如果 $\vdash\gamma_1\leftrightarrow\gamma_2$，则 $\vdash(\alpha\beta\geq\gamma_1)\leftrightarrow(\alpha\beta\geq\gamma_2)$。

证　由结果单调性规则。¦

定理 2.8　基本置换定理　如果 $\vdash\beta\leftrightarrow\gamma$，则 $\vdash\alpha\leftrightarrow\alpha[\gamma/\beta]$。

证　对公式的构造作归纳，详细证明略。¦

三、邻域语义学

我们建立主次条件句逻辑的邻域语义学。注意，这种邻域语义学是作者的一般邻域语义学[4]在主次条件句逻辑中的特例，和条件句逻辑研究中一般所说的邻域语义学是不一样的。

A 是任意集合，A 是幂集记为 P(A)，即 $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$。

定义 3.1　邻域映射　W 是非空集合，W 到 $P(P(W)^n)$的映射称为 W 上的 n 元邻域映射。

定义 3.2　框架　K = <W, N>。如果 K 满足以下条件：

(1) W 是非空集合，称为可能世界集，W 的元素称为可能世界，

(2) N 是 W 上的三元邻域映射；

则称 K 为框架。

定义 3.3　赋值和模型　K = <W, N>是框架，V 是 Form 到 P(W)的映射，如果 V 满足以下条件：

(1) $x\in V(\neg\alpha)$ 当且仅当 $x\notin V(\alpha)$，

(2) $x\in V(\alpha\wedge\beta)$ 当且仅当 $x\in V(\alpha)$且 $x\in V(\beta)$，

(3) $x\in V(\alpha\beta\geq\gamma)$ 当且仅当 $\langle V(\alpha), V(\beta), V(\gamma)\rangle\in N(x)$；

则称 V 是 K 上的赋值，并称<K, V>为模型。

由定义可知古典联结词有以下性质：

引理 3.4

(1) $V(\neg\alpha) = W \setminus V(\alpha)$，

$V(\alpha\wedge\beta) = V(\alpha)\cap V(\beta)$，

$V(\alpha\vee\beta) = V(\alpha)\cup V(\beta)$。

(2) 如果 $x\in V(\alpha)$且 $x\in V(\alpha\to\beta)$，则 $x\in V(\beta)$。

(3) $V(\alpha\to\beta) = W$ 当且仅当 $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$。

(4) $V(\alpha\leftrightarrow\beta) = W$ 当且仅当 $V(\alpha) = V(\beta)$。

定义 3.5　**满足**　K = <W, N>**是框架。**

(1) V **是** K **上赋值，如果** $V(\alpha) = W$**，则称**<K, V>**满足**α**，记为**$<K, V> \models \alpha$。

(2) **如果任给** K **上赋值** V**，都有**$<K, V> \models \alpha$**，则称** K **满足**α**，记为** $K \models \alpha$。

（$K \models \alpha$**的条件是：任给** K **上赋值** V**，都有** $V(\alpha) = W$。）

所以，$K \not\models \alpha$**的条件就是：存在** K **上赋值** V**，使得** $V(\alpha) \neq W$。

满足的概念可以推广到框架类。Σ**是框架类，如果任给** $K\in\Sigma$**，都有** $K \models \alpha$**，则称**Σ**满足**α**，记为**$\Sigma \models \alpha$。

所以，$\Sigma \not\models \alpha$**的条件就是：存在** $K\in\Sigma$**，存在** K **上赋值** V**，使得** $V(\alpha) \neq W$。

和其它语义学不同，在邻域语义学中所有框架刻画的极小逻辑是没有意义的，因为邻域映射 N **刻画了最一般的三元联结词。因此我们需要刻画主次条件句的那些框架。**

定义 3.6　**主次条件框架**　K = <W, N>**是框架。如果** K **满足以下条件：**

(1) **保真性**　**如果**$<S, P, Q>\in N(x)$**且** $x\in S\cap P$**，则** $x\in Q$**，**

(2) **单调性**　**如果**$<S, P, Q_1>\in N(x)$**且** $Q_1 \subseteq Q_2$**，则**$<S, P, Q_2>\in N(x)$**，**

(3) **结果合取性**　**如果**$<S, P, Q_1>\in N(x)$**且**$<S, P, Q_2>\in N(x)$**，则**$<S, P, Q_1\cap Q_2>\in N(x)$**，**

(4) **主要条件完备性**　**如果** $S \subseteq Q$**，则**$<S, P, Q>\in N(x)$**，**

(5) **主要条件基本性质**　**如果**$<S, P, Q>\in N(x)$**且**$<P, P, Q>\in N(x)$**，则**$<S, S, Q>\in N(x)$**；则称** K **为主次条件框架，简称 C2 框架。**

所有主次条件框架组成的框架类记为Σ(C2)。

主次条件句逻辑的极小系统 $\mathbf{C2L_m}$**对于框架类Σ(C2)是可靠的。**

引理 3.7　**任给 C2 框架** K**，任给** $\mathbf{C2L_m}$**的公理**α**，都有** $K \models \alpha$。

证　**设** K = <W, N>**，证明任给** K **上赋值** V**，都有** $V(\alpha) = W$。

公理 1　**显然。**

公理 2　**如果** $x\in V(\alpha\wedge\beta\wedge(\alpha\beta\geq\gamma))$**，则** $x\in V(\alpha\wedge\beta)$**且** $x\in V(\alpha\beta\geq\gamma)$**，所以**

$$x\in V(\alpha)\cap V(\beta) \text{且} <V(\alpha), V(\beta), V(\gamma)>\in N(x),$$

由 C2 框架的保真性得 $x\in V(\gamma)$**，因此**

$$V(\alpha\wedge\beta\wedge(\alpha\beta\geq\gamma)) \subseteq V(\gamma),$$

由引理 3.4(3)**得** $V((\alpha\wedge\beta\wedge(\alpha\beta\geq\gamma)\to\gamma) = W$。

公理 3　**如果** $x\in V((\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\alpha\beta\geq\delta))$**，则** $x\in V(\alpha\beta\geq\gamma)$**且** $x\in V(\alpha\beta\geq\delta)$**，所以**

$$<V(\alpha), V(\beta), V(\gamma)>\in N(x) \text{且} <V(\alpha), V(\beta), V(\delta)>\in N(x),$$

由 C2 框架的结果合取性得$<V(\alpha), V(\beta), V(\gamma)\cap V(\delta)>\in N(x)$**，所以**

$$<V(\alpha), V(\beta), V(\gamma\wedge\delta)>\in N(x),$$

这就是 $x\in V(\alpha\beta\geq\gamma\wedge\delta)$**，因此**

$$V((\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\alpha\beta\geq\delta)) \subseteq V(\alpha\beta\geq\gamma\wedge\delta),$$

由引理 3.4(3)**得** $V((\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\alpha\beta\geq\delta)\to(\alpha\beta\geq\gamma\wedge\delta)) = W$。

公理 4　**任给** $x\in W$**，由 C2 框架的主要条件完备性和** $V(\alpha) \subseteq V(\alpha)$**得**

$$<V(\alpha), V(\beta), V(\alpha)>\in N(x),$$

所以 $x\in V(\alpha\beta\geq\alpha)$**，因此** $V(\alpha\beta\geq\alpha) = W$。

公理 5　**如果** $x\in V((\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\beta>\gamma))$**，则** $x\in V(\alpha\beta\geq\gamma)$**且** $x\in V(\beta>\gamma)$**，所以**

$$<V(\alpha), V(\beta), V(\gamma)>\in N(x) \text{且} <V(\beta), V(\beta), V(\delta)>\in N(x),$$

由 C2 框架的主次条件基本性质得$<V(\alpha), V(\alpha), V(\gamma)>\in N(x)$**，所以** $x\in V(\alpha>\gamma)$**，因此**

$$V((\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\beta>\gamma)) \subseteq V(\alpha>\gamma),$$

由引理 3.4(3)得 $V((\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\beta>\gamma)\to(\alpha>\gamma)) = W$。¦

引理 3.8　**任给 C2 框架** K，**都有**

(1) 如果 $K \models \alpha$ 且 $K \models \alpha\to\beta$，则 $K \models \beta$。

(2) 如果 $K \models \gamma\to\delta$，则 $K \models (\alpha\beta\geq\gamma)\to(\alpha\beta\geq\delta)$。

(3) 如果 $K \models \alpha_1\leftrightarrow\alpha_2$ 且 $K \models \beta_1\leftrightarrow\beta_2$，则 $K \models (\alpha_1\beta_1\geq\gamma)\leftrightarrow(\alpha_2\beta_2\geq\gamma)$。

证

(1) 任给 K 上赋值 V，都有 $V(\alpha) = V(\alpha\to\beta) = W$，由 $V(\alpha\to\beta) = W$ 得

$$V(\alpha) \subseteq V(\beta),$$

所以 $V(\beta) = W$，因此 $K \models \beta$。

(2) 任给 K 上赋值 V，都有 $V(\gamma\to\delta) = W$，所以 $V(\gamma) \subseteq V(\delta)$。

如果 $x\in V(\alpha\beta\geq\gamma)$，则 $<V(\alpha), V(\beta), V(\gamma)>\in N(x)$，由 C2 框架的单调性得

$$<V(\alpha), V(\beta), V(\delta)>\in N(x),$$

所以 $x\in V(\alpha\beta\geq\delta)$。

这证明了 $V(\alpha\beta\geq\gamma) \subseteq V(\alpha\beta\geq\delta)$，所以

$$V((\alpha\beta\geq\gamma)\to(\alpha\beta\geq\delta)) = W,$$

因此 $K \models (\alpha\beta\geq\gamma)\to(\alpha\beta\geq\delta)$。

(3) 任给 K 上赋值 V，都有

$$V(\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2) = W \text{ 且 } V(\beta_1\leftrightarrow\beta_2) = W,$$

所以 $V(\alpha_1) = V(\alpha_2)$且 $V(\beta_1) = V(\beta_2)$。

任给 x，

$x\in V(\alpha_1\beta_1\geq\gamma)$ 当且仅当 $<V(\alpha_1), V(\beta_1), V(\gamma)>\in N(x)$

当且仅当 $<V(\alpha_2), V(\beta_2), V(\delta)>\in N(x)$

当且仅当 $x\in V(\alpha_2\beta_2\geq\gamma)$。

这证明了 $V(\alpha_1\beta_1\geq\gamma) = V(\alpha_2\beta_2\geq\gamma)$，所以

$$V((\alpha_1\beta_1\geq\gamma)\leftrightarrow(\alpha_2\beta_2\geq\gamma)) = W,$$

因此 $K \models (\alpha_1\beta_1\geq\gamma)\leftrightarrow(\alpha_2\beta_2\geq\gamma)$。¦

定理 3.9　**可靠性定理**　如果 $\vdash \alpha$，则 $\Sigma(\mathbf{C2}) \models \alpha$。

证　对于α的证明序列 $\alpha_1,\cdots, \alpha_n$，任给 $K\in\Sigma(\mathbf{C2})$，归纳证明 $K \models \alpha_i$。在证明中使用引理 3.7 和 3.8，具体证明略。¦

四、典范模型

和通常的模态逻辑一样定义推演。

定义 4.1　**推演**　u 是公式集，α是公式。如果存在 $\varphi_1,\cdots, \varphi_n\in u$，使得 $\vdash \varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\to\alpha$，则称从 u 推出α，记为 $u \vdash \alpha$。

注意 n 可以为 0。当 n = 0 时，$\vdash \varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\to\alpha$ 就是 $\vdash \alpha$。

这样定义的推演也满足推演的基本性质：

定理 4.2　**推演的基本性质**

(1) 单调性　如果 $u \vdash \alpha$ 且 $u \subseteq v$，则 $v \vdash \alpha$。

(2) **传递性**　**如果** $v \vdash \alpha$ **且任给**$\beta \in v$**，都有** $u \vdash \beta$**，则** $u \vdash \alpha$。

(3) **演绎定理**　$u \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$ **当且仅当** $u \vdash \varphi \to \alpha$。

虽然上述推演的定义和古典命题逻辑不一样，但可以和古典命题逻辑一样，在用推演定义和谐、极大和谐等概念，也有相应的性质。

定义 4.3　**和谐**

(1) u **是公式集。如果不存在公式**α**，使得** $u \vdash \alpha$**且** $u \vdash \neg\alpha$**，则称** u **是和谐的。**

(2) u **是和谐公式集。如果任给**$\alpha \notin u$**，都有** $u \cup \{\alpha\}$**不和谐，则称** u **是极大和谐的。**

引理 4.4　**和谐集的性质**

(1) u **不和谐　当且仅当　存在公式**α**，使得** $u \vdash \alpha$**且** $u \vdash \neg\alpha$。

(2) u **不和谐　当且仅当　任给公式**α**，都有** $u \vdash \alpha$。

(3) u **和谐　当且仅当　存在公式**α**，使得** $u \nvdash \alpha$。

(4) u **和谐　当且仅当**　u **的任何有限子集都和谐。**

(5) $u \nvdash \alpha$ **当且仅当**　$u \cup \{\neg\alpha\}$**和谐。**¦

引理 4.5　**极大和谐集的性质**　**设** u **是极大和谐集。**

(1) **推演封闭性**　**如果** $u \vdash \alpha$**，则**$\alpha \in u$。**特别地，如果** $\vdash \alpha$**，则**$\alpha \in u$。

(2) **任给公式**α**，都有**$\neg\alpha \in u$ **当且仅当**　$\alpha \notin u$。

(3) **任给公式**α, β**，都有**$\alpha \wedge \beta \in u$ **当且仅当**　$\alpha \in u$ **且**$\beta \in u$。

(4) **如果**$\alpha, \alpha \to \beta \in u$**，则**$\beta \in u$。

(5) **如果**$\alpha, \beta, \alpha\beta \geq \gamma \in u$**，则**$\gamma \in u$。¦

任何和谐集都可以扩充为极大和谐集，所以有：

引理 4.6

(1) **如果** $\nvdash \alpha$**，则存在极大和谐集** u**，使得**$\alpha \notin u$。

(2) **如果** $\nvdash \alpha \to \beta$**，则存在极大和谐集** u**，使得**$\alpha \in u$ **且**$\beta \notin u$。¦

令 $W = \{u \mid u$ **是极大和谐集**$\}$，$|\alpha| = \{u \in W \mid \alpha \in u\}$**，则我们有：**

引理 4.7

(1) $u \in |\alpha|$ **当且仅当**　$\alpha \in u$。

(2) $|\neg\alpha| = W \setminus |\alpha|$。

(3) $|\alpha \wedge \beta| = |\alpha| \cap |\beta|$。

(4) $|\alpha| \subseteq |\beta|$ **当且仅当**　$\vdash \alpha \to \beta$。

(5) $|\alpha| = |\beta|$ **当且仅当**　$\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$。¦

和其它语义学不同，邻域语义学中的典范模型不是一个，而是一类。它们不是具体构造的，而是通过性质定义的。满足某种性质的模型都称为典范模型。

定义 4.8　**典范模型**　$K = \langle W, N \rangle$，V **是** K **上赋值。如果：**

(1) $W = \{u \mid u$ **是极大和谐集**$\}$，

(2) $\langle |\alpha|, |\beta|, |\gamma| \rangle \in N(u)$ **当且仅当**　$\alpha\beta \geq \gamma \in u$，

(3) 任给命题变项 p，都有 $\mathrm{V}(p) = |\,p\,|$；
则称 $<\mathrm{K}, \mathrm{V}>$ 是典范模型。

典范模型的本质特征体现在以下定理中：

定理 4.9 典范模型基本定理 $<\mathrm{K}, \mathrm{V}>$ 是典范模型，则任给公式 φ，都有 $|\,\varphi\,| = \mathrm{V}(\varphi)$，也就是 $u \in \mathrm{V}(\varphi)$ 当且仅当 $\varphi \in u$。

证 对公式的构造归纳证明。φ 是命题变项、$\varphi = \neg\alpha$、$\varphi = \alpha\wedge\beta$ 的证明略。

设 $\varphi = \alpha\beta\geq\gamma$，由归纳假设，$|\,\alpha\,| = \mathrm{V}(\alpha)$, $|\,\beta\,| = \mathrm{V}(\beta)$, $|\,\gamma\,| = \mathrm{V}(\gamma)$，所以

$u \in \mathrm{V}(\varphi)$ 当且仅当 $u \in \mathrm{V}(\alpha\beta\geq\gamma)$

当且仅当 $<\mathrm{V}(\alpha), \mathrm{V}(\beta), \mathrm{V}(\gamma)> \in \mathrm{N}(u)$ 由 3.3(3)

当且仅当 $<|\,\alpha\,|, |\,\beta\,|, |\,\gamma\,|> \in \mathrm{N}(u)$ 由归纳假设

当且仅当 $\alpha\beta\geq\gamma \in u$ 由 4.8(2)

当且仅当 $\varphi \in u$。 ¦

由典范模型基本定理和极大和谐集的性质，可得：

定理 4.10 $<\mathrm{K}, \mathrm{V}>$ 是典范模型，则任给公式 α，都有 $<\mathrm{K}, \mathrm{V}> \models \alpha$ 当且仅当 $\vdash \alpha$。

证 如果 $\vdash \alpha$，则任给 $u \in \mathrm{W}$，由引理 4.5(1)得 $\alpha \in u$，所以

$|\,\alpha\,| = \mathrm{W}$，

由定理 4.9 得 $\mathrm{V}(\alpha) = |\,\alpha\,| = \mathrm{W}$，所以 $<\mathrm{K}, \mathrm{V}> \models \alpha$。

如果 $\nvdash \alpha$，则由引理 4.6(1)得存在 $u \in \mathrm{W}$，使得 $\alpha \notin u$，所以

$|\,\alpha\,| \neq \mathrm{W}$，

由定理 4.9 得 $\mathrm{V}(\alpha) = |\,\alpha\,| \neq \mathrm{W}$，所以 $<\mathrm{K}, \mathrm{V}> \not\models \alpha$。 ¦

五、完全性

完全性是说：如果 $\Sigma(\mathbf{C2}) \models \alpha$，则 $\vdash \alpha$；也就是说：如果 $\nvdash \alpha$，则 $\Sigma(\mathbf{C2}) \not\models \alpha$。$<\mathrm{K}, \mathrm{V}>$ 是典范模型，则任给 $\nvdash \alpha$，都有 $<\mathrm{K}, \mathrm{V}> \not\models \alpha$，所以只要 $\mathrm{K} \in \Sigma(\mathbf{C2})$，就有 $\Sigma(\mathbf{C2}) \not\models \alpha$。

因此用典范模型证明完全性的关键就是：构造典范模型 $<\mathrm{K}, \mathrm{V}>$，使得 $\mathrm{K} \in \Sigma(\mathbf{C2})$。

我们构造模型 $<\mathrm{K}^*, \mathrm{V}^*>$ 如下，其中 $\mathrm{K}^* = <\mathrm{W}, \mathrm{N}>$。

(1) $\mathrm{W} = \{\, u \mid u$ 是极大和谐集$\}$；

(2) $\mathrm{N}_0(u) = \{<|\,\alpha\,|, |\,\beta\,|, Q> \mid$ 存在 $\alpha\beta\geq\gamma \in u$，使得 $|\,\gamma\,| \subseteq Q\}$，

$\mathrm{N}_1(u) = \{<S, P, Q> \mid S \subseteq Q\}$，

$\mathrm{N}(u) = \mathrm{N}_0(u) \cup \mathrm{N}_1(u)$；

(3) 任给命题变项 p，都有 $\mathrm{V}^*(p) = |\,p\,|$。

我们首先证明 $<\mathrm{K}^*, \mathrm{V}^*>$ 是典范模型。

定理 5.1 $<\mathrm{K}^*, \mathrm{V}^*>$ 是典范模型。

证 按典范模型的要求，只需证明：

$<|\,\alpha\,|, |\,\beta\,|, |\,\gamma\,|> \in \mathrm{N}(u)$ 当且仅当 $\alpha\beta\geq\gamma \in u$。

如果 $\alpha\beta\geq\gamma \in u$，因为 $|\,\gamma\,| \subseteq |\,\gamma\,|$，所以 $<|\,\alpha\,|, |\,\beta\,|, |\,\gamma\,|> \in \mathrm{N}_0(u)$，因此 $<|\,\alpha\,|, |\,\beta\,|, |\,\gamma\,|> \in \mathrm{N}(u)$。

如果 $<|\,\alpha\,|, |\,\beta\,|, |\,\gamma\,|> \in \mathrm{N}(u)$，则我们分别考虑两种情况。

1. $<|\,\alpha\,|, |\,\beta\,|, |\,\gamma\,|> \in \mathrm{N}_0(u)$。由定义得：存在 $\alpha'\beta'\geq\gamma' \in u$，使得

$|\alpha'| = |\alpha|, |\beta'| = |\beta|, |\gamma'| \subseteq |\gamma|$，

由引理 4.7 **的**(4)**和**(5)**得：**

$\vdash \alpha'\leftrightarrow\alpha$，$\vdash \beta'\leftrightarrow\beta$**和** $\vdash \gamma'\rightarrow\gamma$。

由 $\vdash \alpha'\leftrightarrow\beta$，$\vdash \beta'\leftrightarrow\beta$**和条件置换规则得**

$\vdash (\alpha'\beta'\geq\gamma')\leftrightarrow(\alpha\beta\geq\gamma')$，

再由$\alpha'\beta'\geq\gamma'\in u$ **得**

$\alpha\beta\geq\gamma'\in u$。

由 $\vdash \gamma'\rightarrow\gamma$**和结果单调性规则得**

$\vdash (\alpha\beta\geq\gamma')\rightarrow(\alpha\beta\geq\gamma)$，

再由$\alpha\beta\geq\gamma'\in u$ **得**$\alpha\beta\geq\gamma\in u$。

2\. $<|\alpha|, |\beta|, |\gamma|>\in N_1(u)$。**由定义得**$|\alpha| \subseteq |\gamma|$，**由引理** 4.7 **的**(4)**得**

$\vdash \alpha\rightarrow\gamma$，

再由主要条件的完备性（定理 2.2**）得** $\vdash \alpha\beta\geq\gamma$，**所以**$\alpha\beta\geq\gamma\in u$。¦

下面我们再来证 K***是 C2 框架：**

定理 5.2　K***是 C2 框架。**

证　分别证明 C2 框架的 5 **条性质。**

(1) **保真性。**

如果$<|\alpha|, |\beta|, Q>\in N_0(u)$**且** $u\in|\alpha|\cap|\beta|$，**则**

存在$\alpha\beta\geq\gamma\in u$，**使得**$|\gamma| \subseteq Q$，

由 $u\in|\alpha|\cap|\beta|$**得**$\alpha, \beta\in u$，**再由**$\alpha\beta\geq\gamma\in u$ **和引理** 4.5(5)**得**

$\gamma\in u$，

所以 $u\in|\gamma|$，**因此** $u\in Q$。

如果$<S, P, Q>\in N_1(u)$**且** $u\in S\cap P$，**则** $S \subseteq Q$，**所以** $u\in Q$。

(2) **单调性**

如果$<|\alpha|, |\beta|, Q_1>\in N_0(x)$**且** $Q_1 \subseteq Q_2$，**则**

存在$\alpha\beta\geq\gamma\in u$，**使得**$|\gamma| \subseteq Q_1$，

所以

存在$\alpha\beta\geq\gamma\in u$，**使得**$|\gamma| \subseteq Q_2$，

因此$<|\alpha|, |\beta|, Q_2>\in N_0(x)$。

如果$<S, P, Q_1>\in N_1(x)$**且** $Q_1 \subseteq Q_2$，**则** $S \subseteq Q_1$，**所以** $S \subseteq Q_2$，**因此**$<S, P, Q_2>\in N_1(x)$。

(3) **结果合取性**

如果$<S, P, Q_1>\in N_0(x)$**且**$<S, P, Q_2>\in N_0(x)$，**则**

存在$\alpha_1\beta_1\geq\gamma_1, \alpha_2\beta_2\geq\gamma_2\in u$，**使得**$|\gamma_1| \subseteq Q_1$，$|\gamma_2| \subseteq Q_2$，

且

$S = |\alpha_1| = |\alpha_2|$，$P = |\beta_1| = |\beta_2|$，

所以 $\vdash \alpha_1\leftrightarrow\alpha_2$，$\vdash \beta_1\leftrightarrow\beta_2$。**由** $\vdash \alpha_1\leftrightarrow\alpha_2$，$\vdash \beta_1\leftrightarrow\beta_2$ **和条件置换规则得**

$\vdash (\alpha_1\beta_1\geq\gamma_1)\leftrightarrow(\alpha_2\beta_2\geq\gamma_1)$，

再由$\alpha_1\beta_1\geq\gamma_1\in u$ **得**

$\alpha_2\beta_2\geq\gamma_1\in u$，

由$\alpha_2\beta_2\geq\gamma_1, \alpha_2\beta_2\geq\gamma_2\in u$ **和结果合取公理得**

$\alpha_2\beta_2\geq\gamma_1\wedge\gamma_2\in u$，

所以

存在$\alpha_2\beta_2 \geq \gamma_1\wedge\gamma_2 \in u$，**使得**$|\gamma_1\wedge\gamma_2| \subseteq Q_1\cap Q_2$，

因此$<S, P, Q_1\cap Q_2> \in N_0(x)$。

如果$<S, P, Q_1> \in N_1(x)$**且**$<S, P, Q_2> \in N_1(x)$，**则**

$S \subseteq Q_1$ **且** $S \subseteq Q_2$，

所以 $S \subseteq Q_1\cap Q_2$，**因此**$<S, P, Q_1\cap Q_2> \in N_1(x)$。

如果$<S, P, Q_1> \in N_0(x)$**且**$<S, P, Q_2> \in N_1(x)$，**则**

存在$\alpha\beta \geq \gamma \in u$，**使得**$|\gamma| \subseteq Q_1$，**且** $S = |\alpha|$，$P = |\beta|$，$S \subseteq Q_2$，

所以

$|\gamma\wedge\alpha| = |\gamma| \cap S \subseteq Q_1\cap Q_2$，

由$\alpha\beta \geq \gamma$, $\alpha\beta \geq \alpha \in u$ **和结果合取公理得**$\alpha\beta \geq \gamma\wedge\alpha \in u$，**所以**

存在$\alpha\beta \geq \gamma\wedge\alpha \in u$，**使得**$|\gamma\wedge\alpha| \subseteq Q_1\cap Q_2$，

因此$<S, P, Q_1\cap Q_2> \in N_0(x)$。

如果$<S, P, Q_1> \in N_1(x)$**且**$<S, P, Q_2> \in N_0(x)$，**则由对称性证明类似。**

(4) **主要条件完备性**

如果 $S \subseteq Q$，**则**$<S, P, Q> \in N_1(x)$。

(5) **主要条件基本性质**

如果$<S, P, Q> \in N_0(x)$**且**$<P, P, Q> \in N_0(x)$，**则**

存在$\alpha_1\beta_1 \geq \gamma_1$, $\alpha_2\beta_2 \geq \gamma_2 \in u$，**使得**$|\gamma_1| \subseteq Q$，$|\gamma_2| \subseteq Q$，

且

$S = |\alpha_1|$，$P = |\beta_1| = |\alpha_2| = |\beta_2|$，$Q = |\gamma_1| = |\gamma_2|$，

所以

$|\gamma_1\vee\gamma_2| \subseteq Q$，$\vdash \beta_1\leftrightarrow\alpha_2$，$\vdash \beta_1\leftrightarrow\beta_2$，$\vdash \gamma_1\leftrightarrow\gamma_2$。

由 $\vdash \beta_1\leftrightarrow\alpha_2$，$\vdash \beta_1\leftrightarrow\beta_2$ **和条件置换规则得**

$\vdash (\alpha_2\beta_2 \geq \gamma_2)\leftrightarrow(\beta_1\beta_2 \geq \gamma_2)$，

$\vdash (\beta_1\beta_2 \geq \gamma_2)\leftrightarrow(\beta_1\beta_1 \geq \gamma_2)$，

由 $\vdash \gamma_1\leftrightarrow\gamma_2$ **和结果置换原则（定理 2.7）得**

$\vdash (\beta_1\beta_1 \geq \gamma_2)\leftrightarrow(\beta_1\beta_1 \geq \gamma_1)$，

再由上面 3 个可证等价式得

$\vdash (\alpha_2\beta_2 \geq \gamma_2)\leftrightarrow(\beta_1\beta_1 \geq \gamma_1)$。

再由$\alpha_2\beta_2 \geq \gamma_2 \in u$ **得**

$\beta_1\beta_1 \geq \gamma_1 \in u$，

由$\alpha_1\beta_1 \geq \gamma_1$, $\beta_1\beta_1 \geq \gamma_1 \in u$ **和结果单调性规则得**

$\alpha_1\beta_1 \geq \gamma_1\vee\gamma_2$, $\beta_1\beta_1 \geq \gamma_1\vee\gamma_2 \in u$，

再由主次条件基本公理得

$\alpha_1\alpha_1 \geq \gamma_1\vee\gamma_2 \in u$，

所以

存在$\alpha_1\alpha_1 \geq \gamma_1\vee\gamma_2 \in u$，**使得**$|\gamma_1\vee\gamma_2| \subseteq Q$，

因此$<S, S, Q> \in N_0(x)$。

如果$<S, P, Q> \in N_0(x)$**且**$<P, P, Q> \in N_1(x)$，**则**

存在$\alpha\beta \geq \gamma \in u$，**使得**$|\alpha| = S$，$|\beta| = P$，$|\gamma| \subseteq Q$，**且** $P \subseteq Q$，

所以

$|\gamma\vee\beta| \subseteq Q$，

由$\alpha\beta \geq \gamma \in u$ **和结果单调性规则得**

$\alpha\beta \geq \gamma\vee\beta\in u$。

由定理 2.2 得 $\beta\beta \geq \gamma\vee\beta\in u$，再由主次条件基本公理得

$\alpha\alpha \geq \gamma\vee\beta\in u$，

所以

存在$\alpha\alpha \geq \gamma\vee\beta\in u$，使得$|\gamma\vee\beta| \subseteq Q$，

因此$<S, S, Q>\in \mathrm{N}_0(x)$。

如果$<S, P, Q>\in \mathrm{N}_1(x)$，则 $S \subseteq Q$，所以$<S, S, Q>\in \mathrm{N}_1(x)$。¦

定理 5.3　完全性定理　如果$\Sigma(\mathbf{C2}) \models \alpha$，则 $\vdash \alpha$。

证　证明如果 $\nvdash \alpha$，则$\Sigma(\mathbf{C2}) \not\models \alpha$。

如果 $\nvdash \alpha$，则据定理 5.1，$<K^*, V^*>$是典范模型，再由定理 4.10 得$<K^*, V^*> \not\models \alpha$，所以 $K^* \not\models \alpha$。再据定理 5.2 得 $K^*\in\Sigma(\mathbf{C2})$，所以$\Sigma(\mathbf{C2}) \not\models \alpha$。■

六　讨论

1．条件的单调性。

在条件蕴涵中，条件的单调性是一个重要的问题。实际上有两种不同的单调性。

单调性 ***a***　单个条件α能得到γ，则两个条件α, β也能得到γ。

单调性 ***b***　如果β逻辑蕴涵α（即$\beta\to\alpha$是重言式）且条件α能得到γ，则条件β也能得到γ。

大量的例子说明单调性 *a* 是不成立的。在单条件的条件句逻辑中，将两个条件α, β表示为一个条件$\alpha\wedge\beta$，所以从单调性 *a* 不成立就能得到单调性 *b* 不成立。然而两个条件α, β表示为一个条件$\alpha\wedge\beta$是不合适的，因为$\wedge$是外延联结词。

如果我们不把两个条件α, β表示为一个条件$\alpha\wedge\beta$，则并没有直接的例子说明单调性 *b* 是不成立。因此可以在单条件的条件句逻辑中，考虑单调性 *b* 成立的系统，而不必顾忌那些实际上只是否定了单调性 *a* 的例子。

而我们的系统确实能区别形如$\alpha\beta \geq \gamma$的双条件句和形如$\alpha\wedge\beta > \gamma$的单条件句。易证，存在 $K\in\Sigma(C2)$，使得 $K \not\models \alpha\beta \geq \gamma \leftrightarrow \alpha\wedge\beta > \gamma$。所以据可靠性定理得 $\nvdash \alpha\beta \geq \gamma \leftrightarrow \alpha\wedge\beta > \gamma$。

2．蕴涵悖论。

所谓的“蕴涵悖论”中有一条是“恒假命题蕴涵任何命题”，这对于条件逻辑也是成立的。和它像相类似的“矛盾命题蕴涵任何命题”却有两种不同的理解。将矛盾命题理解为一个命题，就是恒假命题。但也可以将矛盾命题理解为两个相矛盾的命题，更确切的说应该是“一对矛盾命题蕴涵任何命题”。在我们的系统中，这两种理解是不同的，“一对矛盾命题蕴涵任何命题”表示为$\alpha(\neg\alpha) \geq \gamma$，可以证明它并不是我们系统的内定理。

3．主要条件存在性。

设从条件 α 和 β 能够得到结果 γ。我们的系统允许 α 和 β 都是主要条件，但并没有假定 α 和 β 中一定有一个主要条件。如果我们引进主要条件存在性：

如果从条件 α 和 β 能够得到结果 γ，则 α 和 β 中必有主要条件。

则我们就能用$(\alpha\beta \geq \gamma)\vee(\beta\alpha \geq \gamma)$去表示更一般的“从条件 α 和 β 得到结果 γ”的概念。至于这个假设是否成立，则需要对日常语言的双条件的条件句作进一步分析。

4．系统的扩充。

本文构造的仅仅是主次条件逻辑的极小系统。可以扩充为更为复杂的系统。有两种不同的扩充。

(1) **考虑与单条件的条件句逻辑的一些类似的公理，如对于条件的析取公理，可以对主要条件和次要条件分别考虑。又如多余条件消去公理：**$(\alpha\beta\geq\gamma)\wedge(\alpha>\beta)\rightarrow(\alpha>\gamma)$**。等等。**

(2) **与单条件的条件句逻辑不一样的一些性质。如单调性** b**，可以在主要条件和次要条件上分别加上单调性** b **的公理，可以加上"一对矛盾命题蕴涵任何命题"的公理。等等。**

参考文献：

[1] 刘壮虎. 逻辑系统中的蕴涵[A]. 逻辑今探. 北京:社会科学文献出版社, 1999. 58-64.

[2] 毛 翊. 条件句逻辑的邻域语义学和模型完全性[A]. 理有固然. 北京:社会科学文献出版社. 1999. 255-273.

[3] 刘壮虎. 必然性的逻辑分析[J].哲学研究. 2002,(2): 72-76.

[4] 刘壮虎. 邻域语义学和模型完全性[J].北京大学学报(哲学社会科学版), 1995,(3): 52-56.

[5] 李小五. 条件句逻辑[M]. 北京:人民出版社, 2003.

[6] 刘壮虎. 逻辑演算[M]. 北京:中国社会科学出版社, 1992.

Logic of primary-conditionals and secondary-conditionals

LU Zhang-hu1, LI Xiao-wu2

(1. Department of Philosophy of Peking University 100871, China； 2. Institute of Logic and Cognition of Zhongshan University 510275, China)

Abstract： Firstly, we analyze the properties of primary-conditionals and secondary-conditionals, establish the minimum system $\mathbf{C2L}_m$ of primary-conditionals and secondary-conditionals, prove some of the formal theorems of the system which have the important intuitive meanings. Secondly, we construct a neighborhood semantics, prove the soundness of $\mathbf{C2L}_m$, introduce a general concept of canonical model by the neighborhood semantics, and then prove the completeness of $\mathbf{C2L}_m$ by the canonical model. Finally, according to the technological results of the minimum system $\mathbf{C2L}_m$, we simply discuss some of important problems about primary-conditionals and secondary-conditionals.

Key words： logic of conditionals; primary-conditionals and secondary-conditionals; neighborhood semantics; canonical model; monotonicity

收稿日期：2004-9-25；

基金项目：教育部人文社会科学研究“十五”规划第一批研究项目 (01JB720003) 资助

作者简介：

刘壮虎(1954-)，男，上海人，北京大学教授，博导，北京书生科技有限公司书生研究中心客座研究员；

李小五(1955-)，男，河北人，中山大学教授，博导，北京书生科技有限公司书生研究中心客座研究员。