对动作的认知

刘壮虎　　李小五

(北京大学哲学系，北京 100871；中山大学逻辑与认知研究所，广东 广州 510275)

摘　要：本文在通常的动态认知逻辑的基础上，引进了对动作的认知。然后我们给出对动作认知的语义和特征公理，建立这种新类型逻辑的极小系统，并证明了其框架可靠性和框架完全性。

关键词：认知　动作　动态认知逻辑

中国分类号：B81　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：

一　动作和认知

动态认知逻辑最基本的概念是**动作**和**认知**。

在动态认知逻辑中，逻辑学家讨论最多的是**知道**，也有一些讨论**相信**。但我们希望考虑更一般的认知概念，并不局限于知道和相信。这样的研究类似模态逻辑对必然的研究。在模态逻辑中，不同的模态逻辑系统刻画不同的必然，这里我们也希望用不同的认知逻辑系统刻画不同的认知。实际上，人们对知道、相信等认知概念有不同的看法。我们可以说，某个认知逻辑系统刻画了具有某种性质的认知，有人认为它是知道也有人认为它不是知道，但这种争论与我们的研究无关。因此，我们的研究方法完全避免了不必要的词语之争。

我们用 **E** 表示一般的认知。和一般的认知逻辑类似，如果φ是命题，则用**E**φ表示“**认知φ为真**”，简称“**认知φ**”。

动作有很多方面的意义。动态认知逻辑只考虑动作的一个方面：**使一个状态到达另一个状态**。

动作一般是不确定的。例如，当前的状态是一个人在 6 层楼的底层，“上楼”这个动作就是不确定的，“上楼”这个动作发生后，这个人可以在 2 层，也可以在 3、4、5、6 层。这些状态都是“上楼”这个动作发生后的可能状态。一般地，一个动作发生后可能达到的状态称为这个动作发生后的**可能状态**。

动态认知逻辑只讨论在一个状态上**命题的真值**。所以，动态认知逻辑也可以认为**动作的作用**就是**改变命题的真值**。如果命题φ在动作α发生后的某个可能状态上真，我们就称命题φ是动作α的一个**可能结果**，如以上例子中的命题“这个人在 2 层”、“这个人在 3 层”等。如果命题φ在动作α发生后的任何可能状态中都真，我们就称命题φ是动作α的一个**必然结果**，记为$[\alpha]\varphi$，如以上例子中的命题“这个人不在底层”。

通常的动态认知逻辑把命题视为认知的对象。在本文中，我们将认知的对象扩充到动作。设α是一个动作，我们要讨论“**认知α的性质**”这样一种新命题，简称为“**认知α**”，记为 **E**α。注意：我们要讨论的是认知α的性质，而不是认知“α发生”这个事实命题。

虽然命题“α发生”和动作α有关，认知这样的命题也是一个值得研究的问题，但认知对象的类型仍然没有增加。而我们将“α的性质”作为认知对象，是一种新类型的对象。

从逻辑系统的角度看，α的性质是通常动态认知逻辑的元逻辑概念。我们的工作就是希望将这样一个元逻辑概念引入到通常的动态认知逻辑系统内部，从而扩充通常的动态认知逻辑系统。

在动态认知逻辑中，动作α的作用仅仅是改变命题的真值。所以，α的性质指的应该是：

收稿日期：2005－6－

基金项目：本文得到教育部人文社会科学重点研究基地项目（02JAZJD720017）的资助。

作者简介：刘壮虎，(1954-)，男，上海人，北京大学教授，博士生导师，北京书生科技有限公司书生研究中心客座研究员，主要从事哲学逻辑和人工智能逻辑的研究。

李小五(1955-)，男，河北涞水人，中山大学教授，博士生导师，北京书生科技有限公司书生研究中心客座研究员，主要从事哲学逻辑和人工智能逻辑的研究。

α如何改变命题的真值。

因此，认知α的性质指的应该是：

认知α如何改变命题的真值。

一旦认知α如何改变命题真值，一定也能认知到所有作为α的必然结果的命题。简单地说就是：

认知α一定能认知α的必然结果。

"认知α的必然结果"可以表示为$[\alpha]\varphi\to\mathbf{E}\varphi$，所以"认知$\alpha$一定能认知$\alpha$的必然结果"就可以表示为：

$\mathbf{E}\alpha\to([\alpha]\varphi\to\mathbf{E}\varphi)$。

这样，我们就将认知一个动作的性质与动作后的必然结果及认知命题的真值联系起来，从而将原来的元逻辑概念认知一个动作的性质引入系统内部。

二　形式语言

对动作认知的形式语言（简称 **DE** 语言）是通常的（单主体）动态认知逻辑的形式语言的扩充。

2.1 初始符号包括：

(1) **动作的集合 Act**。

Act 的元素称为动作，用α, β, γ等表示。

(2) **命题变项的集合 Pro**。

Pro 的元素称为命题变项，用 p, q, r 等表示。

(3) **联接词**：¬，∧。

¬称为否定，∧称为合取。

(4) **认知算子**：**E**。■

注意：**E** 的直观意义是一般的认知。可以是相信，可以是知道，也可以是其他的认知。

2.2 形成规则是：（用φ, ψ等表示公式）

(1) 命题变项是公式。

(2) 如果α是动作，则 $\mathbf{E}\alpha$是公式。

(3) 如果φ是公式，则$\neg\varphi$是公式。

(4) 如果φ, ψ是公式，则$(\varphi\wedge\psi)$是公式。

(5) 如果φ是公式，则 $\mathbf{E}\varphi$是公式。

(6) 如果φ是公式，则$[\alpha]\varphi$是公式。■

注意：(2)中的公式称为**对动作认知的公式**，它们的全体记为 **ActForm**。它们是 **DE** 语言新增加的公式，直观意义是"认知α"。

(1)和(2)都称为**原子公式**，它们不能由更简单的公式构成。

所有公式的集合记为**Form**。仅由命题变项和联接词组成的公式的全体记为$\mathbf{Form_0}$。$\mathbf{Form_0}$恰好是经典命题逻辑的公式的全体。

按通常的方式引入联结词∨、→和↔。为了叙述方便，我们规定**联结词的结合力**从左到右依次减弱：

¬，**E**，$[\alpha]$，∧，∨，→，↔。

我们也按通常的方式定义代入

$$\varphi(\psi_1/p_1,\cdots,\psi_n/p_n)$$

和置换$\varphi[\psi/\theta]$。

如通常，我们也有关于公式的结构归纳定义和结构归纳证明。

2.3 结构归纳定义　可以按以下方式对每个公式φ定义 $F(\varphi)$

(1) 任给命题变项 p，定义 $F(p)$；

(2) 任给动作α，定义 $F(\mathbf{E}\alpha)$；

(3) 由 $F(\varphi)$定义 $F(\neg\varphi)$；

(4) 由 $F(\varphi)$和 $F(\psi)$定义 $F(\varphi\wedge\psi)$；

(5) 任给动作α，由 $F(\varphi)$定义 $F([\alpha]\varphi)$；

(6) 由 $F(\varphi)$定义 $F(\mathbf{E}\varphi)$。■

2.4 结构归纳证明　可以用以下方式证明：任给公式φ，都有$\phi(\varphi)$。

(1) 任给命题变项 p，证明$\phi(p)$；

(2) 任给动作α，证明$\phi(\mathbf{E}\alpha)$；

(3) 由$\phi(\varphi)$证明$\phi(\neg\varphi)$；

(4) 由$\phi(\varphi)$和$\phi(\psi)$证明$\phi(\varphi\wedge\psi)$；

(5) 任给动作α，由$\phi(\varphi)$证明$\phi([\alpha]\varphi)$；

(6) 由$\phi(\varphi)$证明 $F(\mathbf{E}\varphi)$。■

三　框架和模型

令 X 是任一集合，我们用$\mathscr{P}(X)$表示 X 的**幂集**，并称

N：$X\to\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$

是 X 上的**邻域映射**。

任给 $x\in X$，$N(x)$（是 X 的子集族）称为 x 的**邻域类**，$N(x)$中的元素（是 X 的子集）称为 x 的**邻域**。任给 X 的子集 S，

$N^*(S) = \{x$：$S\in N(x)\}$，

称为 S 的**内部**。

3.1 定义　$K = \langle W, N, \mathbf{R}\rangle$。K 称为 **DE-框架**，如果

(1) W 是非空集合，

(2) N 是 W 上的邻域映射，满足：

2.1 单调性

如果 $S\in N(x)$且 $S\subseteq Q$，则 $Q\in N(x)$，

2.2 有穷交封闭性

如果 $S, Q\in N(x)$，则 $S\cap Q\in N(x)$。

(3) $\mathbf{R}=\{R_\alpha：\alpha\in\mathbf{Act}\}$，任给$\alpha\in\mathbf{Act}$，都有

$R_\alpha：W\to\mathscr{P}(W)$。[①] ■

DE-框架以后简称**框架**。

3.2 定义 $K=<W, N, \mathbf{R}>$是框架，

$V：\mathbf{Form}\to\mathscr{P}(W)$。

V 称为 K 上的**拟赋值**，如果

(1) $x\in V(\neg\varphi)$ 当且仅当 $x\notin V(\varphi)$，即

$V(\neg\varphi)=W\setminus V(\varphi)$。

(2) $x\in V(\varphi\wedge\psi)$当且仅当($x\in V(\varphi)$且 $x\in V(\psi)$)，即

$V(\varphi\wedge\psi)=V(\varphi)\cap V(\psi)$。

(3) $x\in V(\mathbf{E}\varphi)$ 当且仅当 $V(\varphi)\in N(x)$，即

$V(\mathbf{E}\varphi)=N^*(V(\varphi))=\{x：V(\varphi)\in N(x)\}$。

(4) $x\in V([\alpha]\varphi)$ 当且仅当 $R_\alpha(x)\subseteq V(\varphi)$，即

$V([\alpha]\varphi)=\{x：R_\alpha(x)\subseteq V(\varphi)\}$。■

从拟赋值的定义可得：

(5) $x\in V(\varphi\vee\psi)$当且仅当($x\in V(\varphi)$或 $x\in V(\psi)$)，即

$V(\varphi\vee\psi)=V(\varphi)\cup V(\psi)$。

(6) $x\in V(\varphi\to\psi)$ 当且仅当 (若 $x\in V(\varphi)$ 则 $x\in V(\psi)$)。因此

$V(\varphi\to\psi)=W$ 当且仅当 $V(\varphi)\subseteq V(\psi)$。

(7) $x\in V(\varphi\leftrightarrow\psi)$ 当且仅当 ($x\in V(\varphi)$当且仅当 $x\in V(\psi)$)。因此

$V(\varphi\leftrightarrow\psi)=W$ 当且仅当 $V(\varphi)=V(\psi)$。

拟赋值V限制在$\mathbf{Form_0}$上恰好是经典命题逻辑的赋值，所以任给重言式φ，都有$V(\varphi)=W$。

注意拟赋值对原子公式没有任何要求，实际上任何拟赋值都可以由原子公式上的指派通过归纳构造得到。

3.3 引理 $K=<W, N, \mathbf{R}>$是框架，任给σ：$\mathbf{Pro}\to\mathscr{P}(W)$，$\tau$：$\mathbf{ActForm}\to\mathscr{P}(W)$，都存在唯一的 K 上拟赋值 V，满足：

$V(p)=\sigma(p)$，任给 $p\in\mathbf{Pro}$，

$V(\mathbf{E}\alpha)=\tau(\mathbf{E}\alpha)$，任给 $\mathbf{E}\alpha\in\mathbf{ActForm}$。

证 归纳定义。

(1) 任给命题变项 p，定义 $V(p)=\sigma(p)$；

(2) 任给动作α，定义 $V(\mathbf{E}\alpha)=\tau(\mathbf{E}\alpha)$；

(3) $V(\neg\varphi)=W\setminus V(\varphi)$；

(4) $V(\varphi\wedge\psi)=V(\varphi)\cap V(\psi)$；

(5) $V([\alpha]\varphi)=\{x：R_\alpha(x)\subseteq V(\varphi)\}$；

(6) $V(\mathbf{E}\varphi)=N^*(V(\varphi))$，

则 V 是满足条件的拟赋值。■

由引理 3.3，只要给定了拟赋值在原子公式上的值，就唯一确定了这个拟赋值。

3.4 引理 K是框架，V是K上拟赋值，$p_1,\cdots, p_n$是n个不同的命题变项，$\varphi, \psi_1,\cdots, \psi_n$是公式，构造新的拟赋值$V'$如下：

$V'(p_1)=V(\psi_1)$，$\cdots$，$V'(p_n)=V(\psi_n)$，

$V'(\theta)=V(\theta)$，对其他原子公式θ，

则

$V(\varphi(\psi_1/p_1,\cdots,\psi_n/p_n))=V'(\varphi)$。

证 归纳证明，详细证明可参考模态逻辑中类似结果的证明。■

对于框架来说，更重要的是赋值。

3.5 定义 $K=<W, N, \mathbf{R}>$是框架，V 是 K 上的拟赋值。

如果 V 满足：对所有$\varphi\in\mathbf{Form}$ 和$\alpha\in\mathbf{Act}$，

$V(\mathbf{E}\alpha)\subseteq V([\alpha]\varphi\to\mathbf{E}\varphi)$，

就称 V 是 K 上的**赋值**，并称 $M=<K, V>$是**模型**。■

赋值对原子公式 $\mathbf{E}\alpha$是有要求的，它不能通过公式的归纳构造由原子公式的指派得到，它的存在性是需要证明的。

3.6 定理 $K=<W, N, \mathbf{R}>$是框架，任给σ：$\mathbf{Pro}\to\mathscr{P}(W)$，都存在的 K 上赋值 V，满足：任给 $p\in\mathbf{Pro}$，都有 $V(p)=\sigma(p)$。

证 取

τ：$\mathbf{ActForm}\to\mathscr{P}(W)$，$\tau(\mathbf{E}\alpha)=\{x：R_\alpha(x)\in N(x)\}$。由引理 3.3 得K上的拟赋值V。以下证明V是赋值。

任给动作α，任给 $x\in V(\mathbf{E}\alpha)$，都有

$R_\alpha(x)\in N(x)$，

所以任给公式φ，如果$x\in[\alpha]\varphi$，则$R_\alpha(x)\subseteq V(\varphi)$，由$R_\alpha(x)\in N(x)$和$N(x)$的单调性得

$V(\varphi)\in N(x)$，

由 $V(\mathbf{E}\varphi)$的定义得 $x\in V(\mathbf{E}\varphi)$，所以

$x\in V([\alpha]\varphi\to\mathbf{E}\varphi)$，

因此 $V(\mathbf{E}\alpha)\subseteq V([\alpha]\varphi\to\mathbf{E}\varphi)$。■

3.7 定义 $K=<W, N, \mathbf{R}>$是框架，φ是公式。

---

① 映射R_α：$W\to\mathscr{P}(W)$，可以看作是择类映射，本质上与W上的二元关系S_α一样。它们可互相定义：

任给映射R_α：$W\to\mathscr{P}(W)$，可定义W上的二元关系

$S_\alpha=\{<x, y>：y\in R_\alpha(x)\}$；

任给W上的二元关系S_α，可定义映射

R_α：$W\to\mathscr{P}(W)$，$R_\alpha(x)=\{y：<x, y>\in S_\alpha\}$。

(1) V 是 K 上赋值。如果 $V(\varphi) = W$，则称**模型<K, V>满足φ**，记为<K, V>$\models\varphi$。

(2) 如果任给 K 上赋值 V，都有<K, V>$\models\varphi$，则称**框架 K 满足φ**，记为 K$\models\varphi$。■

由定义可知: K$\models\varphi$ 当且仅当 (任给 K 上赋值 V，都有 $V(\varphi) = W$)。■

我们可以将满足的概念推广到框架类。Σ是框架类，φ是公式，如果任给 K∈Σ，都有 K$\models\varphi$，则称**框架类Σ满足φ**，记为Σ$\models\varphi$。

语义学角度的逻辑是满足某种语义条件的公式集，我们这里用"框架类满足"来定义逻辑。

3.8 定义 **L** 是一个公式集，如果存在框架类Σ，使得 **L** = {φ：Σ$\models\varphi$}，则称 **L** 是一个 **DE-逻辑**，简称**逻辑**。

这时 **L** 也称为由框架类Σ确定的逻辑。■

由全体框架类确定的逻辑称为**极小逻辑**，记为$\mathbf{L_0}$，即$\mathbf{L_0}$ = {φ：任给框架K，都有K$\models\varphi$}。

四 极小系统和可靠性

极小DE系统$\mathbf{DE_m}$定义如下：

公理（模式）：

(TA) 所有重言式的代入，

($\wedge_{\mathbf{E}}$A) $\mathbf{E}\varphi\wedge\mathbf{E}\psi\rightarrow\mathbf{E}(\varphi\wedge\psi)$，

(K_αA) $[\alpha](\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow([\alpha]\varphi\rightarrow[\alpha]\psi)$，

($\mathbf{E}\alpha$A) $\mathbf{E}\alpha\rightarrow([\alpha]\varphi\rightarrow\mathbf{E}\varphi)$，

推理规则：

(MP) 从$\varphi, \varphi\rightarrow\psi$得到$\psi$，

($RM_{\mathbf{E}}$) 从$\varphi\rightarrow\psi$得到$\mathbf{E}\varphi\rightarrow\mathbf{E}\psi$，

(RN_α) 从φ得到$[\alpha]\varphi$。■

$\mathbf{DE_m}$系统的形式证明和内定理定义如常。用$\vdash\varphi$表示φ是$\mathbf{DE_m}$的内定理，$\mathbf{DE_m}$的全体内定理的集合记为$\mathbf{Th(DE_m)}$。我们也用 $\nvdash\varphi$表示φ不是$\mathbf{DE_m}$的内定理。

引理 4.1 $\mathbf{DE_m}$的内定理。

(1) $\vdash\mathbf{E}(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\mathbf{E}\varphi\rightarrow\mathbf{E}\psi)$。

(2) $[\alpha]\varphi\wedge[\alpha]\psi\leftrightarrow[\alpha](\varphi\wedge\psi)$。■

引理 4.2 $\mathbf{DE_m}$的导出规则。

(1) 如果 $\vdash\varphi\rightarrow\psi$，则 $\vdash[\alpha]\varphi\rightarrow[\alpha]\psi$。

(2) 如果 $\vdash\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\rightarrow\varphi$，则

$\vdash[\alpha]\varphi_1\wedge\cdots\wedge[\alpha]\varphi_n\rightarrow[\alpha]\varphi$。■

$\mathbf{DE_m}$对于全体框架类是**可靠**的。证明方法如常，只需证明公理是可满足的，推演规则保持可满足性不变。

引理 4.3 K = <W, N, **R**>是框架。

(1) K$\models\varphi$，φ是重言式的代入。

(2) K$\models\mathbf{E}\varphi\wedge\mathbf{E}\psi\rightarrow\mathbf{E}(\varphi\wedge\psi)$。

(3) K$\models[\alpha](\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow([\alpha]\varphi\rightarrow[\alpha]\psi)$。

(4) K$\models\mathbf{E}\alpha\rightarrow([\alpha]\varphi\rightarrow\mathbf{E}\varphi)$。

证 任给 K 上赋值 V，对(1)-(4)中的公式θ，证明 $V(\theta) = W$。

(1) 令$\varphi = \psi(\psi_1/p_1,\cdots, \psi_n/p_n)$使得$\psi$是重言式。任给赋值V，由引理 3.4，存在拟赋值V′使得

$V(\psi(\psi_1/p_1,\cdots, \psi_n/p_n)) = V'(\psi)$。

显然$V'(\psi) = W$，所以$V(\psi(\psi_1/p_1,\cdots, \psi_n/p_n)) = W$。

(2) 如果 $x\in V(\mathbf{E}\varphi\wedge\mathbf{E}\psi)$，则 $x\in V(\mathbf{E}\varphi)$ 且 $x\in V(\mathbf{E}\psi)$，所以

$V(\varphi)\in N(x)$且 $V(\psi)\in N(x)$，

由有穷交封闭性得

$V(\varphi)\cap V(\psi)\in N(x)$，

即 $V(\varphi\wedge\psi)\in N(x)$，所以

$x\in V(\mathbf{E}(\varphi\wedge\psi))$，

因此 $V(\mathbf{E}\varphi\wedge\mathbf{E}\psi)\subseteq V(\mathbf{E}(\varphi\wedge\psi))$，即

$V(\mathbf{E}\varphi\wedge\mathbf{E}\psi\rightarrow\mathbf{E}(\varphi\wedge\psi)) = W$。

(3) 参考模态逻辑中类似结果的证明。

(4) 由赋值的定义得

$V(\mathbf{E}\alpha)\subseteq V([\alpha]\varphi\rightarrow\mathbf{E}\varphi)$，

所以 $V(\mathbf{E}\alpha\rightarrow([\alpha]\varphi\rightarrow\mathbf{E}\varphi)) = W$。■

引理 4.4 K = <W, N, **R**>是框架。

(1) 如果 K$\models\varphi$且 K$\models\varphi\rightarrow\psi$，则 K$\models\psi$。

(2) 如果 K$\models\varphi\rightarrow\psi$，则 K$\models\mathbf{E}\varphi\rightarrow\mathbf{E}\psi$。

(3) 如果 K$\models\varphi$，则 K$\models[\alpha]\varphi$。

证 任给 K 上赋值 V，假设对(1)-(3)前提中的公式η，都有 $V(\eta) = W$，证明对(1)-(3)结论中的公式θ，都有 $V(\theta) = W$。

(1) 参考模态逻辑中类似结果的证明。

(2) 如果 $x\in V(\mathbf{E}\varphi)$，则 $V(\varphi)\in N(x)$，由 $V(\varphi\rightarrow\psi) = W$ 得

$V(\varphi)\subseteq V(\psi)$，

再由 $V(\varphi)\in N(x)$和 $N(x)$的单调性得

$V(\psi)\in N(x)$，

所以 $x\in V(\mathbf{E}\psi)$，因此

$V(\mathbf{E}\varphi)\subseteq V(\mathbf{E}\psi)$，

即 $V(\mathbf{E}\varphi\rightarrow\mathbf{E}\psi) = W$。

(3) 因为 $V(\varphi) = W$，所以

任给$x\in W$，都有$R_\alpha(x)\subseteq V(\varphi)$，

由 $V([\alpha]\varphi)$的定义得

$x \in \mathrm{V}([\alpha]\varphi)$，

因此 $\mathrm{V}([\alpha]\varphi) = \mathrm{W}$。■

定理 4.5　可靠性定理

极小系统$\mathbf{DE_m}$对于全体框架类是可靠的。即任给$\mathbf{DE_m}$的内定理φ，任给框架K，都有$\mathrm{K} \models \varphi$，也就是$\mathbf{Th}(\mathbf{DE_m}) \subseteq \mathbf{L_0}$。

证　由引理 4.3 和 4.4，再对内定理证明的证明序列作归纳证明。■

五　典范模型和完全性

5.1 定义　u 是公式集。

(1) 如果任给$\varphi_1,\cdots,\varphi_n \in u$，都有

$$\nvdash \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n),$$

则称 u 是**一致集**。

(2) 如果任给$\varphi \in \mathbf{Form}$，都有$\varphi \in u$ 或$\neg\varphi \in u$，则称 u 是**极大集**。

(3) 如果 u 既是一致的又是极大的，则称 u 是**极大一致集**。

全体极大一致集的集合记为 $\mathbf{U}$。■

极大一致集有以下基本性质。

5.2 引理　u 是极大一致集。

(1) $\neg\varphi \in u$ 当且仅当 $\varphi \notin u$。

(2) $\varphi \wedge \psi \in u$ 当且仅当 $\varphi \in u$ 且$\psi \in u$。

(3) 如果$\varphi \in u$ 且 $\vdash \varphi \rightarrow \psi$，则$\psi \in u$。

(4) $\mathbf{Th}(\mathbf{DE_m}) \subseteq u$。■

5.3 引理

任何一致集可以扩充为极大一致集。■

5.4 引理

(1) 如果 $\nvdash \varphi$，则$\{\neg\varphi\}$是一致的。

(2) 任给 $\nvdash \varphi$，存在极大一致集 u，使得$\varphi \notin u$。

(3) 任给 $\nvdash \varphi \rightarrow \psi$，存在极大一致集 u，使得$\varphi \in u$ 且$\psi \notin u$。

(4) 如果$u \cup \{\neg\varphi\}$是一致的，则存在$\varphi_1,\cdots,\varphi_n \in u$，使得 $\vdash \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$。■

任给$\varphi \in \mathbf{Form}$，记$|\varphi| = \{u：u \in \mathbf{U}$ 且$\varphi \in u\}$。由引理 5.2 和引理 5.4 可得。

5.5 引理

(1) $|\neg\varphi| = \mathbf{U} \setminus |\varphi|$。

(2) $|\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi|$。

(3) $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ 当且仅当 $|\varphi| \subseteq |\psi|$。

(4) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ 当且仅当 $|\varphi| = |\psi|$。■

引理 5.2-5.5 的证明可参考模态逻辑中类似结果的证明。

5.6 定义　x, u 是公式集。

(1) $x^{-\alpha} = \{\varphi：[\alpha]\varphi \in x\}$。

(2) 如果$x^{-\alpha} \subseteq u$，则称u是x的α-伴随集。■

5.7 引理

(1) 如果$[\alpha]\varphi \notin x$，则存在 x 的α-伴随集 u，使得$\varphi \notin u$。

(2) $x \in |[\alpha]\varphi|$ 当且仅当 任给 x 的α-伴随集 u，都有 $u \in |\varphi|$。

证　(1) 先证$x^{-\alpha} \cup \{\neg\varphi\}$一致。

反证。如果$x^{-\alpha} \cup \{\neg\varphi\}$不一致，则由引理 5.4(4)得存在$\varphi_1,\cdots,\varphi_n \in x^{-\alpha}$，使得

$$\vdash \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi。$$

所以由引理 4.2(2)得

$$\vdash [\alpha]\varphi_1 \wedge \cdots \wedge [\alpha]\varphi_n \rightarrow [\alpha]\varphi。$$

由$\varphi_1,\cdots,\varphi_n \in x^{-\alpha}$得$[\alpha]\varphi_1,\cdots,[\alpha]\varphi_n \in x$，所以

$$[\alpha]\varphi_1 \wedge \cdots \wedge [\alpha]\varphi_n \in x,$$

因此$[\alpha]\varphi \in x$，矛盾。

由 5.3，存在极大一致集u，使得$x^{-\alpha} \cup \{\neg\varphi\} \subseteq u$，显然$\varphi \notin u$。

(2) 如果 $x \in |[\alpha]\varphi|$，则$[\alpha]\varphi \in x$，所以

任给 x 的α-伴随集 u，都有$\varphi \in u$，

因此

任给 x 的α-伴随集 u，都有 $u \in |\varphi|$。

如果 $x \notin |[\alpha]\varphi|$，则$[\alpha]\varphi \notin x$，由(1)得

存在 x 的α-伴随集 u，使得$\varphi \notin u$，

因此

存在 x 的α-伴随集 u，使得 $u \notin |\varphi|$。

■

5.8 引理　$\mathrm{N}：\mathbf{U} \rightarrow \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbf{U}))$　$\mathrm{N}(x) = \{\mathrm{S}：$存在$\mathbf{E}\varphi \in x$，使得$|\varphi| \subseteq \mathrm{S}\}$，则任给 $x \in \mathbf{U}$，都有

(1) 如果 $\mathrm{S} \in \mathrm{N}(x)$且 $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{Q}$，则 $\mathrm{Q} \in \mathrm{N}(x)$。

(2) 如果 $\mathrm{S}, \mathrm{Q} \in \mathrm{N}(x)$，则 $\mathrm{S} \cap \mathrm{Q} \in \mathrm{N}(x)$。

证　(1) 如果 $\mathrm{S} \in \mathrm{N}(x)$且 $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{Q}$，则由前者，存在 $\mathbf{E}\varphi \in x$，使得$|\varphi| \subseteq \mathrm{S}$，所以由 $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{Q}$ 得

存在 $\mathbf{E}\varphi \in x$，使得$|\varphi| \subseteq \mathrm{Q}$，

因此 $\mathrm{Q} \in \mathrm{N}(x)$。

(2) 如果 $\mathrm{S}, \mathrm{Q} \in \mathrm{N}(x)$，则存在 $\mathbf{E}\varphi, \mathbf{E}\psi \in x$，使得$|\varphi| \subseteq \mathrm{S}$ 且$|\psi| \subseteq \mathrm{Q}$。因为

$$\vdash \mathbf{E}\varphi \wedge \mathbf{E}\psi \rightarrow \mathbf{E}(\varphi \wedge \psi),$$

所以 $\mathbf{E}(\varphi \wedge \psi) \in x$，又

$$|\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi| \subseteq \mathrm{S} \cap \mathrm{Q},$$

因此 $\mathrm{S} \cap \mathrm{Q} \in \mathrm{N}(x)$。■

5.9 引理　$\mathrm{N}：\mathbf{U} \rightarrow \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbf{U}))$　$\mathrm{N}(x) = \{\mathrm{S}：$存在

$\mathbf{E}\varphi\in x$，使得$|\varphi|\subseteq S\}$，则任给公式ψ，都有

$$|\psi|\in N(x) \text{ 当且仅当 } \mathbf{E}\psi\in x。$$

证 如果$|\psi|\in N(x)$，则存在$\mathbf{E}\varphi\in x$，使得$|\varphi|\subseteq|\psi|$，所以$\vdash\varphi\to\psi$，因此$\vdash\mathbf{E}\varphi\to\mathbf{E}\psi$，由$\mathbf{E}\varphi\in x$得$\mathbf{E}\psi\in x$。

如果$\mathbf{E}\psi\in x$，由$|\psi|\subseteq|\psi|$得$|\psi|\in N(x)$。■

由引理 5.9，我们可以定义典范框架如下：

定义 5.10 K = <**U**, N, **R**>。K 称为**典范框架**，如果

(1) **U** = 全体极大一致集的集合，

(2) N：$W\to\mathscr{P}(\mathscr{P}(W))$ $N(x)=\{S$：存在$\mathbf{E}\varphi\in x$，使得$|\varphi|\subseteq S\}$，

(3) $\mathbf{R}=\{R_\alpha:\ \alpha\in\mathbf{Act}\}$，$R_\alpha$：$W\to\mathscr{P}(W)$ $R_\alpha(x)=\{u$：u是x的α-伴随集$\}$。■

定理 5.11 K = < **U**, N, **R**>是典范框架，V：$\mathbf{Form}\to\mathscr{P}(W)$ $V(\varphi)=|\varphi|$，则 V 是 K 上赋值。

证 先证明 V 是拟赋值。

(1) $V(\neg\varphi)=|\neg\varphi|=\mathbf{U}\setminus|\varphi|=\mathbf{U}\setminus V(\varphi)$。

(2) $V(\varphi\wedge\psi)=|\varphi\wedge\psi|=|\varphi|\cap|\psi|=V(\varphi)\cap V(\psi)$。

(3) $x\in V(\mathbf{E}\varphi)$ 当且仅当 $x\in|\mathbf{E}\varphi|$
当且仅当 $\mathbf{E}\varphi\in x$
当且仅当 $|\varphi|\in N(x)$
当且仅当 $V(\varphi)\in N(x)$。

(4) $x\in V([\alpha]\varphi)$ 当且仅当 $x\in|[\alpha]\varphi|$
当且仅当 任给 x 的α-伴随集u，都有$u\in|\varphi|$
当且仅当 $R_\alpha(x)\subseteq|\varphi|$
当且仅当 $R_\alpha(x)\subseteq V(\varphi)$。

再证明 V 是赋值。

任给公式φ，任给动作α，因为

$$\vdash\mathbf{E}\alpha\to([\alpha]\varphi\to\mathbf{E}\varphi),$$

所以

$$|\mathbf{E}\alpha|\subseteq|[\alpha]\varphi\to\mathbf{E}\varphi|,$$

因此$V(\mathbf{E}\alpha)\subseteq V([\alpha]\varphi\to\mathbf{E}\varphi)$。■

典范框架和以上赋值构成典范模型。

定义 5.12 K = <**U**, N, **R**>是典范框架，

$$V:\ \mathbf{Form}\to\mathscr{P}(\mathbf{U})\quad V(\varphi)=|\varphi|,$$

称 M = < K, V >是**典范模型**。■

用典范模型可以证明$\mathbf{DE_m}$的完全性。

定理 5.13 完全性定理

极小系统$\mathbf{DE_m}$对于全体框架类是完全的。即若任给框架K，都有$K\models\varphi$，则φ是$\mathbf{DE_m}$的内定理，也就是$\mathbf{L_0}\subseteq\mathbf{Th}(\mathbf{DE_m})$。

证 我们只须证：如果$\nvdash\varphi$，则存在框架 K，使得$K\nvDash\varphi$，

设$\nvdash\varphi$，则存在极大一致集u，使得$\varphi\notin u$，所以$u\notin|\varphi|$，因此$|\varphi|\neq\mathbf{U}$。

取典范模型 M = < K, V >，则$V(\varphi)=|\varphi|\neq\mathbf{U}$，所以< K, V >$\nvDash\varphi$，因此$K\nvDash\varphi$。■

参考文献：

[1] D. Harel, D. Kozen, J. Tiuryn. *Dynamic Logic*[M]. The MIT Press, 2000.

[2] 刘壮虎. 必然性的逻辑分析[J].《哲学研究》2002 年第 2 期.

Cognition of Actions

LIU Zhuang-Hu [1], LI Xiao-wu [2]

(1. Department of Philosophy, Peking University, Beijing 100871, China;

2. Institute of Logic and Cognition, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract：In this article, we introduce the cognition of actions on the basis of the commonly dynamic epistemic logics. We give the semantics and the character axiom of the cognition of actions, establish the minimum system of the new style of logic, and then prove the frame soundness and frame completeness of the system.

Key words：cognition; action; dynamic epistemic logic