常识推理的形式刻画

周北海[1]　毛翊[2]

(1. 中山大学逻辑与认知研究所，广东，广州，510275；北京大学哲学系，北京，100871；

2. 北京大学逻辑、语言与认知研究中心，北京，100871；美国 AXALTO 公司，美国，奥斯丁，78726)

摘要：基于极小逻辑 M 的常识推理形式刻画 ***D***(M, B)存在事实优先和传递性推理两个遗留问题。本文对常识推理中的事实优先和传递性推理问题进行了分析，特别是根据传递性推理的分析，提出了关于传递性推理的公理。在此基础上，通过对基础逻辑 M 的扩张给出了系统 DC 及其语义，证明了 DC 的完全性，得到了关于常用的常识推理的形式刻画 ***D***(DC, BF).

关键词：常识推理；集选语义；常识推理的基础逻辑

〔**中图分类号**〕B81　　〔**文献标识码**〕A　　〔**文章编号**〕1002–8862–(2005)增刊–0022–07

在[1]我们给出了一个关于常识推理的形式刻画——基础逻辑系统M以及推演的定义，验证了它可以通过尼克松菱形和企鹅原则等。同时指出，还有事实优先和涉及到传递的常识推理问题没有解决，这些将通过增加优先原则来解决[2]。本文给出M的扩张系统DC，解决上述两个遗留问题。

这里所说的形式刻画，记作***D***(S, P)，是一个由给定系统S和前提优先原则P决定的有序组集合，即***D***(S, P) = {(<Γ, $\succcurlyeq_P$>, α)：<Γ, $\succcurlyeq_P$> |~ S α }。其中 $\succcurlyeq_P$ 是Γ上满足一定优先原则的优先序。Γ上最基本的优先序，记作 $\succcurlyeq$，是具有传递性的二元关系。P是体现为优先序性质的优先原则。从 $\succcurlyeq$ 出发，我们定义了Γ上的严格优先序 $\succ$，Γ子集之间的优先序 $\geqslant$、严格优先序 $>$，任意Γ子集的后承集Cn(Δ)、一致后承集CN(Δ)，任意公式α的极小前提集等概念。特别地，对于 $\succcurlyeq_P$ 我们有 $>_P$。在这些概念的基础上，<Γ, $\succcurlyeq_P$> |~ Sα定义为：存在Δ ⊆ Γ，Δ是α的极小前提集，α ∈CN(Δ)；并且，对任意的Λ ⊆ Γ，如果Λ是¬α 的极小前提集，则Λ$>_P$Δ。设Γ是一个命题集，α是一个命题。Γ可以推出α，以下记作Γ / α。Γ和α 相应的命题形式集和命题形式记作Γ和α。***D***(S, P)可以通过某个推理

Γ / α，当且仅当，(<Γ, $\succcurlyeq_P$>, α)∈***D***(S, P)，

并且对任意的β，

如果并非Γ / β，则 (<Γ, $\succcurlyeq_P$>, β)∉***D***(S, P)。

作为一个具体的形式刻画，我们有

D(M, B) = {(<Γ, $\succcurlyeq_B$>, α)：<Γ, $\succcurlyeq_B$> |~ Mα}。

其中 M 是在古典逻辑的基础上增加公理模式

CK　$(\alpha>(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha>\beta)\rightarrow(\alpha>\gamma))$

CMP　$(\alpha\wedge(\alpha>\beta))>\beta$

和初始规则

RCEA 从$\beta\,\gamma$可得$(\beta>\alpha)\leftrightarrow(\gamma>\alpha)$（前件等值置换）

RN　从β可得$\alpha>\beta$（正常化规则）

RM　从$\alpha>\beta$可得$\alpha\wedge\gamma>\beta$（对定理的单调性）

得到的系统。

B是优先原则，也表现为优先序 $\succcurlyeq$ 的性质：对任意的公式集Γ，公式$\alpha, \beta, \gamma, \delta$，如果$\alpha>\gamma, \beta>\delta\in$Γ，又有$\alpha>\beta\in$Γ，那么$(\alpha>\gamma)\succcurlyeq(\beta>\delta)$。具有这一性质的优先序称为B-优先序，记作 $\succcurlyeq_B$。

由Γ上的B-优先序 $\succcurlyeq_B$我们得到了<Γ, $\succcurlyeq_B$> |~ Mα，这就是以极小常识推理逻辑系统M为基础、并且以B-优先关系为前提集结构优先序、从Γ到α的常

基金项目：本文得到教育部人文社会科学重点研究基地项目（02JAZJD720017）资助。

作者简介：周北海(1955－)，男，浙江乐清人，北京大学教授，博士生导师，中山大学逻辑与认知研究所兼职研究人员主要研究方向：符号逻辑。

毛翊（1970－），女，浙江奉化人，美国德州大学博士，主要研究方向：符号逻辑。

识推演。这个推演通过了除事实优先和涉及到传递性常识推理的其他例子。（以上严格定义及内容请参见[2]）

现在要解决新问题，需要在 M 和 B 这两个方面增加新内容，即扩张系统和增加优先原则。

1．事实优先推理

事实优先推理指的是如下例所示的这类推理。

(1) 鸟会飞，特威蒂是鸟，但特威蒂不会飞，所以，特威蒂不会飞。

其中“特威蒂是鸟”和“特威蒂不会飞”是事实命题，“鸟会飞”是常识命题。一方面从“鸟会飞”和“特威蒂是鸟”这两个命题出发，根据常识蕴涵分离，可以得到“特威蒂会飞”，另一方面，从前提中的“特威蒂不会飞”又可以推出“特威蒂不会飞”，于是得到矛盾的结论。在通常情况下，从这组给定前提，我们会得出“特威蒂不会飞”的结论。这表明在进行这样的推理时，我们会对这种情况加以调整，消除矛盾，得到合理的结论。这个自动调整所依据的原则就是由事实命题直接得到的结论要优先于由常识分离得到的结论。在二者有冲突时，优先得到的是前者。这个原则因此而称为“事实优先”。

从这个分析中可以看出，要实现事实优先推理，需要两个条件：(1) 要允许从 A 推出 A；(2) 在前提结构的优先序方面，要有事实优先原则。

在形式刻画方面，在 M 的基础上，从 A 推出 A，可以通过增加公理 **ID** $\alpha>\alpha$ 来实现。事实优先原则的形式表达是

F 如果$\alpha>\beta$, $\neg\beta\in\Gamma$，那$\neg\beta\succ(\alpha>\beta)$。

在优先序 B 的基础上增加上述条件后的优先序记作 BF。

在 ***D***(M, B)的基础上，我们通过对 M 增加公理 **ID**（此时得到新的系统 M+**ID**）和对优先序增加条件 F，可以得到相应的形式刻画 ***D***(M+**ID**, BF)。***D***(M+**ID**, BF)可以通过涉及到事实优先常识推理例(1)。验证如下。

例(1)的形式是 $\{p, p>q, \neg q\}\ /\neg q$。此时有 $\Gamma_1=\{\neg q, p, p>q\}$，$\Delta=\{\neg q\}$。根据优先序原则BF，有$\succcurlyeq\Gamma_1=\{<\neg q, p>q>\}$。因为有M**ID**有定理$\alpha>\alpha$，所以$\neg q\in \mathrm{CN}(\Delta)$。并且，对任意的 $\Gamma\subseteq\Gamma_1$，如果 $q\in\mathrm{CN}(\Gamma)$，则 Γ 中总得有 $p>q$。又$\neg q\succ_{\Gamma1} p>q$（因为只有 $\neg q\succcurlyeq_{\Gamma1} p>q$，而没有 $p>q\succcurlyeq_{\Gamma1}\neg q$,），所以总有$\Delta>_{\Gamma1}\Gamma$。

因此$<\Gamma_1, \succcurlyeq\Gamma_1>\ |\!\sim_{\mathrm{M+\mathbf{ID}}}\neg q$，且$<\Gamma_1, \succcurlyeq_{\Gamma1}>\ |\!\not\sim_{\mathrm{M+\mathbf{ID}}} q$。

2．传递性常识推理

关于传递性的常识推理有以下两类：

(2) 如果下雨则地湿，如果地湿则路滑，下雨，所以，路滑。

(3) 如果下雨则地湿，如果地湿则路滑，所以，如果下雨则路滑。

例(2)表明，从 $p>q, q>r$ 和 p 可以推出 r，是基于常识分离的推理，按此前给出的方法，可以形式化为

Tmp $(\alpha\wedge(\alpha>\beta)\wedge(\beta>\gamma))>\gamma$

例(3)表明，从 $p>q$, $q>r$ 可以推出 $p>r$，是从常识命题推出常识命题的推理，不是常识分离，因此，其中的推出关系“所以”不是依据常识分离的推出关系，不能用 > 表达。这是一种什么推出我们还不清楚，暂以 ~> 表示。于是，例(3)式的常识推理可以形式化为

Tran $((\alpha>\beta)\wedge(\beta>\gamma))\ \sim>(\alpha>\gamma)$

关于传递性推理还有以下例子。

(2′) 如果卡特在 1979 年去世,那么他就不会在 1980 年的总统竞选中失败；如果卡特在 1980 年的竞选中没有失败，那么里根就不会在 1981 年当总统。卡特在 1979 年去世。所以，里根不会在 1981 年当总统。

(3′) 如果卡特在 1979 年去世,那么他就不会在 1980 年的总统竞选中失败；如果卡特在 1980 年的竞选中没有失败，那么里根就不会在 1981 年当总统。所以，如果卡特在 1979 年去世，那么里根就不会在 1981 年当总统。

(2′′) 如果张生的工作量减少，则他的紧张感减小。如果张生没了工作，则他的工作量减少。他没了工作。所以，他的紧张感减小。

(3′′) 如果张生的工作量减少，则他的紧张感减小。如果张生没了工作，则他的工作量减少。如果张生的工作量减少并且张生没了工作，则他的紧张感减小。所以，如果张生没了工作，则他的紧张感减小。

其中(3′)和(3′′)是在条件句逻辑中就提出的问题[3][4]，(2′)和(2′′)是考虑到常识蕴涵分离推理后所作的相应改造。

从形式上看，例子(2)(2′)(2′′)完全相同，都是

Tmp，例子(3)(3′)(3′′)完全相同，都是 Tran。但是依据直观，(2′)(2′′)(3′)(3′′)都不是正确的推理，所以它们成了 Tmp 和 Tran 的反例。

再分析这里的“不正确”，又有不同的意义。其中(2′)作为例子并不自然，因为人们一般不会拿“卡特在 1979 年去世”作为前提去推理，但是(3′)没有这种不自然意义上的不正确，它只是说明 Tran 式的传递性不成立。这里暴露出(2′)和(3′)中的蕴涵是反事实条件蕴涵，不是常识蕴涵。如果只是从是否为常识蕴涵这个意义上就可以把(2′)和(3′)这样的反例排除掉，那倒是至少还可以接受 Tmp。但问题是还有(2′′)和(3′′)这样的例子，它们是反事实条件蕴涵还是常识蕴涵并不很清楚。作为日常的常识推理，看起来也还是成立的。于是，由于(2′′)，Tmp 不成立，以及由于(3′′)，关于常识蕴涵的 Tran 也不成立。

关于传递性的常识蕴涵推理在有些情况下成立，在有些情况下不成立，其中的规律何在，这就是我们在给出这类推理形式刻画时必须解决的问题。

对这个问题的解决可以从分析例子(3′′)开始。从该例的前提来看，“如果张生的工作量减少，则他的紧张感减小”和“如果张生没了工作，则他的工作量减少”分别都是成立的，但结论“如果张生没了工作，则他的紧张感减小”不成立。问题在于，这个使得张生紧张感减少的原因或前提是什么。如果是工作量减少，这成立，但如果是没了工作，就不成立。从常理来看，一般情况下工作量减少是会导致紧张感减少，这就是常识蕴涵。但是，如果又加上这个工作量减少是因为没了工作，那么当然不会有紧张感减少。这体现了常识推理的非单调性。由此可以得到关于传递性常识推理的一个基本观点：要使得关于传递性的常识分离推理成立，即从$\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$和α得到γ，其前提条件是α对于$\beta>\gamma$有单调性。这个单调性要求可以由$(\alpha\wedge\beta)>\gamma$来体现。这又等价于，在有$(\alpha\wedge\beta)>\gamma$的情况下，Tmp 和 Tran 成立。于是我们有

MTmp $((\alpha\wedge\beta)>\gamma)\rightarrow(\alpha\wedge(\alpha>\beta)\wedge(\beta>\gamma))>\gamma$

MTran $((\alpha\wedge\beta)>\gamma)\rightarrow(((\alpha>\beta)\wedge(\beta>\gamma))\mathord{\sim}\!>(\alpha>\gamma))$

MTran 可以区分(3)与(3′′)，保留前者，排除后者。因为“如果下雨并且地湿则路滑”成立，再与其他前提一起，我们可以推出“如果下雨则路滑”。而“如果张生的工作量减少并且张生没了工作，则他的紧张感减小”不成立，即使有其他前提，也不能推出“如果张生没了工作，则他的紧张感减小”。类似地，也可以排除例(3′)。但是因为我们不清楚 ~> 是一种什么蕴涵，而且它的后件是一个常识句，从常识分离推理的角度出发，我们在此不考虑推出常识句的推理，因此将取 **MTmp** 作为关于传递性的常识推理的公理，记作 **MTMP**。在系统 M 的基础上，由 **MTMP** 易得

DTMP $(((\alpha\wedge\beta)>\gamma)\wedge\alpha\wedge(\alpha>\beta)\wedge(\beta>\gamma))>\gamma$（关于传递性的分离）

这一公式是在传递性方面关于常识蕴涵分离推理的形式刻画。

在这一形式下，相对于例(2)和例(3)，我们有，

(2*) 如果下雨并且地湿则路滑。如果下雨则地湿。如果地湿则路滑。下雨。所以，路滑。

(3*) 如果张生的工作量减少并且张生没了工作，则他的紧张感减小。如果张生的工作量减少，则他的紧张感减小。如果张生没了工作，则他的工作量减少。他没了工作。所以，他的紧张感减小。

它们的形式都是 DTMP，但是，因为(3*)的前提不会同真，即“张生的工作量减少”对“如果张生的工作量减少，则他的紧张感减小”是非单调的，“如果张生的工作量减少并且张生没了工作，则他的紧张感减小”不成立，所以从这些前提事实上我们推不出结论“他的紧张感减小”，而(2*)则可以推出结论。这样，我们就排除了(3*)这样的反例。

以上分析是要说明，在日常推理中，我们暗中在根据是否有$(\alpha\wedge\beta)>\gamma$这样的直观在区分什么时候可以传递推理，什么时候不可以传递推理。将这一暗中用到的直观明确表示出来，在推出常识句的层次即 MTran，在常识蕴涵分离推理的层次即 **MTMP**。

至此可以考虑关于传递性推理的形式刻画问题。根据上面的说明，下面只在常识蕴涵分离推理的层次上考虑传递性推理形式刻画，即例(2)式推理的形式刻画。

在 M 的基础上增加公理 **MTMP** 得到的系统记为 M+**MTMP**。从上面的分析可以看出，在这个问题的讨论中，我们没有涉及到特别的优先序问题，因而可以得到相应的形式刻画 ***D***(M+**MTMP**, B)。下面验证 ***D***(M+**MTMP**, B)可以通过传递性推理例(2)。

首先应指出，根据上面的说明，所谓通过例(2)，实际上应该是通过(2*)。(2*)的形式是

$(p\wedge q)>r,\ p>q, q>r,\ p\ /\ r$。

此时有

$\Gamma 2^* = \{(p\wedge q)>r,\ p>q,\ q>r,\ p\}$，

$\succcurlyeq_{\Gamma 2^*} = \varnothing$，$\Delta = \Gamma 2^*$。

因为M+**MTMP**有定理**DTMP**，所以$r\in$CN(Δ)。且对任意的$\Gamma\subseteq\Gamma_1$，都没有$\neg r\in$CN(Γ)。最后，根据定义（即$<\Gamma, \succcurlyeq_P> |\!\sim_S \alpha$的定义），$<\Gamma 2^*, \succcurlyeq_{\Gamma 2^*}> |\!\sim_{M+\mathbf{MTMP}}\ r$。

3．常识推理形式刻画的总结

我们曾给出 11 个关于常识推理的例子[1]。排除推出常识命题的例(10)、(11)，从例(1)到例(9)都是基于常识蕴涵分离的推理，包括了常用的常识推理类型。***D***(M, B)可以通过除例(3)（事实优先）和例(9)（传递性）外的其他所有例子。根据上面的说明，***D***(M+**ID**, BF)还可以通过事实优先推理的例子。***D***(M+**MTMP**, B)还可以通过传递性推理的例子。不难看出，***D***(M+**ID**+**MTMP**, BF)可以通过这两个刻画下分别可通过的例子。其中M+**ID**+**MTMP**是对系统M增加公理**ID**和**MTMP**得到的系统。因此，***D***(M+ **ID** +**MTMP**, BF)应该是对这类推理的形式刻画。

所以说“应该是”，是因为我们还需要考察M+**ID**+**MTMP** 是否为一个合格的系统。首先，M+**ID**+**MTMP** 必须是一致的。作为逻辑研究来说，我们还需要知道它们在什么意义下是完全的。本文以下部分对这些问题给出回答。以下我们将系统 M+ **ID** + **MTMP** 称为 DC。

4．基础逻辑系统 DC 的语义

DC是M的扩张。在此我们仍使用同样的形式语言$\mathscr{L}$及集选语义[1][5]。

所有原子公式的集合记作 $P(\mathscr{L})$。所有$\mathscr{L}$公式的集合记作 $F(\mathscr{L})$。语法符号 p, q, r 等表示任意的原子公式，$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$等表示任意的公式。$\Gamma, \Phi$等表示任意的公式集。被定义符号有$\top$，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$。

集选语义由集选框架、模型以及真和有效性定义等组成，简述如下。

一个**集选框架**是一个二元组<W, ⊛>，其中 W 是非空集，⊛是集选函数，即 ⊛：$\mathscr{P}$(W)×$\mathscr{P}$(W)→$\mathscr{P}$(W)，满足：对 W 的任意子集 X, Y, Z, (1)如果 X⊆X′,，则 ⊛(X, Y)⊆ ⊛(X′, Y)；(2)如果对 X 中任意的 w 都有 ⊛({w}, Y)⊆Z, 则 ⊛(X, Y)⊆Z; (3)如果 ⊛(X, Y)⊆Z, 则 ⊛(W, X∩Y)⊆Z。一个**集选模型**是一个三元组<W, ⊛, σ>，其中<W, ⊛>是一个集选框架，σ 是一个从原子公式集到 W 的幂集的映射，即σ：P($\mathscr{L}$)→$\mathscr{P}$(W)。以下将集选框架简称为框架。集选模型类似。

设 $\mathfrak{M}$ = <W, ⊛, σ>，是任一模型，φ 是任一公式，$\|\varphi\|^{\mathfrak{M}}$是满足如下条件的集合：

(1) $\|\bot\|^{\mathfrak{M}} = \varnothing$

(2) $\|p\|^{\mathfrak{M}} = \sigma(p)$

(3) $\|\alpha\to\beta\|^{\mathfrak{M}} = (W - \|\alpha\|^{\mathfrak{M}})\cup\|\beta\|^{\mathfrak{M}}$

(4) $\|\alpha>\beta\|^{\mathfrak{M}} =$

$\bigcup\{X\subseteq W：⊛(X, \|\alpha\|^{\mathfrak{M}})\subseteq\|\beta\|^{\mathfrak{M}}\}$

设$\mathfrak{M}$是任一模型，X是$W^{\mathfrak{M}}$的任一非空子集，α是任一公式。α在X上为**真**，记作 $\mathfrak{M}\models_X\alpha$，当且仅当，$X\subseteq\|\alpha\|^{\mathfrak{M}}$。$\alpha$是**有效**的，记作 $\models\alpha$ ，当且仅当，对任意的模型$\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}\models_{W^{\mathfrak{M}}}\alpha$，又记作$\mathfrak{M}\models\alpha$。

以下我们将首先在集选语义中定义 DC 框架和 DC 集选模型，说明系统 DC 是可靠的，以及在最后证明，系统 DC 相对于 DC 框架类是完全的。

设<W, ⊛>是任一集选框架，X, Y, Z 是 W 的任意子集。令[X, Y] = $\bigcup$ {Z ⊆ W：⊛(Z, X) ⊆ Y}，称为**常识函数**。

定义 4.1　二元组<W, ⊛>是一个 DC 框架，当且仅当，<W, ⊛>是一个集选框架，并且满足以下条件：

(1) ⊛(X, Y) ⊆ Y

(2) 如果 ⊛(Z′, X∩Y) ⊆ Z，那么

⊛(Z′, X ∩[X, Y]∩[Y, Z]) ⊆ Z。

定义 4.2　三元组 $\mathfrak{M}$ = <W, ⊛, σ>是一个 DC 模型，当且仅当，$\mathfrak{M}$ 是一个集选模型，并且<W, ⊛>是 DC 框架。

按常规易证DC定理都是在DC模型上的有效公式。因此DC是可靠的[6]。

5．基础逻辑系统 DC 的完全性

我们将使用在M完全性证明中建立的方法[5][7]来证明DC的完全性。DC是在M基础上的扩张，其语义也是M语义的自然扩张，特别是一些只由M定理或规则得到的语义性质（命题，引理等），对DC语义仍然成立，我们可以直接引用。

定义 5.1　二元组<W_{DC}, $⊛_{DC}$>是DC**典范结构**，当且仅当，W_{DC} = {w：w是DC-极大一致集}，$⊛_{DC}$是一个函数，$⊛_{DC}$：$\mathscr{P}(W_{DC})\times\mathscr{P}(W_{DC})\to\mathscr{P}(W_{DC})$，满

足$\circledast_{DC}(X, |\alpha|_{DC}) = \bigcap\{|\beta|_{DC}: X \subseteq |\alpha>\beta|_{DC}\}$。其中$\alpha$和$\beta$是任意公式，$|\alpha|_{DC} = \{w\in W_{DC}: \alpha\in w\}$。

引理 5.1 $<W_{DC}, \circledast_{DC}>$是DC的典范结构。对任意的$(\alpha>\beta)$ ($\mathscr{L}$)，任意的$X \subseteq W_{DC}$，$X \subseteq |\alpha>\beta|_{DC}$，当且仅当，$\circledast_{DC}(X, |\alpha|_{DC}) \subseteq |\beta|_{DC}$。

该引理是 M 典范结构相应引理的直接推广。证明从略。

定义 5.2 α, β是任意公式，$[|\alpha|_{DC}, |\beta|_{DC}]_{DC} = \bigcup\{Z \subseteq W_{DC}: \circledast_{DC}(Z, |\alpha|_{DC}) \subseteq |\beta|_{DC}\}$

引理 5.2 α, β是任意公式。$[|\alpha|_{DC}, |\beta|_{DC}]_{DC} = |\alpha>\beta|_{DC}$

证 据引理 5.1 和定义 5.2，

$$|\alpha>\beta|_{DC} \subseteq [|\alpha|_{DC}, |\beta|_{DC}]。$$

反之，若有$w\notin|\alpha>\beta|_{DC}$，那么

$$\circledast_{DC}(\{w\}, |\alpha|_{DC}) \not\subseteq |\beta|_{DC}。$$

于是$w\notin[|\alpha|_{DC}, |\beta|_{DC}]$。■

引理 5.3 DC的典范结构$<W_{DC}, \circledast_{DC}>$上的$\circledast_{DC}$满足：对任意的公式$\alpha, \beta, \gamma$,

(1) $\circledast_{DC}(X, |\alpha|_{DC}) \subseteq |\alpha|_{DC}$；

(2) 如果$\circledast_{DC}(X, |\alpha\wedge\beta|_{DC}) \subseteq |\gamma|_{DC}$，则$\circledast_{DC}(X, |\alpha|_{DC} \cap |\alpha>\beta|_{DC} \cap |\beta>\gamma|_{DC}) \subseteq |\gamma|_{DC}$。

证 因为 DC 有定理 $\alpha>\alpha$，由此易得(1)。下证(2)。据引理 5.1，因为 DC 有定理 **DTMP**，所以有

$$|(\alpha\wedge\beta)>\gamma|_{DC} \subseteq |(\alpha\wedge(\alpha>\beta)\wedge(\ >\gamma))>\gamma|_{DC}。$$

这等价于：如果$X \subseteq |(\alpha\wedge\beta)>\gamma|_{DC}$)，则

$$X \subseteq |(\alpha\wedge(\alpha>\beta)\wedge(\beta>\gamma))>\gamma|_{DC}。$$

由引理 5.1，如果$\circledast_{DC}(X, |\alpha\wedge\beta|_{DC}) \subseteq |\gamma|_{DC}$，则

$$\circledast_{DC}(X, |\alpha\wedge(\alpha>\beta)\wedge(\beta>\gamma)|_{DC}) \subseteq |\gamma|_{DC},$$

即如果$\circledast_{DC}(X, |\alpha\wedge\beta|_{DC}) \subseteq |\gamma|_{DC}$，则

$$\circledast_{DC}(X, |\alpha|_{DC} \cap |\alpha>\beta|_{DC} \cap |\beta>\gamma|_{DC}) \subseteq |\gamma|_{DC}。$$

■

由此可以得到DC的一般框架完全性。对此我们还希望得到框架类完全性。用M完全性证明中建立的概念与方法[5]，这个问题的解决只需证：在DC极大一致集上得到的 Γ-典范框架$<W_\Gamma, \circledast_\Gamma>$是DC框架。因为已证$<W_\Gamma, \circledast_\Gamma>$是集选框架，所以对此又只需证：在框架$<W_\Gamma, \circledast_\Gamma>$上，

(1) $\circledast_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) \subseteq Y_\Gamma$，

(2) 如果$\circledast_\Gamma(Z_{\Gamma'}, X_\Gamma\cap Y_\Gamma)\subseteq Z_\Gamma$，那么$\circledast_\Gamma(Z_{\Gamma'}, X_\Gamma\cap[X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma\cap[Y_\Gamma, Z_\Gamma]_\Gamma)\subseteq Z_\Gamma$。

设 α和β是任意的公式，$\sim\alpha$是**单层否定公式**，当且仅当，$\sim\alpha = \beta$，如果α是$\neg\beta$；否则，$\sim\alpha = \neg\beta$ 。

设 Γ 是任意的公式集。称**Γ对单层否定封闭**，如果$\alpha\in\Gamma$，则$\sim\alpha\in\Gamma$。CCL(Γ)是Γ的**部件闭包**，当且仅当，CCL(Γ)是含有所有Γ公式的子公式并且对单层否定封闭的公式集。（子公式按通常定义。）A是Γ上的**受限S极大一致集**，当且仅当，A是满足以下三个条件的集合：(1) A ⊆ CCL(Γ)；(2) A是S一致的；(3) 如果A ⊆ B，B ⊆ CCL(Γ)，B是S一致的，则A = B。其中S是任一形式系统。本文限于讨论DC，所以以下只涉及受限DC极大一致集，简称受限极大一致集。以后用W_Γ表示任意的公式集Γ上的所有受限极大一致集的集合。

设Γ是任意的有穷非空公式集。对任意的

$A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\in W_\Gamma$，$X = \{A_1, \ldots, A_m\}\subseteq W_\Gamma$，

定义公式φ_A，φ_X 如下：

$\varphi_A = \alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n$

$\varphi_X = \varphi_{A1}\vee\ldots\vee\varphi_{Am}$，如果X非空；否则，$\varphi_X = \bot$。

定义函数 f，g，g^* 如下：

f：$W_{DC}\rightarrow W_\Gamma$，满足如果$W_\Gamma \subseteq w_{DC}$，则任给$w_{DC}\in W_{DC}$，有$f(w_{DC}) = W_\Gamma$。

g：$\mathscr{P}(W_{DC})\rightarrow\mathscr{P}(W_\Gamma)$，满足任给$X_{DC}\in\mathscr{P}(W_{DC})$，有$g(X_{DC}) = \{f(w_{DC}): w_{DC}\in X_{DC}\}$。

g^*：$\mathscr{P}(W_\Gamma)\rightarrow\mathscr{P}(W_{DC})$，满足任给$X_\Gamma\in\mathscr{P}(W_\Gamma)$，$g^*(X_\Gamma) = \{w_{DC}\in W_{DC}$：存在$X_\Gamma\in X_\Gamma$，$f(w_{DC}) = X_\Gamma\}$。

命题 5.1 设Γ是任意有穷公式集，X_{DC}和X'_{DC}是W_{DC}的任意子集，X_Γ 和X'_Γ是W_Γ的任意子集，α是CCL(Γ)中的任意公式。函数g和g^*有如下性质：

(1) 如果$X_{DC} \subseteq X'_{DC}$，则 $g(X_{DC}) \subseteq g(X'_{DC})$。

(2a) 如果$X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$，则$g^*(X_\Gamma) \subseteq g^*(X'_\Gamma)$。

(3a) $g(g^*(X_\Gamma)) \subseteq X_\Gamma$

(2b) 如果$g^*(X_\Gamma) \subseteq g^*(X'_\Gamma)$ ，则$X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$。

(3b) $X_\Gamma \subseteq g(g^*(X_\Gamma))$

(2) $X_\Gamma \subseteq X'_\Gamma$，当且仅当，$g^*(X_\Gamma) \subseteq g^*(X'_\Gamma)$

(3) $g(g^*(X_\Gamma)) = X_\Gamma$

(4) $X_{DC} \subseteq g^*(g(X_{DC}))$

(5) $g^*(X_\Gamma\cap X'_\Gamma) = g^*(X_\Gamma)\cap g^*(X'_\Gamma)$

(6) $g^*(X_\Gamma) = |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}$

(7) $g(|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) = g(g^*(X_\Gamma)) = X_\Gamma$

(8) $W_{DC} = g^*(W_\Gamma) = |\varphi W_\Gamma|_{DC}$

(9) $|\varphi_{X\Gamma}|_{DC} \cap |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC} = |\varphi_{X\Gamma\cap Y\Gamma}|_{DC}$

(10) $g^*(|\alpha|_\Gamma) = |\alpha|_{DC}$

(11) $g(|\alpha|_{DC}) = g(g^*(|\alpha|_\Gamma)) = |\alpha|_\Gamma$

（该命题即M完全性证明中的命题 2.3[5]，因为

只用到M的性质，因此对DC仍然成立。）

定义 5.3 Γ是任意公式集。二元组$<W_\Gamma, \circledast_\Gamma>$是**DC-Γ-典范框架**，当且仅当，$W_\Gamma$ = 是Γ上的受限极大一致集的集合，$\circledast_\Gamma$: $\mathscr{P}(W_\Gamma)\times\mathscr{P}(W_\Gamma)\rightarrow\mathscr{P}(W_\Gamma)$是满足以下条件的函数：对任意的$X_\Gamma$和$Y_\Gamma \subseteq W_\Gamma$，

$\circledast_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) = g(\circledast_{DC}(|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}))$。

在此基础上，增加赋值σ_Γ：任给变元p，$\sigma_\Gamma(p) = \{W_\Gamma\in W_\Gamma: p\in W_\Gamma\}$，可以得到**DC- Γ-典范模型**。

命题 5.2 设Γ是任意有穷非空公式集。DC-Γ-典范框架$<W_\Gamma, \circledast_\Gamma>$是DC框架。

该命题是M完全性证明中相应引理（Γ-典范框架$<W_\Gamma, \circledast_\Gamma>$是M-框架）的推广。证明从略。

定义 5.4 $[X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma =$

$\bigcup\{Z_\Gamma \subseteq W_\Gamma: \circledast_\Gamma(Z_\Gamma, X_\Gamma) \subseteq Y_\Gamma\}$

引理 5.4 如果 $\circledast\Gamma(Z\Gamma, X_\Gamma) \subseteq Y\Gamma$，则任$W_\Gamma\in Z_\Gamma$，$\circledast_\Gamma(\{W_\Gamma\}, X_\Gamma) \subseteq Y_\Gamma$。

证 设$W_\Gamma \in Z_\Gamma$。由 $\varphi_{X\Gamma}$的定义，可得

$|\varphi_{\{W\Gamma\}}|_{DC} \subseteq |\varphi_{Z\Gamma}|_{DC}$。

由命题 5.2 和定义 4.1，有

$\circledast_{DC}(|\varphi_{\{W\Gamma\}}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC})\subseteq\circledast_{DC}(|\varphi_{Z\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC})$。

再由命题 5.1(1)，可得

$g(\circledast_{DC}(|\varphi_{\{W\Gamma\}}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}))\subseteq g(\circledast_{DC}(|\varphi_{Z\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}))$，

即

$\circledast_\Gamma(\{W_\Gamma\}, X_\Gamma) \subseteq \circledast_\Gamma(Z_\Gamma, X_\Gamma)$。

因为$\circledast_\Gamma(Z_\Gamma, X_\Gamma) \subseteq Y_\Gamma$，所以$\circledast_\Gamma(\{W_\Gamma\}, X_\Gamma) \subseteq Y_\Gamma$。■

引理 5.5 $W_\Gamma \in[X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma$，当且仅当，

$\circledast_{DC}(|\varphi\{W_\Gamma\}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) \subseteq|\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。

证 设$\circledast_{DC}(|\varphi_{\{W\Gamma\}}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) \subseteq |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。由定义，$W_\Gamma\in[X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma$。

设$W_\Gamma\in[X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma$。由定义，

存在Z_Γ，$W_\Gamma\in Z_\Gamma$，且$\circledast_\Gamma(Z_\Gamma, X_\Gamma) \subseteq Y_\Gamma$。

再由引理 5.4，

$\circledast_\Gamma(\{W_\Gamma\}, X_\Gamma) \subseteq Y_\Gamma$，

即$\circledast_{DC}(|\varphi_{\{W\Gamma\}}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) \subseteq|\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。■

引理 **5.6** $w\in|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}$，当且仅当，$g(\{w\}) \subseteq X_\Gamma$。

证 据$\varphi_{X\Gamma}$定义，$w\in|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}$，当且仅当，有$W_\Gamma\in X_\Gamma$，$W_\Gamma \subseteq w$。

再据g 定义，当且仅当，$g(\{w\}) \subseteq X_\Gamma$。■

引理 5.7 $g(|\varphi_{X\Gamma} > \varphi_{Y\Gamma}|_{DC}) \subseteq[X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma$。

证 设$W_\Gamma\notin[X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma$。由引理 5.5，当且仅当，

$\circledast_{DC}(|\varphi\{W_\Gamma\}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) \not\subseteq |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。

由引理 5.1，可得

$|\varphi\{W_\Gamma\}|_{DC} \not\subseteq |\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$，

即有

(1) $w\in|\varphi\{W_\Gamma\}|_{DC}$，(2)$w \notin|\varphi_{X\Gamma}> \varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。

由(2)，据引理 5.1，有

$\circledast_{DC}(\{w\}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) \not\subseteq |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。

因此有

(3) $f(w)\notin\{f(x): \circledast_{DC}(\{x\}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) \subseteq |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}\}$。

据 g 的定义，

$g([|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}]_{DC})$

$= \{f(x): x\in[|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}]_{DC}\}$。

由引理 5.1，$w\in|\varphi_{X\Gamma} > \varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$，当且仅当，

$\circledast_{DC}(\{w\}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) \subseteq |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。

因此，

$g([|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}]_{DC})$

$= \{f(x): \circledast_{DC}(\{x\}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) \subseteq |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}\}$。

既然(3)，于是有

$f(w)\notin g([|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}]_{DC})$。

又因为(1)，由定义有，

任$w\in|\varphi_{\{W\Gamma\}}|_{DC}, f(w) = W_\Gamma$，

于是，

$W_\Gamma\notin g([|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}]_{DC})$。

由引理 5.2，

$g([|\varphi_{X\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}]_{DC}) = g(|\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC})$，

所以，$W_\Gamma\notin g(|\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC})$。■

引理 5.8 $|\varphi_{[X\Gamma, Y\Gamma]}|_{DC} = |\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。

证 证 $|\varphi_{[X\Gamma, Y\Gamma]}|_{DC} \subseteq |\varphi_{X\Gamma} > \varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。设$w$是$W_{DC}$中任意元素，$w\in|\varphi_{[X\Gamma, Y\Gamma]}|_{DC}$。由引理 5.6，可得

$g(\{w\}) \subseteq [X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma$。

由定义 5.4，定义 5.3，有

$g(\circledast_{DC}(|\varphi_{g(\{w\})}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC})) \subseteq Y_\Gamma$。

根据命题 5.1 (2)，有

$g^*(g(\circledast_{DC}(|\varphi_{g(\{w\})}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}))) \subseteq g^*(Y_\Gamma)$。

再据命题 5.1 (4)、(6) 有

$\circledast_{DC}(|\varphi_{g(\{w\})}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}) \subseteq |\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。

根据引理 5.1，可得

$|\varphi g(\{w\})|_{DC} \subseteq |\varphi_{X\Gamma}> \varphi_{Y\Gamma}|_{DC}$。

据φ_X定义，$w\in|\varphi g(\{w\})|_{DC}$。所以，$w\in|\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Z\Gamma}|_{DC}$。

证$|\varphi_{X\Gamma}> \varphi_{Y\Gamma}|_{DC} \subseteq |\varphi_{[X\Gamma, Y\Gamma]}|_{DC}$。由引理 5.7，命题 5.1(2)，可得

$g^*(g(|\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC})) \subseteq g^*([X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma)$。

再由命题 5.1(6)，有

$g^*(g(|\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC})) \subseteq |\varphi_{[X\Gamma, Y\Gamma]}|_{DC}$，

又由命题 5.1(4)，有

$$|\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC} \subseteq g^*(g(|\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}))。$$

于是，$|\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC} \subseteq |\varphi_{[X\Gamma, Y\Gamma]}|_{DC}$。■

定理 5.1 设Γ是有穷公式集，W_Γ 是DC极大一致集。在Γ-典范框架$<W_\Gamma, \circledast_\Gamma>$上，对$W_\Gamma$的任意子集 $X_\Gamma, Y_\Gamma, Z_\Gamma, Z'_\Gamma$,

(1) $\circledast_\Gamma(X_\Gamma, Y_\Gamma) \subseteq Y_\Gamma$；

(2) 如果 $\circledast_\Gamma(Z'_\Gamma,, X_\Gamma\cap Y_\Gamma)\subseteq Z\Gamma$，那么 $\circledast_\Gamma(Z'_\Gamma, X_\Gamma\cap[X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma\cap[Y_\Gamma, Z_\Gamma]_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$。

证 由 $\circledast_\Gamma$的定义，命题 5.1(1)和引理 5.3(1)可得(1)。下证(2)。

假设 $\circledast_\Gamma(Z'_\Gamma, X_\Gamma\cap Y_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma$。据定义 5.3，有

$$g(\circledast_{DC}(|\varphi_{Z'\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma\cap Y\Gamma}|_{DC})) \subseteq Z_\Gamma。$$

由命题 5.1 (2)、(4)、(6)，有

$$\circledast_{DC}(|\varphi_{Z'\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma\cap Y\Gamma}|_{DC}) \subseteq |\varphi_{Z\Gamma}|_{DC}。$$

由命题 5.1 (9)，又有

$$\circledast_{DC}(|\varphi_{Z'\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}\cap|\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}) \subseteq |\varphi_{Z\Gamma}|_{DC}。$$

根据引理 5.3 (2)，由此可得

$$\circledast_{DC}(|\varphi_{Z'\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}\cap|\varphi_{X\Gamma}>\varphi_{Y\Gamma}|_{DC}\cap|\varphi_{Y\Gamma}>\varphi_{Z\Gamma}|_{DC}) \subseteq |\varphi_{Z\Gamma}|_{DC}。$$

再由引理 5.8，可得

$$\circledast_{DC}(|\varphi_{Z'\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma}|_{DC}\cap|\varphi_{[X\Gamma, Y\Gamma]}|_{DC}\cap|\varphi_{[Y\Gamma, Z\Gamma]}|_{DC}) \subseteq |\varphi_{Z\Gamma}|_{DC}。$$

由命题 5.1 (1), (9)，有

$$g(\circledast_{DC}(|\varphi_{Z'\Gamma}|_{DC}, |\varphi_{X\Gamma\cap[X\Gamma, Y\Gamma]\cap[Y\Gamma, Z\Gamma]}|_{DC})) \subseteq g(|\varphi_{Z\Gamma}|_{DC})。$$

最后，根据定义 5.3 和命题 5.1 (7)，可得

$$\circledast_\Gamma(Z'_\Gamma, X_\Gamma\cap[X_\Gamma, Y_\Gamma]_\Gamma\cap[Y_\Gamma, Z_\Gamma]_\Gamma) \subseteq Z_\Gamma。■$$

至此我们证明的系统 DC 的完全性。根据前面的说明，以 DC 为基础逻辑得到的 ***D***(DC, BF)是对我们常用的常识推理的形式刻画。

参 考 文 献

[1] 周北海，毛翊. 一个关于常识推理的基础逻辑 [J]，哲学研究，2003 年增刊，1-10。

[2] 周北海，毛翊. 常识推演 ——常识推理的形式刻画 [J]，哲学动态，2004 年增刊，pp.1-8。

[3] Donald Nute and Charles B. Cross, Conditional Logic, in Handbook of Philosophical Logic, 2nd Edition, Volume 4, Edited by D.M. Gabbay and F. Guenthner, Kluwer Academic Publshers, Dordresht, 2002. p.8

[4] Donald Nute, Topics in Conditional Logic, Reidel, Dordrecht, 1980. pp.17-18

[5] 周北海，毛翊. 常识推理基础逻辑系统 M 的完全性 [J/OL]，逻辑与认知，2004 年第 1 期。

[6] 周北海. 模态逻辑导论 [M]，北京大学出版社，1996 年出版。p.95，pp. 133-134。

[7] Mao, Y. A Formalism for Nonmonotonic Reasoning Encoded Generics [D]. Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin, 2003.

the formal characterization for default reasoning

Zhou Beihai[1] *Mao Yi*[2]

(1. Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen Univ., Guangzhou, 510275, China; Department of Philosophy, Peking Univ., Beijing 100871, China; 2. Center for Logic, Language and Cognition, Peking University; AXALTO Inc, Austin, TX 78712, U.S.A.)

Abstract： There were two remaining problems in our previous paper that discussed the formal characterization ***D***(M, B) of default reasoning based on a minimal system M for this type of reasoning: the precedence of facts over default conclusions and transitivity. In this paper, we analyze these two problems and provide solutions to them. We extend system M to system DC by adding two axioms that are dedicated for managing transitivity and face precedence, respectively. The semantics is updated to match up with system DC and its completeness is proved w.r.t. the updated semantics. Based on system DC, the improved characterization ***D***(DC, BF) is established.

Key words： default reasoning; set selection semantics; basic logic for default reasoning