一个关于意图后承的逻辑

周北海　刘壮虎

(北京大学哲学系，北京　100871)

摘要：对意图后承的逻辑刻画是人工智能研究中的重要问题。本文在陈小平研究的基础上，构造了一个画意图后承的逻辑 **ICL**。在 **ICL** 中讨论意图蕴涵和意图后承的性质，并证明了 **ICL** 的可靠性和完全性。

关键词：意图后承，意图蕴涵，认知赋值，认知模型，完全范式，混合范式

〔中图分类号〕B81　　〔文献标识码〕A　　〔文章编号〕1002–8862–(2001)增刊–0001–06

陈小平[1]提出了一个意图后承的概念。本文对此概念作了一些改动，并在此基础上，给出一个刻画意图后承的逻辑 **ICL**。

1　ICL 的基础

ICL 以古典命题逻辑为基础。除了常用的赋值(本文称为古典赋值)，重言式、矛盾式、逻辑等值(本文称为古典等值)外，还需要以下一些记号和概念。

α中出现的全体命题变项的集合记作$[\alpha]$。

定义 1.1　非退化　设α是古典公式。称α是非退化的，如果α既不是矛盾式，也不是重言式。

显然，α 是非退化的，当且仅当，既存在古典赋值 V，使得 $V(\alpha) = t$，也存在古典赋值 V，使得 $V(\alpha) = f$。

定理 1.1　如果β和φ都是非退化的，且$[\beta]\cap[\varphi] = \varnothing$，则$\beta(\varphi / p)$也是非退化的。■

定义 1.2　强等值　设α, β是古典公式。称α和β强等值，如果α和β古典等值且$[\alpha] = [\beta]$。

定理 1.2　如果φ和ψ强等值，则

(1) α和$\alpha[\psi / \varphi]$也强等值。

(2) α是非退化的，当且仅当，$\alpha[\psi / \varphi]$是非退化的。■

定义 1.3　下反对性质　设$\varphi_1,\cdots, \varphi_k$是k个古典公式。称$\varphi_1,\cdots,\varphi_k$有下反对性质，如果任给古典赋值 V，$V(\varphi_1),\cdots, V(\varphi_k)$中至多只有一个为f。

记$\wedge_{i\neq j}(\varphi_i\vee\varphi_j)$为所有形如$\varphi_i\vee\varphi_j$ $(1\leq i<j\leq k)$的析取式的合取。

定理 1.3　$\varphi_1,\cdots,\varphi_k$是k个古典公式。$\varphi_1,\cdots,\varphi_k$有下反对性质，当且仅当，$\wedge_{i\neq j}(\varphi_i\vee\varphi_j)$是重言式。■

2　ICL 的形式语言和语义解释

ICL的形式语言是古典命题逻辑形式语言**P**的扩张。初始符号包括：(1) 命题变项　$\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n,\cdots\cdots$；(2) 联结词　¬、∧、∨；(3) 意图蕴涵　⇒；(4) 括号。

形成规则有两个。

P-公式的形成规则：(1) 命题变项是 **P**-公式；(2) 如果α是 **P**-公式，则$\neg\alpha$是 **P**-公式；(3) 如果α, β是 **P**-公式，则$(\alpha\wedge\beta)$，$(\alpha\vee\beta)$是 **P**-公式；

意图蕴涵式形成规则：如果α, β是 **P**-公式，则$\alpha\Rightarrow\beta$是意图蕴涵式。

全体 **P**-公式的集合记为 Form(**P**)。**P**-公式和古典公式一样，所以可以使用重言式、矛盾式、强等值、下反对性质等。

和古典命题逻辑一样定义联结词→和↔、定义代入$\alpha(\varphi / p)$和置换$\alpha[\psi / \varphi]$。

我们将通过定义关于**P**-公式的认知赋值和认知模型等概念给出关于意图蕴涵式的有效性概念。并

作者简介：周北海 (1955–)，男，浙江杭州市人，哲学博士，北京大学哲学系教授，教育部逻辑与认知研究所兼职研究员。主要研究方向：符号逻辑。

刘壮虎 (1954–)，男，上海市人，哲学硕士，北京大学哲学系教授。主要研究方向：符号逻辑。

通过有效的意图蕴涵式来刻画意图后承。

定义 2.1 认知赋值 V 是 Form(**P**)到{t, f, u}的映射。称 V 是一个认知赋值，如果 V 满足以下条件：

$$(1)\ \mathrm{V}(\neg\alpha) = \begin{cases} \mathrm{t} & \mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{f} \\ \mathrm{f} & \mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{t} \\ \mathrm{u} & \mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{u} \end{cases};$$

$$(2)\ \mathrm{V}(\alpha\wedge\beta) = \begin{cases} \mathrm{t} & \mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{t}\text{ 且 }\mathrm{V}(\beta) = \mathrm{t} \\ \mathrm{f} & (\mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{t}\text{ 且 }\mathrm{V}(\beta) = \mathrm{f})\text{或}(\mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{f}\text{ 且 }\mathrm{V}(\beta) = \mathrm{t}) \\ \mathrm{u} & \mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{u}\text{ 或 }\mathrm{V}(\beta) = \mathrm{u} \end{cases}$$

$$(3)\ \mathrm{V}(\alpha\vee\beta) = \begin{cases} \mathrm{t} & (\mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{t}\text{ 且 }\mathrm{V}(\beta) = \mathrm{f})\text{或}(\mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{f}\text{ 且 }\mathrm{V}(\beta) = \mathrm{t}) \\ \mathrm{f} & \mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{f}\text{ 且 }\mathrm{V}(\beta) = \mathrm{f} \\ \mathrm{u} & \mathrm{V}(\alpha) = \mathrm{u}\text{ 或 }\mathrm{V}(\beta) = \mathrm{u} \end{cases}$$

全体认知赋值记为Π。

任何古典赋值也是认知赋值，是在任何命题变项上都不取 u 值的认知赋值。

认知赋值 V 由 V 在命题变项上的值所确定，所以只要给定了 V 在命题变项上的值，也就给定了 V。并且 V(α)由 V 在[α]中的命题变项上的值所确定，所以有以下定理：

定理 2.1 设α是任意的 **P**-公式，V 和 V′是任意的认知赋值，如果任给 p∈[α]，都有 V(p) = V′(p)，则 V(α) = V′(α)。■

定义 2.2 认知模型 V 是一个认知赋值，α是 **P**-公式。称 V 是α的一个认知模型，如果 V(α) ≠ u。

由认知赋值的定义可知，如果 V 是α的认知模型，则 V 在α上的性质和古典赋值基本一样的，特别地有：

定理 2.2 α是 **P**-公式，V 是认知模型。

(1) V(¬α) = t，当且仅当，V(α) = f。

(2) V($\alpha\wedge\beta$) = t，当且仅当，V(α) = t 且 V(β) = t。

(3) V($\alpha\vee\beta$) = t，当且仅当，V(α) = t 或 V(β) = t。

(4) 若 V(β) = t 且 V($\beta\rightarrow\alpha$) = t，则 V(α) = t。■

定义 2.3 认知抽象关系 认知抽象关系≤是Π上的一个满足以下条件的二元关系：

V≤V′，当且仅当，任给命题变项 p，都有如果 V(p) ≠ u，则 V(p) = V′(p)。

将 V≤V′且 V ≠ V′记为 V<V′。

由认知赋值和认知模型的定义直接可得：

定理 2.3 α是任意的 **P**-公式，

(1) V 是α的认知模型，任给认知赋值 V′，如果 V≤V′，则 V(α) = V′(α)。

(2) α的任何认知模型都能扩充为古典赋值，即任给α的认知模型 V，都存在古典赋值 V*，使得 V≤V*，因此 V(α) = V*(α)。■

定义 2.4 极小认知模型 V 是认知赋值，α是 **P**-公式。称 V 是α的极小认知模型，如果：

(1) V 是α的认知模型，

(2) 不存在α的认知模型 V′，使得 V′<V 且 V(α) = V′(α)。

α的全体极小认知模型的集合记为 K(α)。显然，如果[α] = [β]，则 K(α) = K(β)。

由极小认知模型的定义直接可得：

定理 2.4 设α是任意的 **P**-公式，

(1) 任给α的认知模型 V′，存在α的唯一的极小认知模型 V，使得 V(α) = V′(α)。

(1) 任给古典赋值 V*，存在α的唯一的极小认知模型 V，使得 V(α) = V*(α)。■

重言式、矛盾式和强等值对于认知赋值有以下性质：

定理 2.5

(1) α是重言式，当且仅当，任给 V∈K(α)，都有 V(α) = t。

(2) α是矛盾式，当且仅当，任给 V∈K(α)，都有 V(α) = f。

(3) α和β强等值，当且仅当，[α] = [β]且任给 V∈K(α)，都有 V(α) = V(β)。■

定义 2.5 满足 设$\alpha\Rightarrow\beta$是任意的意图蕴涵式，V∈K(β)。称 V 满足$\alpha\Rightarrow\beta$，记为 V⊨ $\alpha\Rightarrow\beta$，如果：

(1) β是非退化的，

(2) 存在 V′∈K(α)，使得 V≤V′且 V′(α) = V(β)。

V 不满足$\alpha\Rightarrow\beta$的条件是：β是退化的，或，任给 V′∈K(α)，都有如果 V≤V′，则 V′(α) ≠ V(β)。

定义 2.6 有效性 $\alpha\Rightarrow\beta$是意图蕴涵式，称$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式，或称$\alpha\Rightarrow\beta$有效，如果任给 V∈K(β)，都有 V⊨ $\alpha\Rightarrow\beta$。$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式记为 ⊨ $\alpha\Rightarrow\beta$。

由定义可知，$\alpha\Rightarrow\beta$不是有效式的条件是：β是退化的，或，存在 V∈K(β)，使得任给 V′∈K(α)，都有如果 V≤V′，则 V′(α) ≠ V(β)。

$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式就是说β是α的意图后承。所以在 **ICL** 中是把意图后承化归为有效的意图蕴涵式来讨

论的。

3　ICL 的语义性质

定理 3.1　如果 $\models \alpha\Rightarrow\beta$，则

(1) β是非退化的。

(2) α是非退化的。

证　(1) 由定义。

(2) 因为β不是重言式，由定理 2.5(1)，所以存在 $V\in K(\beta)$，使得 $V(\beta) = f$。对于这个 V，由有效定义，存在 $V'\in K(\alpha)$，使得 $V'(\alpha) = V(\beta) = f$。因此$\alpha$不是重言式。

类似地，由定理 2.5(2)，可证α不是矛盾式。■

定理 3.1 表明 **ICL** 避免了重言式题和矛盾式作为意图的副作用。

引理 3.1　如果存在命题变项 p，使得 $V(p) \neq u$ 且 $p\notin[\alpha]$，则 $V\notin K(\alpha)$。

证　构造 V'，使得 $V'(p) = u$，而在其它命题变项上取值同 V，则 $V'<V$。注意如果 V 是α的认知模型，则 V'也是α的认知模型，所以 $V\notin K(\alpha)$。■

引理 3.2　$V\in K(\alpha)$的等价条件是：任给命题变项 p，都有 $V(p) \neq u$ 当且仅当 $p\in[\alpha]$。

证　设 $V\in K(\alpha)$。任给命题变项 p，如果 $p\in[\alpha]$，则由 V 是α的认知模型得 $V(p) \neq u$，如果 $V(p) \neq u$，则据引理 3.1，由 V 是 α 的极小模型得 $p\in[\alpha]$。

设 $V\notin K(\alpha)$。有两种情况：

当 V 不是α的认知模型时，存在命题变项 p，使得 $p\in[\alpha]$且 $V(p) = u$。

当 V 是α的认知模型但不是极小模型时，存在α的认知模型 V'，使得 $V'<V$，所以存在命题变项 p，使得 $V'(p) = u$ 且 $V(p) \neq u$，由 $V'(p) = u$ 得 $p\notin[\alpha]$，因此存在命题变项 p，使得 $V(p) \neq u$ 且 $p\notin[\alpha]$。■

定理 3.2　如果 $\models \alpha\Rightarrow\beta$，则$[\beta] \subseteq [\alpha]$。

证　取 $V\in K(\beta)$，由 $\models\alpha\Rightarrow\beta$得存在 $V'\in K(\alpha)$，使得 $V\leq V'$。

任给命题变项 p，如果 $p\in[\beta]$，则由引理 3.2 得 $V(p) \neq u$。又由 $V\leq V'$得 $V'(p) \neq u$。再由引理 3.2 得 $p\in[\alpha]$。■

由定理 3.2 表明了 **ICL** 避免了意图后承引入新文字的副作用问题。

$\models \alpha\Rightarrow\beta$主要用于$[\beta] \neq [\alpha]$。当$[\alpha] = [\beta]$时，可以证明 $\models \alpha\Rightarrow\beta$退化为古典等值。

引理 3.3　设 V 和 V'分别是 α 和 β 的极小认知模型，如果$[\alpha] = [\beta]$且 $V\leq V'$，则 $V = V'$。■

定理 3.3　如果$[\alpha] = [\beta]$，那么，$\models \alpha\Rightarrow\beta$ 当且仅当α和β古典等值且β是非退化的。

证　设 $\models \alpha\Rightarrow\beta$，证$\alpha$和$\beta$古典等值。

任给古典赋值 V^*，由定理 2.4，存在 $V\in K(\beta)$，使得 $V(\beta) = V^*(\beta)$，对于 V，存在 $V'\in K(\alpha)$，使得 $V\leq V'$且 $V'(\alpha) = V(\beta)$，由 $V\leq V'$和引理 3.3 得 $V = V'$，所以 $V^*(\alpha) = V(\alpha) = V'(\alpha) = V(\beta) = V^*(\beta)$。

设α和β古典等值且β是非退化的，证 $\models \alpha\Rightarrow\beta$。

任给 $V\in K(\beta)$，由定理 2.3，存在古典赋值 V^*，使得 $V^*(\beta) = V(\beta)$，由α和β古典等值得 $V^*(\alpha) = V^*(\beta)$，所以 $V(\alpha) = V^*(\alpha) = V^*(\beta) = V(\beta)$，由$[\alpha] = [\beta]$得 $V\in K(\alpha)$。

取 $V' = V$，就有 $V\models \alpha\Rightarrow\beta$。因此 $\models \alpha\Rightarrow\beta$。■

推论 3.4　$\models \alpha\Rightarrow\beta$ 且 $\models \beta\Rightarrow\alpha$，当且仅当，$\alpha$和$\beta$强等值且$\beta$是非退化的。■

根据以上结果，我们可以得到一些有效式和非有效式。

由推论 3.4 可得古典逻辑中的同一律、幂等律、交换律、结合律、分配律、双重否定律、De-Morgan 律等，仍是意图蕴涵下的有效式。所以它们也是意图后承的规律。

由定理 3.2 可得 $p\Rightarrow p\vee q$, $q\Rightarrow p\vee q$, $p\Rightarrow p\wedge(p\vee q)$, $p\Rightarrow p\vee(p\wedge q)$等，其中 $p \neq q$，非有效。

由推论 3.4 可得 $p\wedge q\Rightarrow p\vee q$, $p\vee q\Rightarrow p\wedge q$ 等，其中 $p \neq q$，非有效。

4　ICL 的公理系统和可靠性

我们建立 **ICL** 的公理系统，以推出所有有效的意图蕴涵式。

一、公理

A1　$\mathbf{p}_1\Rightarrow\mathbf{p}_1$。

A2　$\mathbf{p}_1\vee\mathbf{p}_2\Rightarrow\mathbf{p}_1$。

二、推演规则

1. 代入规则

从$\alpha\Rightarrow\beta$推出$\alpha(\varphi / p)\Rightarrow\beta(\varphi / p)$，其中$\varphi$是非退化的，$[\alpha]\cap[\varphi] = \varnothing$，$[\beta]\cap[\varphi] = \varnothing$。

2. 置换规则

从$\alpha\Rightarrow\beta$推出$\alpha[\psi / \varphi]\Rightarrow\beta[\psi / \varphi]$，其中$\varphi$和$\psi$强等值。

3. 合取规则

从 $\alpha_1\Rightarrow\beta_1$ 和 $\alpha_2\Rightarrow\beta_2$ 推出 $\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2$，其中

$\beta_1\to\alpha_1$和$\beta_2\to\alpha_2$都是重言式，$\beta_1\wedge\beta_2$不是矛盾式，$[\alpha_1] = [\alpha_2]$，$[\beta_1] = [\beta_2]$。

4. 添加规则

从$\alpha\Rightarrow\beta$推出$\alpha\wedge(\varphi_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi_k\vee\psi_k)\Rightarrow\beta$，其中$\beta\to\alpha$是重言式，$\psi_1,\cdots,\psi_k$都不是矛盾式，$\varphi_1,\cdots,\varphi_k$有下反对性质，$([\beta]\cup[\varphi_1]\cup\cdots\cup[\varphi_k])\cap([\psi_1]\cup\cdots\cup[\psi_k]) = \varnothing$。

证明和内定理的定义如常。$\alpha\Rightarrow\beta$是内定理记为$\vdash \alpha\Rightarrow\beta$。

定理 4.1

(1) $\vdash \alpha\Rightarrow\alpha$，其中$\alpha$是非退化的。

(2) $\vdash \alpha\vee\beta\Rightarrow\alpha$，其中$\alpha$是非退化的，$[\alpha]\cap[\beta] = \varnothing$。

证 (1) 取$p \neq \mathbf{p}_1$且$p\notin[\alpha]$。从公理$\mathbf{p}_1\Rightarrow\mathbf{p}_1$出发，将$p$代入$\mathbf{p}_1$得$p\Rightarrow p$，再将$\alpha$代入$p$得$\alpha\Rightarrow\alpha$。

(2) 取$p \neq \mathbf{p}_1$，$p \neq \mathbf{p}_2$，$p\notin[\alpha]$，$p\notin[\beta]$，$q \neq \mathbf{p}_1$，$q \neq \mathbf{p}_2$，$q\notin[\alpha]$，$q\notin[\beta]$，$p \neq q$。

从公理$\mathbf{p}_1\vee\mathbf{p}_2\Rightarrow\mathbf{p}_1$出发，将$p$代入$\mathbf{p}_1$得$p\vee\mathbf{p}_2\Rightarrow p$，再将$q$代入$\mathbf{p}_2$得$p\vee q\Rightarrow p$，再将$\alpha$代入$p$得$\alpha\vee q\Rightarrow\alpha$，最后将$\beta$代入$q$得$\alpha\vee\beta\Rightarrow\alpha$。■

定理 4.2

(1) 如果α和α'强等值，β和β'强等值，则$\vdash \alpha\Rightarrow\beta$ 当且仅当 $\vdash \alpha'\Rightarrow\beta'$。

(2) 如果β非退化，α和β强等值，则 $\vdash \alpha\Rightarrow\beta$。

证 (1) 从 $\vdash \alpha\Rightarrow\beta$出发经过两次置换 (一次用$\alpha'$置换$\alpha$，一次用$\beta'$置换$\beta$) 就得到 $\vdash \alpha'\Rightarrow\beta'$。

类似地，从 $\vdash \alpha'\Rightarrow\beta'$出发经过两次置换得到$\vdash \alpha\Rightarrow\beta$。

(2) 从(1)和定理 4.1(1)直接得到。■

以下证明 **ICL** 的可靠性。

引理 4.1 公理 **A1** 是有效式。

证 因为$\mathbf{p}_1$是非退化的，而且$\mathbf{p}_1$和$\mathbf{p}_1$强等值，由定理 3.3，**A1** 是有效式。■

引理 4.2 公理 **A2** 是有效式。

证 任给$V\in K(\mathbf{p}_1)$，取V'如下：

$V'(\mathbf{p}_1) = V(\mathbf{p}_1)$，$V'(\mathbf{p}_2) = t$，

$V'(p) = u$ ($p \neq \mathbf{p}_1$且$p \neq \mathbf{p}_2$)，

则$V'\in K(\mathbf{p}_1\vee\mathbf{p}_2)$且$V\leq V'$，又$V'(\mathbf{p}_1\vee\mathbf{p}_2) = V'(\mathbf{p}_1) = V(\mathbf{p}_1)$。■

引理 4.3 代入规则保持有效性。

证 设$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式，证明$\alpha(\varphi / p)\Rightarrow\beta(\varphi / p)$是有效式。

由$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式得β是非退化的，因为又φ是非退化的且$[\beta]\cap[\varphi] = \varnothing$，所以由定理 1.1 得$\beta(\varphi / p)$是非退化的。

任给$V\in K(\beta(\varphi / p))$，取$V_1$如下：

$V_1(p) = V(\varphi)$，$q\in[\beta]$且$q \neq p$时$V_1(q) = V(q)$，

其它情况$V_1(q) = u$，

则$V_1\in K(\beta)$且$V_1(\beta) = V(\beta(\varphi / p))$。

因为$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式，所以存在$V_2\in K(\alpha)$，使得$V_1\leq V_2$且$V_2(\alpha) = V_1(\beta)$。由$V_1\leq V_2$得$V_2(p) = V_1(p)$，取V'如下：

$q\in[\alpha]$时$V'(q) = V_2(q)$，$q\in[\varphi]$时$V'(q) = V(q)$，

其它情况 $V'(q) = u$，

则$V'\in K(\alpha(\varphi / p))$，且$V'(\varphi) = V(\varphi) = V_1(p) = V_2(p)$，所以$V'(\alpha(\varphi / p)) = V_2(\alpha)$。

因此存在 $V'\in K(\alpha(\varphi / p))$，使得 $V\leq V'$且$V'(\alpha(\varphi / p)) = V_2(\alpha) = V_1(\beta)= V(\beta(\varphi / p))$。■

引理 4.4 置换规则保持有效性。

证 设$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式，证明$\alpha[\psi / \varphi]\Rightarrow\beta[\psi / \varphi]$是有效式。

由$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式得β是非退化的，由φ和ψ强等值，由定理 1.2(2)，$\beta[\psi / \varphi]$也是非退化的。

因为φ和ψ强等值，由定理 1.2(1)，所以β和$\beta[\psi / \varphi]$强等值且α和$\alpha[\psi / \varphi]$强等值。

任给 $V\in K(\beta[\psi / \varphi])$，因为$\beta$和$\beta[\psi / \varphi]$强等值，由定理 2.5(3)，所以 $V\in K(\beta)$，且 $V(\beta) = V(\beta[\psi / \varphi])$。

因为$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式，所以存在 $V'\in K(\alpha)$，使得 $V\leq V'$且 $V'(\alpha) = V(\beta)$。因为α和 $\alpha[\psi / \varphi]$强等值，由定理 2.5(3)，所以 $V'\in K(\alpha[\psi / \varphi])$，且 $V'(\alpha[\psi / \varphi]) = V'(\alpha)$。

因此存在 $V'\in K(\alpha[\psi / \varphi])$，使得 $V\leq V'$且$V'(\alpha[\psi / \varphi]) = V'(\alpha) = V(\beta) = V(\beta[\psi / \varphi])$。■

引理 4.5 合取规则保持有效性。

证 设$\alpha_1\Rightarrow\beta_1$和$\alpha_2\Rightarrow\beta_2$都是有效式，证明$\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2$，

由$\alpha_1\Rightarrow\beta_1$和$\alpha_2\Rightarrow\beta_2$都是有效式得$\beta_1$和$\beta_2$都不是重言式，所以$\beta_1\wedge\beta_2$不是重言式，又$\beta_1\wedge\beta_2$不是矛盾式，因此$\beta_1\wedge\beta_2$是非退化的。

任给$V\in K(\beta_1\wedge\beta_2)$。

如果$V(\beta_1\wedge\beta_2) = t$，由定理 2.3，则存在古典赋值$V^*$，$V^*(\beta_1\wedge\beta_2) = V(\beta_1\wedge\beta_2) = t$，由$\beta_1\to\alpha_1$和$\beta_2\to\alpha_2$都是重言式得$\beta_1\wedge\beta_2\to\alpha_1\wedge\alpha_2$是重言式，所以$V^*(\alpha_1\wedge\alpha_2) = t = V(\beta_1\wedge\beta_2)$。

对于V*，由定理 2.4，存在$V'\in K(\alpha_1\wedge\alpha_2)$，使得$V'(\alpha_1\wedge\alpha_2) = V^*(\alpha_1\wedge\alpha_2)$且$V\le V'$，所以存在$V'\in K(\alpha_1\wedge\alpha_2)$，使得$V\le V'$且$V'(\alpha_1\wedge\alpha_2) = V^*(\alpha_1\wedge\alpha_2) = V(\beta_1\wedge\beta_2)$。

如果$V(\beta_1\wedge\beta_2) = f$，则$V(\beta_1) = f$或$V(\beta_2) = f$，不妨假设$V(\beta_1) = f$。

因为$V\in K(\beta_1)$，所以存在$V'\in K(\alpha_1)$，使得$V\le V'$且$V'(\alpha_1) = V(\beta_1) = f$，因此$V'(\alpha_1\wedge\alpha_2) = f$。

注意$V'\in K(\alpha_1\wedge\alpha_2)$，所以存在$V'\in K(\alpha_1\wedge\alpha_2)$，使得$V\le V'$且$V'(\alpha_1\wedge\alpha_2) = f = V(\beta_1\wedge\beta_2) = f$。■

引理 4.6 添加规则保持有效性。

证 设$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式，证明$\alpha\wedge(\varphi_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi_k\vee\psi_k)\Rightarrow\beta$是有效式。

任给$V\in K(\beta)$。

如果$V(\beta) = t$，由定理 2.3，则存在古典赋值V*，$V^*(\beta) = V(\beta) = t$。

因为$\varphi_1,\cdots,\varphi_k$有下反对性质，所以至多只有一个$\varphi_i$，使得$V^*(\varphi_i) = f$。对于这个$\varphi_i$，因为$\psi_i$不是矛盾式，所以存在$V_i$，使得$V_i(\psi_i) = t$。取$V'$如下：

$q\in[\beta]\cup[\varphi_1]\cup\cdots\cup[\varphi_k]$时$V'(q) = V^*(q)$，

$q\in[\psi_1]\cup\cdots\cup[\psi_k]$时$V'(q) = V_i(q)$，

q是$[\alpha]$中其它命题变项时$V'(q) = t$，

其它情况$V'(q) = u$，

则$V'\in K(\alpha\wedge(\varphi_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi_k\vee\psi_k))$且$V\le V'$，$V'(\beta) = V^*(\beta) = t$，由$\beta\to\alpha$是重言式得$V'(\beta\to\alpha) = t$，$V'(\varphi_j) = V^*(\varphi_j) = t\ (j\neq i)$，$V'(\psi_i) = V_i(\psi_i) = t$。

当$j\neq i$时由$V'(\varphi_j) = t$得$V'(\varphi_j\vee\psi_j) = t$，由$V'(\psi_i) = V_i(\psi_i) = t$得$V'(\varphi_i\vee\psi_i) = t$，又$V'(\alpha) = V^*(\alpha) = t$，所以$V'(\alpha\wedge(\varphi_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi_k\vee\psi_k)) = t$。

因此$V'\in K(\alpha\wedge(\varphi_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi_k\vee\psi_k))$，使得$V\le V'$且$V'(\alpha\wedge(\varphi_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi_k\vee\psi_k)) = t = V(\beta)$。■

由引理 4.1-4.6 得：

定理 4.3 可靠性定理 如果$\vdash\alpha\Rightarrow\beta$，则$\models\alpha\Rightarrow\beta$。■

5 范式和完全性

我们利用范式证明 **ICL** 的公理系统的完全性。

定义 5.1 完全简单析取 $X = \{p_1,\cdots,p_n\}$是有限非空的命题变项集合。析取式$\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_n$称为相对于X的完全简单析取，简称完全析取，如果任给$1\le i\le n$，都有α_i是p_i或$\neg p_i$。

定义 5.2 完全合取范式 X是有限非空的命题变项集合。合取式$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k$称为相对于X的完全合取范式，简称完全范式，如果任给$1\le i\le k$，都有φ_i是相对于X的完全析取，并且各不相同。

据此以上定义，我们有，如果φ是相对于X的完全析取，则$[\varphi] = X$；如果φ是相对于X的完全范式，则$[\varphi] = X$。

定理 5.1 如果α不是重言式，则存在唯一的相对于$[\alpha]$的完全范式α^*，使得α和α^*强等值。■

这个α^*称为α的完全范式。

定义 5.3 设α是任一公式，φ是相对于$[\alpha]$的完全析取。V称为φ的特征赋值，如果$V\in K(\alpha)$，$V(\varphi) = f$，并且对任何相对于$[\alpha]$的完全析取ψ，如果$\psi\neq\varphi$，则对任何$V\le V'$，都有$V'(\psi) = t$。

定理 5.2 如果φ是相对于$[\alpha]$的完全析取，则存在φ的特征赋值。

证 设$[\alpha] = \{p_1,\cdots,p_n\}$，$\varphi = \varphi_1\vee\cdots\vee\varphi_n$，取V如下：

$\varphi_i = p_i$时$V(p_i) = f$，$\varphi_i = \neg p_i$时$V(p_i) = t$，

其它情况$V'(q) = u$，

则$V\in K(\alpha)$，且任给$1\le i\le n$，都有$V(\varphi_i) = f$，所以$V(\varphi) = f$。

对任何相对于$[\alpha]$的完全析取$\psi = \psi_1\vee\cdots\vee\psi_n$，如果$\psi\neq\varphi$，则存在$1\le i\le n$，使得$\psi_i\neq\varphi_i$，对任何$V\le V'$，都有$V'(\psi_i) = V(\psi_i)\neq V(\varphi_i) = f$，所以$V'(\psi_i) = t$，因此$V'(\psi) = t$。■

我们还需要一种新的范式。

定义 5.4 混合析取 X和Y都是有限非空的命题变项集合，且$X\cap Y = \varnothing$。析取式$\alpha\vee\beta$称为相对于$\langle X, Y\rangle$的混合析取，如果α是相对于X的完全析取，$[\beta] = Y$。α称为这个混合析取的简单部分。

如果$\alpha\vee\beta$是$\langle X, Y\rangle$的混合析取，则$[\alpha\vee\beta] = X\cup Y$，$[\alpha]\cap[\beta] = \varnothing$。

定义 5.5 混合合取范式 X是有限非空的命题变项的集合。合取式$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k$称为相对于$\langle X, Y\rangle$的混合合取范式，简称混合范式，如果任给$1\le i\le k$，都有$\varphi_i$是相对于$\langle X, Y\rangle$的混合析取，并且它们的简单部分各不相同。

如果φ是相对于$\langle X, Y\rangle$的混合范式，则$[\varphi] = X\cup Y$。

定理 5.3 如果α不是重言式，$[\beta]\subseteq[\alpha]$且$[\beta]\neq[\alpha]$，则存在相对于$\langle[\beta], [\alpha]\setminus[\beta]\rangle$的混合范式$\alpha^{\#}$，使得$\alpha$和$\alpha^{\#}$强等值。

证　先取α的完全范式α^*，将[β]中的命题变项出现相同的合取支用分配律置换成公式$\varphi\vee\psi$，它就是相对于<[β], [α] \ [β]>的混合析取。

这样置换后，这些混合析取的简单部分各不相同，就得到了相对于<[β], [α] \ [β]>的混合范式。■

这个$\alpha^{\#}$称为α的相对于β的混合范式。

我们分三种情况讨论$\alpha\Rightarrow\beta$的有效性，并且，当$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式时，证明$\alpha\Rightarrow\beta$是内定理。

一、α是退化的，或β是退化的，或[β] $\not\subseteq$[α]。

这时根据由定理 3.1 和 3.2，$\alpha\Rightarrow\beta$不是有效式。

二、α和β 都是非退化的，且[α] = [β]。

这时，据定理 3.3，$\alpha\Rightarrow\beta$是有效式当且仅当α和β强等值。据定理 4.2 (2)，由β是非退化的，α和β强等值，可得 $\vdash\ \alpha\Rightarrow\beta$。

三、α 和 β 都是非退化的，且[β] $\subseteq$ [α]且[β] $\neq$ [α]。

这时，由定理 5.1，定理 5.3 和引理 4.4，存在β的完全范式β^*，α的相对于[β]的混合范式$\alpha^{\#}$，使得

$\alpha\Rightarrow\beta$ 是有效式，当且仅当，$\alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$是有效式，

再据由定理 4.2(1)，有

$\vdash\alpha\Rightarrow\beta$ 当且仅当 $\vdash\alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$。

所以只需证明

如果$\alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$是有效式，则 $\vdash\ \alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$。(∗)

设$\beta^* = \beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k$，我们考虑以下几种情况：

(1) 存在 $1\le i\le k$，β_i不是$\alpha^{\#}$ 的任何合取支的简单部分。

(2) 不存在 $1\le i\le k$，β_i不是 $\alpha^{\#}$ 的任何合取支的简单部分。此时可设

$\alpha^{\#} = (\beta_1\vee\varphi_1)\wedge\cdots\wedge(\beta_k\vee\varphi_k)\wedge(\alpha_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\alpha_m\vee\psi_m)$。

对此，又可分为两种情况：

(2-1) 存在 $1\le i\le m$，ψ_i是矛盾式，

(2-2) 不存在 $1\le i\le m$，ψ_i是矛盾式，

只须对情况(1)，(2-1)和(2-2)考虑命题(∗)。

引理 5.1　设α和β都是非退化的，[β] $\subseteq$ [α]，[β] $\neq$ [α]，$\beta^* = \beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k$是$\beta$的完全范式，$\alpha^{\#}$是相对于[$\beta$]的混合范式。

如果存在 $1\le i\le k$，β_i不是$\alpha^{\#}$ 的任何合取支的简单部分，则$\alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$不是有效式。

证　由定理 5.2，存在β_I的特征赋值V，有$V\in K(\beta)$且$V(\beta)$ = f。以及任给$V'\in K(\alpha^{\#})$且$V\le V'$，$\alpha^{\#}$的任何合取支的简单部分在V'下都取t，又$\alpha^{\#}$的任何合取支的简单部分都是[β^*]的完全析取，因此 $\alpha^{\#}$的任何合取支的简单部分在V'下都为t。所以$V'(\alpha)$ = t。

因此，$\alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$不是有效式。■

引理 5.2　设α和β都是非退化的，[β] $\subseteq$ [α]，[β] $\neq$ [α]，$\beta^* = \beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k$是$\beta$的完全范式，$\alpha^{\#} = (\beta_1\vee\varphi_1)\wedge\cdots\wedge(\beta_k\vee\varphi_k)\wedge(\alpha_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\alpha_m\vee\psi_m)$ 是相对于[β]的混合范式。

如果存在 $1\le i\le m$，ψ_i是矛盾式，则$\alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$不是有效式。

证　由定理 5.2，存在 α_i的特征赋值V，有$V\in K(\beta^*)$ 且 $V(\beta^*)$ = t。

任给$V'\in K(\alpha^{\#})$且$V\le V'$，都有$V'(\alpha_i)$ = f且$V'(\psi_i)$ = f，所以$V'(\alpha_i\vee\psi_i)$ = f，所以$V'(\alpha^{\#})$ = f。

因此，$\alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$不是有效式。■

引理 5.3　设α和β都是非退化的，[β] $\subseteq$ [α]，[β] $\neq$ [α]，$\beta^* = \beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k$是$\beta$的完全范式，$\alpha^{\#} = (\beta_1\vee\varphi_1)\wedge\cdots\wedge(\beta_k\vee\varphi_k)\wedge(\alpha_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\alpha_m\vee\psi_m)$是相对于[$\beta$]的混合范式。如果对任意的 $1\le i\le m$，ψ_I都不是矛盾式，则 $\vdash\ \alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$。

证　任给 $1\le i\le k$，都有 $\vdash\ \beta_i\vee\varphi_i\Rightarrow\beta_i$，多次使用合取规则得

$\vdash\ (\beta_1\vee\varphi_1)\wedge\cdots\wedge(\beta_k\vee\varphi_k)\Rightarrow\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k$，

再使用添加规则得

$\vdash(\beta_1\vee\varphi_1)\wedge\cdots\wedge(\beta_k\vee\varphi_k)\wedge(\alpha_1\vee\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\alpha_m\vee\psi_m)$
$\Rightarrow\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k$，

即 $\vdash\ \alpha^{\#}\Rightarrow\beta^*$。■

综述以上讨论得：

定理 5.4　完全性定理　如果 $\models\ \alpha\Rightarrow\beta$，则 $\vdash\ \alpha\Rightarrow\beta$。■

参　考　文　献

[1] 陈小平. 一个意图后承的形式理论[J]. 自然辩证法研究 2000 年增刊. 28－31.

[2] J.Bell and Z.Huang. Dynamic Obligation hierarchies[J]. *Norms, Logics and Information System. IOS Press*, 1999. 231-245.

[3] X.Chen and G.Liu. A logic of intention[J]. *Proc. of IJCAI*-99, 1999. 172-177.

[4] Z.Huang, M.Masuch and L.Polos. ALX, an action logic for agents with bounded rationality[J]. *Artif. Intell*. 82(1), 1996. 75-127