图灵偏序结构

秦云飞

北京大学哲学系

2020 年 3 月 3 日

基本概念与定理

定义

- 设 Φ_e 是一个离线图灵机，f 是一个写在 Φ_e 只读带上的函数，Φ_e, f 共同构成一个谕示图灵机，记为 Φ_e^f，f 称为 Φ_e^f 的神谕。
- 对数论函数 g，如存在谕示图灵机 Φ^f s.t. $g = \Phi^f$，称 g 是 f-可计算的。
- 如数论函数 g 可通过对初始函数（零函数、后继函数、投影函数）、取极小函数和 f 有限多次运用复合、原始递归运算得到，则称 g 是 f-递归函数，或 g 可图灵归约到 f，记为 $g \leq_T f$。

事实

- $\leq_T$ 是 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上偏序关系（自反，传递）。
- g 是 f-可计算的 $\Leftrightarrow$ g 是 f-递归函数

S-M-N 定理

$\forall m, n, \exists$ 递归函数 S_n^m s.t. $\forall f, e, \bar{x}, \bar{y}(|\bar{x}| = m, |\bar{y}| = n)$，
$\Phi_e^f(\bar{x}, \bar{y}) \downarrow = \Phi^f_{S_n^m(e,\bar{x})}(\bar{y}) \downarrow$。

图灵度与图灵偏序

定义

对函数 $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，

- 如 $f \leq_T g$ 且 $g \leq_T f$，称 f 与 g 图灵等价，记为 $f \equiv_T g$。
- 如 $f \not\leq_T g$ 且 $g \not\leq_T f$，称 f 与 g 图灵不可比，记为 $f \mid_T g$。
- f 的图灵度 $\deg(f) := \{g | f \equiv_T g\}$。

由于 $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \leq_T \rangle$ 是偏序，而 $\equiv_T$ 显然是其上的正规等价关系，故我们可记 $\mathcal{D} := \mathbb{N}^{\mathbb{N}} / \equiv_T$，$\leq_T$ 在 $\mathcal{D}$ 上诱导的关系仍记为 $\leq_T$，我们有：

命题

- $\langle \mathcal{D}, \leq_T \rangle$ 是偏序。
- $\deg(\emptyset)$ 是 $\mathcal{D}$ 最小元，记为 0。
- $\forall d \in \mathcal{D}, d$ 至多可数，$\{c | c \leq_T d\}$ 至多可数，但 $\mathcal{D}$ 不可数。

图灵度与图灵偏序

命题 1.(3) 的证明.

只需证 $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，$\{g | g \leq_T f\}$ 至多可数，就有：

- $\forall d \in \mathcal{D}, d = \deg(h) \subseteq \{g | g \leq_T f\}$ 至多可数；
- $|\{c | c \leq_T d\}| \leq |\{g | g \leq_T h\}$ 至多可数；
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 不可数 $\Rightarrow \mathcal{D}$ 不可数。

而 $\forall g \leq_T f, \exists e \in \mathbb{N}$，$g = \Phi_e^f \quad \Rightarrow \quad$ 存在从 $\mathbb{N}$ 到 $\{g | g \leq_T f\}$ 的满射。 □

图灵度与图灵偏序

定义

对 $f \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$，定义 f 的图灵跳跃 $f' := \{e | \Phi_e^f(e) \downarrow\}$。

命题 2

对 $f \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$，$f \leq_T f'$，而 $f' \not\leq_T f$。

证明 $f \leq_T f'$.

$x \in \mathrm{graph}(f) \Leftrightarrow \forall y \Phi_e^f(x, y) \downarrow \Leftrightarrow \forall y \Phi_{k(x)}^f(y) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_{k(x)}^f(\Phi_{k(x)}^f) \downarrow \Leftrightarrow k(x) \in f'$，
$\mathrm{graph}(f) = f' \circ k$。

□

定义

对 $f\in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$，定义 f 的图灵跳跃 $f^{'} := \{e|\Phi_e^f(e)\downarrow\}$。

命题

对 $f\in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$，$f\leq_T f^{'}$，而 $f^{'}\not\leq_T f$。

证明 $f^{'}\not\leq_T f$.

假设 $f^{'}\leq_T f$，令 $k(x)=\begin{cases}\Phi_e^f(e)+1 & f^{'}(e)=1\\ 0 & f^{'}(e)=0\end{cases}$，知 $k\leq_T f^{'}\leq_T f$。

$\square$

图灵度与图灵偏序

命题

$f \leq_T g \Rightarrow f' \leq_T g'$。

证明.

断言：$\forall h \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}, h' \equiv_T \{\langle x, e\rangle | \Phi_e^h(x) \downarrow\}(= h_0)$

- $\geq_T$: $\langle x, e\rangle \in h_0 \Leftrightarrow \Phi^h_{k(\langle x,e\rangle)}(\cdot) \downarrow \Leftrightarrow \Phi^h_{k(\langle x,e\rangle)}(k(\langle x, e\rangle)) \downarrow \Leftrightarrow k(\langle x, e\rangle) \in h'$。

只需证 $f_0 \leq_T g_0$:

$\langle x, e\rangle \in f_0 \Leftrightarrow \Phi_e^{\Phi_a^g(=f)}(x) \downarrow \Leftrightarrow \Phi^g_{k(e)}(x) \downarrow \Leftrightarrow \langle k(e), x\rangle \in g_0$ □

可见，$\equiv_T$ 对于跳跃运算也是个正规等价关系，我们将跳跃运算诱导的 $\mathcal{D}$ 中运算也称为图灵跳跃，图灵度 d 的图灵跳跃记为 d'。

命题 4

图灵偏序 $\mathcal{D}$ 无极大元。

图灵偏序结构性质

定理

1. (Kleene Post)$\exists c, d$ s.t. $c \mid_T d$ 且 $0 \leq_T c, d \leq_T 0'$。
2. $\forall c \neq 0, \exists d, c \mid_T d$。
3. $\exists c, d$ s.t. $c \mid_T d$ 且 $c \wedge d = 0$，称 c, d 为一个极小对。
4. 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个可数理想，则存在 c, d，$\mathcal{I} = \{b \in \mathcal{D} \mid b \leq_T c, d\}$，称 c, d 为一个恰对。

图灵偏序结构性质

定理

1. (Kleene Post)$\exists c, d$ s.t. $c \mid_T d$ 且 $0 \leq_T c, d \leq_T 0^{'}$。
2. $\forall c \neq 0, \exists d, c \mid_T d$。
3. $\exists c, d$ s.t. $c \mid_T d$ 且 $c \wedge d = 0$，称 c, d 为一个极小对。
4. 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个可数理想，则存在 c, d，$\mathcal{I} = \{b \in \mathcal{D} | b \leq_T c, d\}$，称 c, d 为一个恰对。

定义

- 对函数 f, g，$f \oplus g(x) := \begin{cases} \mathfrak{F}(n) & x = 2n \\ g(n) & x = 2n+1 \end{cases}$；
- $\deg(f) \vee \deg(g) := \deg(f \oplus g)$；（易证良定义）
- 对函数列 $\{f_{i \in \mathbf{N}}\}$，定义 $\oplus f_{i \in \mathbf{N}}(\langle i, x \rangle) := f_i(x)$；
- 设 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$，如 $\mathcal{I}$ 向下封闭且对 $\vee$ 封闭，称 $\mathcal{I}$ 是一个理想。

证明 (1).

只需证，存在 $A, B \subseteq \mathbf{N}$，$A \mid_T B$ 且 $A, B \leq_T 0'$。
计划：构造部分函数列 $\{\alpha_{i\in\mathbf{N}}\}, \{\beta_{i\in\mathbf{N}}\} \subset \mathbf{2}^{\mathbf{N}}$，使得 $A = \bigcup\{\alpha_{i\in\mathbf{N}}\}, B = \bigcup\{\beta_{i\in\mathbf{N}}\}$。

起点：$\alpha_0 = \beta_0 = \emptyset$，处理 Φ_0　　　　设已处理完所有 $\Phi_{l<k}$，处理 Φ_k

构造 α, β s.t. $\Phi_k^A \neq B, \Phi_k^B \neq A$

已构造完 α_s, β_s，问：是否存在 “α_t”$\supset \alpha_s$ s.t.$\Phi_k^{''\alpha_t''}(s+1)\downarrow$?

- 如存在，令 $\alpha_t =$“α_t”，β_t 定义为：$\beta_t(s+1) = \ldots \beta_t(t) = 1 - \Phi_k^{\alpha_t}(s+1)$，则 $\Phi_k^{\alpha_t} \neq \beta_t$。
- 如不存在，令 $\alpha_{s+1}(s+1) = \beta_{s+1}(s+1) = 1$，知 $\Phi_k^{\alpha_{s+1}} \neq \beta_{s+1}$。

已构造完 α_s, β_s，问：是否存在 “β_t”$\supset \beta_s$ s.t.$\Phi_k^{''\beta_t''}(s+1)\downarrow$?
... 可得 $\alpha_t \supset \alpha_s, \beta_t \supset \beta_s$，$\Phi_k^{\beta_t} \neq \alpha_t$。

这一证明：1、本质是对角线法；2、可看作一个图灵度为 $0'$ 的算法：是否存在 α_ts.t.$\Phi_k^{\alpha_t}(s+1)\downarrow$?

图灵偏序结构性质

证明 4.

设 $\mathcal{I} = \{D_i | i \in \mathbf{N}$，$\forall n$，$C_n := \bigoplus D_{i \le n}$，知 $\mathcal{I} = \{X | \exists n, X \le_T C_n\}$。

起点：$\alpha = \beta = \emptyset$，　　已处理完所有 $(\Phi_i, \Phi_j)(\langle i, j\rangle < k)$，处理 $(\Phi_m, \Phi_n)(\langle m, n\rangle = k)$

构造 α, β s.t. $C_k \le_T A, B$，$\Phi_m^A = \Phi_n^B = C \Rightarrow \exists k (C \le_T C_k)$

至多已将 C_l 编入 α, β 的第 l 部分，$k > l$ 是 α_s, β_s 均未被占用的最靠前的部分，令 $\alpha(\langle k, x\rangle) = \beta(\langle k, x\rangle) = C_k(x)$。

问：是否存在 $\alpha^* \supset \alpha, \beta^* \supset \beta$，s.t. $\exists x, \Phi_m^{\alpha^*}(x)\downarrow \neq \Phi_n^{\beta^*}(x)\downarrow$?

- 如存在，令 $\alpha := \alpha^*, \beta := \beta^*$，知 $\Phi_m^A = \Phi_n^B = C \Rightarrow C \le_T C_k$。
- 如不存在，则对任 $A \supset \alpha, B \supset \beta$，$\Phi_m^A = \Phi_n^B = C \Rightarrow \exists k (C \le_T C_k)$：
  证：知 α 的度与某个 C_n 相同，设前提成立，下面从 α 计算 C: 对每个 x，宽度优先依次检查 α 的所有扩充，如存在 $\alpha^* \supset$ s.t. $\Phi_i^{\alpha^*}(x)\downarrow$，$C(x) = \Phi_i^{\alpha^*}(x)$。

$\square$

算术层级

定义

如果 $\exists e, A = dom(\Phi_e^B)$，称 A 是 B 上递归可枚举（r.e.）集。

定义

对每个 $n \in \mathbb{N}$，递归定义 $\Sigma_n, \Pi_n \subseteq \mathcal{L}(+, \times, 0, 1, <)$ 如下：

- $\Sigma_0 = \Pi_0 = \{\phi \in \mathcal{L}(+, \times, 0, 1, <) | \phi$ 无量词 $\}$；
- $\Sigma_{k+1} = \{\exists \overline{y}\phi | \phi \in \Pi_k\}$，$\Pi_{k+1} = \{\forall \overline{y}\phi | \phi \in \Sigma_k\}$。

对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义 $\Delta_n := \Sigma_n \cap \Pi_n$。

定义

$A \subseteq \mathbb{N}$ 是 Σ_n/Π_n 集：存在 $\phi(x) \in \Sigma_n/\Pi_n$，$a \in A \Leftrightarrow \mathbb{N} \vDash \phi(a)$。

事实

在算术模型 $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1, <)$ 下，存在无量词公式 ϕ, ψ，对 $e, s, x, y \in \mathbb{N}$，定义域有限的 $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，$\phi^{\mathbb{N}}(e, s, x, y, \sigma) \Leftrightarrow \Phi_{e,s}^{\sigma}(x) \downarrow = y$，$\psi^{\mathbb{N}}(e, s, x, \sigma) \Leftrightarrow \Phi_{e,s}^{\sigma}(x) \uparrow$。

定理

1. B 是 Σ_{n+1} 集 $\Leftrightarrow$ 对某个 Π_n 集 A, B 是 A 上 $r.e.$ 集 $\Leftrightarrow$ B 是 $\emptyset^{(n)}(=\emptyset^{'\cdots'})$ 上 $r.e.$ 集。
2. B 是 Δ_{n+1} 集 $\Leftrightarrow B \leq_T A^{(n)}$。

证明 (1).

- B 是 Σ_1 集 $\Leftrightarrow [x \in B \Leftrightarrow$ 存在 $\bar{y}$ s.t. $\mathbf{N} \vDash \phi(\bar{y}, x)](\phi$ 无量词)，知 B 是 r.e. 集。
  如 B 是 r.e. 集，$x \in B \Leftrightarrow \exists s(\Phi_{e,s}(x)\downarrow)$，知 B 是 Σ_1 集。
- B 是 Σ_2 集 $\Leftrightarrow [x \in B \Leftrightarrow$ 存在 $\bar{y}$ s.t. $\mathbf{N} \vDash \forall \overline{w}\phi(\bar{y}, \overline{w}, x)](\phi$ 是无量词公式)，
  由上已证，$\exists\overline{w}\neg\phi(\bar{y}, \overline{w}, x)$ 定义集是 r.e. 集，故是 $\emptyset'$-递归集，从而其补集是 $\emptyset'$-递归集，从而 B 是 $\emptyset'$-r.e. 集。

图灵偏序与二阶算术理论

定理

$Th^2(\mathbf{N},+,\times,0,1,<)\equiv Th(\mathcal{D},\leq_T)$。

定义

A 与 B 递归等价 $(A\equiv B)$：存在递归双射 $f:\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$，$x\in A\Leftrightarrow f(x)\in B$。

事实

- $A\equiv B$ 当且仅当：存在递归单射 $f,g:\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$，$x\in A\Leftrightarrow f(x)\in B, y\in B\Leftrightarrow g(y)\in A$。
- $A\equiv B\Rightarrow A\equiv_T B$。

图灵偏序与二阶算术理论

定理

$Th^2(\mathbf{N}, +, \times, 0, 1, <) \equiv Th(\mathcal{D}, \leq_T)$。

证明：存在递归单射 $f \colon \mathcal{L}(\leq_T) \to \mathcal{L}^2(+, \times, 0, 1, <)$

对 $\phi \in \mathcal{L}(\leq_T)$ 定义 $f(\phi) \in \mathcal{L}^2(+, \times, 0, 1, <)$ 为：
$f(A \leq_T B) = \exists e \forall x \exists s(\Phi^B_{e,s}(x) \downarrow = A(x))$，
$f(A = B) = f(A \leq_T B) \wedge f(B \leq_T A)$ 归纳步平凡。
知 $\phi \in Th(\mathcal{D}, \leq_T) \Leftrightarrow f(\phi) \in Th^2(\mathbf{N}, +, \times, 0, 1, <)$ 且 f 是单射。

图灵偏序与二阶算术理论

Slaman-Woodin 编码定理

令 $S = \{C_i | i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，其中 C_i, C_j 两两图灵不可比，取 $C = \oplus C_{i\in\mathbb{N}}$，则存在 G_o, G_1 s.t.

- $\forall C_i, \exists D$，$D \leq_T C_i \oplus G_0, C_i \oplus G_1$ 但 $D \not\leq_T C_i$；
- $\forall X$，如 $\exists D$，$D \leq_T X \oplus G_0, X \oplus G_1$ 但 $D \not\leq_T X$，则对某个 i，$C_i \leq_T X$。

因此，任一组两两不可比图灵度 $\{d_i | i \in \mathbb{N}\}$ 都可用唯一的三个图灵度编码。

关系编码定理

对任 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\phi_n \in \mathcal{L}(\leq_T)$，对 $\mathcal{D}$ 上任 n-元可数关系 R，存在 $\bar{y} \in \mathcal{D}$ s.t. $\bar{x} \in R \Leftrightarrow (\mathcal{D}, \leq_T) \vDash \phi(\bar{x}, \bar{y})$。

图灵偏序与二阶算术理论

证明：存在递归单射 $f\colon \mathcal{L}^2(+,\times,0,1,<) \to \mathcal{L}(\leq_T)$