一阶模态逻辑初步

刘力恺

2020 年 11 月 3 日

任何一个无量词的模态系统，仅仅由于它们作为某个含量词的更大系统的基础才会令人感兴趣. 如果一旦发现不可能建立这个更大的系统，逻辑学家很可能会彻底放弃模态逻辑.

——卡尔纳普《意义与必然性》(1947)

目录

句法和语义

简单一阶模态语言 $\mathcal{L}_{\Box}^{1=}$ 就是在带等词的一阶语言 $\mathcal{L}^{1=}$ 上添加模态词 $\Box$ 得到的. 为了避免哲学上的困难，语言中暂时不含个体常元和函数符. 事实上从数学的角度看，个体常数可以看作 0 元函数，而 n 元函数可以看作 $n+1$ 元关系. 所以语言中有谓词符其实就 "足够" 了.

定义 (合式公式)

递归定义语言 $\mathcal{L}_{\Box}^{1=}$ 的合式公式如下：

$$\mathrm{FL}(\mathcal{L}_{\Box}^{1=}) \ni \varphi ::= P_i^j x_1 \dots x_j \mid x_i \equiv x_j \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \to \varphi_2) \mid \Box\varphi \mid \forall x_i \varphi$$

$\wedge, \vee, \leftrightarrow, \bot, \top, \Diamond, \exists, \neq$ 的定义如常.
我们始终假定 $\mathcal{L}_{\Box}^{1=}$ 是可数语言.

自由变元、约束变元、替换自由、替换的定义如常.

句法和语义

一个自然的想法是把一阶逻辑和命题模态逻辑的语义综合起来便能得到一阶模态逻辑的语义.

先考虑模型. 把一阶逻辑和模态逻辑的模型 $\langle \mathscr{D}, \mathscr{I} \rangle$ 和 $\langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{V} \rangle$ 合在一起，由于赋值 $\mathscr{V}$ 是针对命题变元的，而我们的语言中并没有命题变元，所以就不需要 $\mathscr{V}$ 了，于是得到 $\langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{I} \rangle$.

还需要考虑 $\mathscr{W}$ 和 $\mathscr{D}$ 之间的联系. 直观上看不同的可能世界上存在的对象应该是不同的，故每个可能世界 w 都应该有自己的论域 $\mathscr{D}_w$. 而谓词在不同的可能世界上的外延也是不同的，比如把 $\mathscr{W}$ 视为时间点的集合，那么 "$\cdots$是活着的人" 这个谓词在每个时间点上的外延都是不同的，因此每个可能世界上都应有一个解释映射 $\mathscr{I}_w$.

于是我们得到模型 $\langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D} = \bigcup_{w \in \mathscr{W}} \mathscr{D}_w, \{\mathscr{I}_w\}_{w \in \mathscr{W}} \rangle$ 或 $\langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A}, \{\mathscr{I}_w\}_{w \in \mathscr{W}} \rangle$，其中 $\mathscr{A} : \mathscr{W} \to \wp(\mathscr{D})$. 二者在数学上是等价的，但哲学含义却有不同. 我认为后者可能更符合我们对可能世界的看法，因为我们一般是根据可能存在物去设想可能世界. 而前一种处理办法更像是把可能世界看作平行宇宙，预先肯定了可能世界的实在性. 但后一种处理某种程度上也预设了梅农主义.

定义 (模型、骨架、框架)

称五元组 $\mathfrak{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A}, \mathscr{I} \rangle$ 为模型，如果：可能世界集 $\mathscr{W} \neq \varnothing$；可通达关系 $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{W} \times \mathscr{W}$；论域 $\mathscr{D} \neq \varnothing$；分配映射 $\mathscr{A} : \mathscr{W} \to \wp(\mathscr{D})$；解释映射 $\mathscr{I} : \mathscr{W} \times \mathbf{Pre} \to \wp(\mathscr{D}) \cup \wp(\mathscr{D}^2) \cup \cdots \cup \wp(\mathscr{D}^n)$（$\mathbf{Pre}$ 是全体谓词符的集合，n 是 $\mathbf{Pre}$ 中谓词论元的最大值）.
称四元组 $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A} \rangle$ 为骨架，二元组 $\mathfrak{F} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R} \rangle$ 为框架.

当 $\mathscr{A}(w)$ 恒等于 $\mathscr{D}$ 时，称 $\mathfrak{M}$ 为常域模型，否则为变域模型.

定义 (指派及其变体)

称映射 $\mathfrak{v} : \mathbf{Var} \to \mathscr{D}$ 为指派，其中 $\mathbf{Var}$ 为全体个体变元的集合.

任给 $\mathrm{d} \in \mathscr{D}$，称映射 $\mathfrak{v}[\mathrm{d}/x](y) = \begin{cases} \mathrm{d}, & y = x \\ \mathfrak{v}(y), & y \neq x \end{cases}$ 为指派 $\mathfrak{v}$ 的 d-变体.

注意到 $\mathfrak{v}$ 的取值域是 $\mathscr{D}$，并不依赖于可能世界，所以个体变元是严格指示词.

句法和语义

量化模态逻辑：对命题模态逻辑作量化扩张，模态词解释不变. $\surd$
模态谓词逻辑：对一阶谓词逻辑作模态扩张，量词解释不变.

定义 (可满足关系)

给定模型 $\mathfrak{M}$，及其上的指派 $\mathfrak{v}$ 和世界 w，递归定义指派点模型 $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w\rangle$ 满足公式 φ（记作 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \varphi$）如下：

- ⋆ $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash Px_1 \ldots x_n$，当且仅当，$(\mathfrak{v}(x_1), \ldots, \mathfrak{v}(x_n)) \in \mathscr{I}(w, P)$;
- ⋆ $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash x \equiv y$，当且仅当，$\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{v}(y)$;
- ⋆ $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \neg\psi$，当且仅当，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \nVdash \psi$;
- ⋆ $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \psi_1 \to \psi_2$，当且仅当，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \nVdash \psi_1$ 或 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \psi_2$;
- ⋆ $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \Box\psi$，当且仅当，对任意 $u \in \mathscr{W}$，若 $\mathscr{R}wu$，则 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, u \Vdash \psi$;
- ⋆ $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \forall x\psi$，当且仅当，对任意$\mathrm{d} \in \mathscr{A}(w)$，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/x], w \Vdash \psi$.

※ 该定义表明一阶模态逻辑的量词已经不是“经典的”了. 从而一阶模态逻辑不再是经典逻辑，而是自由逻辑.

句法和语义

引理 (合同引理)

给定模型 $\mathfrak{M}$，设 $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ 是其上的两个指派，若对公式 φ 中的所有自由变元 x 都有 $\mathfrak{v}_1(x) = \mathfrak{v}_2(x)$，则任给 $\mathfrak{M}$ 上的世界 w 都有

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}_1, w \Vdash \varphi \iff \mathfrak{M}, \mathfrak{v}_2, w \Vdash \varphi.$$

定义 (有效性)

称公式 φ 在模型 $\mathfrak{M}$ 上有效，记作 $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$，如果对 $\mathfrak{M}$ 上的指派 $\mathfrak{v}$ 和世界 w，都有 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \varphi$.
称公式 φ 在骨架 $\mathfrak{S}$ 上有效，记作 $\mathfrak{S} \Vdash \varphi$，如果对 $\mathfrak{S}$ 上的解释映射 $\mathscr{I}$，都有 $\mathfrak{S}, \mathscr{I} \Vdash \varphi$.
称公式 φ 在框架 $\mathfrak{F}$ 上有效，记作 $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$，如果对基于 $\mathfrak{F}$ 的骨架 $\mathfrak{S}$，都有 $\mathfrak{S} \Vdash \varphi$.

句法和语义

定义 (语义后承)

称公式 φ 是公式集 Γ 相对于框架类 $\mathcal{F}$ / 骨架类 $\mathcal{S}$ 的语义后承，记作 $\Gamma \vDash_{\mathcal{F}} \varphi$ / $\Gamma \vDash_{\mathcal{S}} \varphi$，如果对基于 $\mathcal{F}$ / $\mathcal{S}$ 的指派点模型 $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \rangle$，都有若 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \Gamma$，则 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \varphi$.
当 $\Gamma = \varnothing$ 时，称 φ 相对于 $\mathcal{F}$ / $\mathcal{S}$ 有效，记作 $\vDash_{\mathcal{F}} \varphi$ / $\vDash_{\mathcal{S}} \varphi$.

引理 (替换引理)

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \varphi(y/x) \iff \mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathfrak{v}(y)/x], w \Vdash \varphi$$

命题

记全体框架组成的类为 $\mathcal{K}$.

$\vDash_{\mathcal{K}} x \neq y \to \Box x \neq y$ $\quad$ $\vDash_{\mathcal{K}} \forall x \forall y \varphi \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$

$\vDash_{\mathcal{K}} \forall y(\forall x \varphi \to \varphi(y/x))$ $\quad$ $\nvDash_{\mathcal{K}} \forall x \varphi \to \varphi(y/x)$

句法和语义

证明： 前两个读者自证.

任给 $\mathfrak{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A}, \mathscr{I} \rangle$，及其上的指派 $\mathfrak{v}$ 和世界 w. 任给 $\mathrm{d} \in \mathscr{A}(w)$. 若 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/y], w \Vdash \forall x\varphi$，则 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/y][\mathrm{d}/x], w \Vdash \varphi$，即 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/y][\mathfrak{v}[\mathrm{d}/y](y)/x], w \Vdash \varphi$，由替换引理，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/y], w \Vdash \varphi(y/x)$. 因此 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/y], w \Vdash \forall x\varphi \to \varphi(y/x)$，再由 d 的任意性，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \forall y(\forall x\varphi \to \varphi(y/x))$，再由 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w$ 的任意性，$\vDash_{\mathcal{K}} \forall y(\forall x\varphi \to \varphi(y/x))$.

构造反模型 $\mathfrak{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A}, \mathscr{I} \rangle$，其中 $\mathscr{W} = \{w, u\}$，$\mathscr{R} = \varnothing$，$\mathscr{D} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$，$\mathscr{A}(w) = \{\mathrm{a}\}$，$\mathscr{A}(u) = \{\mathrm{b}\}$，$\mathscr{I}(w, P) = \{\mathrm{a}\}$，$\mathscr{I}(u, P) = \{\mathrm{a}\}$. 指派 $\mathfrak{v}(x) = \mathrm{a}$，$\mathfrak{v}(y) = \mathrm{b}$. 因为 $\mathscr{A}(w) = \mathscr{I}(w, P) = \{\mathrm{a}\}$，$\mathfrak{v}(y) \notin \mathscr{I}(w, P)$，所以 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \forall xPx$，但是 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \nVdash Py$，因此 $\nvDash_{\mathcal{K}} \forall xPx \to Py$，从而 $\nvDash_{\mathcal{K}} \forall x\varphi \to \varphi(y/x)$. ∎

公理系统

定义 (句法后承)

设 $\mathbf{S}^{1=}_{\Box} = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{Ri}, \mathbf{Rp} \rangle$ 是一阶模态公理系统，其中 $\mathbf{Ax}$ 是公理集，$\mathbf{Ri}$ 是推导规则集，$\mathbf{Rp}$ 是证明规则集.

⋆ 称公式 φ 是系统 $\mathbf{S}^{1=}_{\Box}$ 的内定理，记作 $\vdash_{\mathbf{S}^{1=}_{\Box}} \varphi$，如果存在公式序列 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ 使得：$\varphi = \phi_n$；对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，要么 $\phi_i \in \mathbf{Ax}$；要么存在 $j_1, \ldots, j_k < i$ 和规则 $R \in \mathbf{Ri} \cup \mathbf{Rp}$，使得 $(\{\phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_k}\}, \phi_i) \in R$. 称 $\mathbf{Th}(\mathbf{S}^{1=}_{\Box}) = \{\varphi \mid \vdash_{\mathbf{S}^{1=}_{\Box}} \varphi\}$ 为 $\mathbf{S}^{1=}_{\Box}$ 的定理集.

⋆ 称公式 φ 是公式集 Γ 相对于系统 $\mathbf{S}^{1=}_{\Box}$ 的句法后承，记作 $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}^{1=}_{\Box}} \varphi$，如果存在公式序列 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ 使得：$\varphi = \phi_n$；对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，要么 $\phi_i \in \mathbf{Th}(\mathbf{S}^{1=}_{\Box})$；要么 $\phi_i \in \Gamma$；要么存在 $j_1, \ldots, j_k < i$ 和规则 $R \in \mathbf{Ri}$，使得 $(\{\phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_k}\}, \phi_i) \in R$. 显然 $\vdash_{\mathbf{S}^{1=}_{\Box}} \varphi$ 是 $\Gamma = \varnothing$ 时的情形.

由于蕴涵是实质蕴涵，所以在这样的定义下，演绎定理及其逆、句法紧致性定理是一定成立的.

公理系统

定义 (基础一阶模态系统 QS)

联结词公理：

F1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ F2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

PBC $(\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$

模态公理：

K $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ S 正规模态系统 **S** 的特征公理

量化公理：

UD $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ UI° $\forall y(\forall x\varphi \to \varphi(y/x))$

VQ $\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$，$x$ 不在 φ 中自由出现 PM $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$

等词公理：

ID $x \equiv x$ L $x \equiv y \to (\varphi \to \varphi(y//x))$ ND $x \not\equiv y \to \Box x \not\equiv y$

推导规则：

MP $\varphi, \varphi \to \psi \;/\; \psi$

证明规则：

RN $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$ UG $\dfrac{\varphi}{\forall x\varphi}$

公理系统

由于全称例示公理 UI $\forall x\varphi \to \varphi(y/x)$ 不是有效式，所以系统 **QS** 并不不是一阶系统和正规模态系统的简单合成. 我们把 UI 弱化成了 UI°，并添加量词交换公理 PM. 事实上 **QS** 已经不是经典逻辑，而是自由逻辑.

定义存在谓词 $\mathrm{E}!x := \exists y\ y \equiv x$ 易证 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \mathrm{E}!x \iff \mathfrak{v}(x) \in \mathscr{A}(w)$. 因此 $\mathrm{E}!x$ 的直观涵义是 x 所指称的对象在当前世界存在.

把公理 UI° 和 PM 替换为自由全称例示公理
FUI $\mathrm{E}!y \to (\forall x\varphi \to \varphi(y/x))$ 和全存在公理 UE $\forall x \mathrm{E}!x$，可以得到 **QS** 的等价系统 **FQS**，这样看起来更像自由逻辑. FUI 等价于 $\mathrm{E}!y \wedge \varphi(y/x) \to \exists x\varphi$，而 UE 表达的是论域里的东西都是本体论承诺了的，所以都存在.

命题

系统 **QS** 和 **FQS** 等价.

证明： (⇒) (1) $(\forall x\varphi \to \varphi(z/x)) \to (z \equiv y \to (\forall x\varphi \to \varphi(y/x)))$　L, PL

(2) $\forall z(\forall x\varphi \to \varphi(z/x)) \to \forall z(z \equiv y \to (\forall x\varphi \to \varphi(y/x)))$

　　(1), UG, UD, MP (z 不在 $\varphi(x)$ 中出现)

(3) $\forall z(z \equiv y \to (\forall x\varphi \to \varphi(y/x)))$　(2), UI°, MP

(4) $\forall z\neg(\forall x\varphi \to \varphi(y/x)) \to \forall z\neg z \equiv y$

　　PL, UG, UD, MP, (3), MP, UD, MP

(5) $\mathrm{E}!y \to (\forall x\varphi \to \varphi(y/x))$　(4), VQ, PL, 逆否 , E!-定义

(1) $(\forall y\ y \not\equiv x \to x \not\equiv x) \to (x \equiv x \to \exists y\ y \equiv x)$　PL, ∃-定义

(2) $\forall x(x \equiv x \to \exists y\ y \equiv x)$　(1), UG, UD, MP, UI°, MP

(3) $\forall x\ x \equiv x \to \forall x\exists y\ y \equiv x$　(2), UD, MP

(4) $\forall x\mathrm{E}!x$　ID, UG, (3), MP, E!-定义

公理系统

$(\Leftarrow)$ (1) $\forall y \mathrm{E}!y \to \forall y(\forall x\varphi \to \varphi(y/x))$ FUI, UG, UD, MP
(2) $\forall y(\forall x\varphi \to \varphi(y/x))$ (1), UE, MP

(1) $\mathrm{E}!x \to (\forall x\forall y\varphi \to \forall y\varphi)$ FUI
(2) $\mathrm{E}!y \to (\forall y\varphi \to \varphi)$ FUI
(3) $\mathrm{E}!x \to (\mathrm{E}!y \to (\forall x\forall y\varphi \to \varphi))$ (1), (2), PL
(4) $\forall x\mathrm{E}!x \to (\forall x\mathrm{E}!y \to (\forall x\forall x\forall y\varphi \to \forall x\varphi))$ 对 (3) 反复用 UG, UD, MP
(5) $\forall x\mathrm{E}!x \to (\mathrm{E}!y \to (\forall x\forall y\varphi \to \forall x\varphi))$ (4), VQ, 等值替换
(6) $\forall y\forall x\mathrm{E}!x \to (\forall y\mathrm{E}!y \to (\forall y\forall x\forall y\varphi \to \forall y\forall x\varphi))$
对 (5) 反复用 UG, UD, MP
(7) $\forall x\mathrm{E}!x \to (\forall y\mathrm{E}!y \to (\forall x\forall y\varphi \to \forall y\forall x\varphi))$ (6), VQ, 等值替换
(8) $\forall x\forall y\varphi \to \forall y\forall x\varphi$ (7), UE, MP, UE, MP ■

从这个证明可以看出公理 PM 在 **QS** 不独立. 但 Kit Fine(1983) 证明，在没有等词公理的情况下，它是独立的.

公理系统

命题

$\vdash_{\mathbf{QS}} x \equiv y \to \Box x \equiv y$（记为 NI）
若 **S** 有 B 公理，则 $\vdash_{\mathbf{QS}\ominus\mathrm{ND}} x \not\equiv y \to \Box x \not\equiv y$

证明： (1) $x \equiv y \to (\Box x \equiv x \to \Box x \equiv y)$ L
(2) $\Box x \equiv x \to (x \equiv y \to \Box x \equiv y)$ (1), PL
(3) $x \equiv y \to \Box x \equiv y$ ID, RN, (2), MP
(4) $\Diamond x \equiv y \to \Diamond\Box x \equiv y$ (3), ML
(5) $\Box\Diamond x \not\equiv y \to \Box x \not\equiv y$ (4), 逆否
(6) $x \not\equiv y \to \Box x \not\equiv y$ (5), B, PL ■

公理系统

完全性证明中需要下面这个命题.

命题

$\vdash_{\mathbf{QS}} \neg\forall y_1 \ldots \forall y_k \neg \bigwedge_{i=1}^{k}(\varphi_i(y_i/x_i) \to \forall x_i\varphi_i)$，对所有 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$，$y_j$ 不在 $\forall x_i\varphi_i$ 中出现.

证明： 先证明两个需要的内定理.

(†) $\vdash_{\mathbf{QS}} \neg\forall y\neg(\varphi(y/x) \to \forall x\varphi)$，$y$ 不在 $\forall x\varphi$ 中出现.

(1) $\neg(\varphi(y/x) \to \forall x\varphi) \to \varphi(y/x)$ PL

(2) $\forall y\neg(\varphi(y/x) \to \forall x\varphi) \to \forall y\varphi(y/x)$ (1), UG, UD, MP

(3) $\forall y\neg(\varphi(y/x) \to \forall x\varphi) \to \forall x\varphi$ (2), 易字

(4) $\neg(\varphi(y/x) \to \forall x\varphi) \to \neg\forall x\varphi$ PL

(5) $\forall y\neg(\varphi(y/x) \to \forall x\varphi) \to \forall y\neg\forall x\varphi$ (4), UG, UD, MP

(6) $\forall y\neg(\varphi(y/x) \to \forall x\varphi) \to \neg\forall x\varphi$ (5), VQ, PL

(7) $\neg\forall y\neg(\varphi(y/x) \to \forall x\varphi)$ (3), (6), PL

(‡) $\vdash_{\mathbf{QS}} \forall x(\varphi \vee \psi) \to \varphi \vee \forall x\psi$，$x$ 不在 φ 中自由出现.

据 UD, VQ 易得，$\vdash_{\mathbf{QS}} \forall x(\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \forall x\psi)$，再由 $\vee$ 的定义即可.

公理系统

下面正式来证命题.

(1) $\neg\bigwedge_{i=1}^{k}(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)\to\bigvee_{i=1}^{k}\neg(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)$ PL

(2) $\forall y_1\ldots\forall y_k\neg\bigwedge_{i=1}^{k}(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)\to$
$\forall y_1\ldots\forall y_k\bigvee_{i=1}^{k}\neg(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)$ (1), UG, UD, MP

(3) $\forall y_k\bigvee_{i=1}^{k}\neg(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)\to$
$\bigvee_{i=1}^{k-1}\neg(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)\vee\forall y_k\neg(\varphi_k(y_k/x_k)\to\forall x_k\varphi_k)$ (‡), PL

(4) $\neg\forall y_k\neg(\varphi_k(y_k/x_k)\to\forall x_k\varphi_k)$ (†)

(5) $\forall y_k\bigvee_{i=1}^{k}\neg(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)\to\bigvee_{i=1}^{k-1}\neg(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)$ (3), (4), PL

(6) $\forall y_{k-1}\forall y_k\bigvee_{i=1}^{k}\neg(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)\to$
$\forall y_{k-1}\bigvee_{i=1}^{k-1}\neg(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)$ (5), UG, UD, MP

(7) $\forall y_1\ldots\forall y_k\bigvee_{i=1}^{k}\neg(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)\to$
$\forall y_1\neg(\varphi_1(y_1/x_1)\to\forall x_1\varphi_1)$ 重复 (3) – (6)

(8) $\forall y_1\ldots\forall y_k\neg\bigwedge_{i=1}^{k}(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)\to$
$\forall y_1\neg(\varphi_1(y_1/x_1)\to\forall x_1\varphi_1)$ (2), (7), PL

(9) $\neg\forall y_1\neg(\varphi_1(y_1/x_1)\to\forall x_1\varphi_1)$ (†)

(10) $\neg\forall y_1\ldots\forall y_k\neg\bigwedge_{i=1}^{k}(\varphi_i(y_i/x_i)\to\forall x_i\varphi_i)$ (8), (9), PL ■

刻画定理

我们将要证明 $\vdash_{\mathbf{QS}} = \vDash_{\mathcal{F}_{\mathbf{S}}}$，其中 $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ 指正规模态系统 **S** 刻画的框架类.
QS 的可靠性是容易证明的.
QS 的完全性仍用亨金方法证明，只需把一阶逻辑和命题模态逻辑中所需的步骤综合起来即可. 证明无非是分两大步，先证任何一致的公式集都能扩充为亨金集，再构造典范模型并证亨金定理.

定义 (QS-亨金集)

给定一阶模态语言 $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$，公式集 $\Delta \subseteq \mathrm{FL}(\mathcal{L}_2)$ 是关于 $\mathbf{Var}_1$ 的 **QS**-亨金集，如果：

⋆ Δ 是 **QS**-极大一致集（定义如常）;

⋆ Δ 关于 $\mathbf{Var}_1$ 包含证据：对所有 $\forall x\varphi \in \mathrm{FL}(\mathcal{L}_2)$，都存在 $y \in \mathbf{Var}_1$，使得 $\varphi(y/x) \to \forall x\varphi \in \Delta$;

⋆ Δ 关于 $\mathbf{Var}_1$ 包含实例：对所有 $\forall x\varphi \in \mathrm{FL}(\mathcal{L}_2)$，和所有 $y \in \mathbf{Var}_1$，都有 $\forall x\varphi \to \varphi(y/x) \in \Delta$.

之所以 **QS**-亨金集要包含实例公式，是因为全称例示公理不成立.

刻画定理

引理 (QS-林登鲍姆-亨金引理)

对任何 $\mathcal{L}_{\Box}^{1=}$ 中的 **QS**-一致的公式集 Γ，都存在 $(\mathcal{L}_{\Box}^{1=})' \supseteq \mathcal{L}_{\Box}^{1=}$，$\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Var}'$，使得 Γ 在 $(\mathcal{L}_{\Box}^{1=})'$ 中能扩充为关于 $\mathbf{V}$ 的 **QS**-亨金集 Δ.

证明： 向 $\mathcal{L}_{\Box}^{1=}$ 添加可数无穷多个新变元把其膨胀为 $(\mathcal{L}_{\Box}^{1=})'$，则 $(\mathcal{L}_{\Box}^{1=})'$ 可数无穷，从而 $\mathrm{FL}((\mathcal{L}_{\Box}^{1=})')$ 也可数无穷. 把 $\mathrm{FL}((\mathcal{L}_{\Box}^{1=})')$ 中所有以 $\forall$ 开头的公式不重复地枚举出来：$\forall x_0\varphi_0, \forall x_1\varphi_1, \forall x_2\varphi_2, \ldots$
递归定义证据公式如下：

$$\psi_0 := \varphi_0(y_0/x_0) \to \forall x_0\varphi_0$$

其中 y_0 是第一个不在 $\Gamma \cup \{\forall x_0\varphi_0\}$ 中出现的新变元，

$$\psi_{n+1} := \varphi_{n+1}(y_{n+1}/x_{n+1}) \to \forall x_{n+1}\varphi_{n+1}$$

其中 y_{n+1} 是第一个不在 $\Gamma \cup \{\psi_m \mid 0 \leqslant m \leqslant n\} \cup \{\forall x_{n+1}\varphi_{n+1}\}$ 中出现的新变元.

刻画定理

令 $\Xi := \Gamma \cup \Psi \cup \Lambda$，其中证据公式集 $\Psi := \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$，实例公式集 $\Lambda := \{\forall x\phi \to \phi(z/x) \mid \forall x\phi \in \mathrm{FL}((\mathcal{L}^{1=}_{\Box})'), z \in \mathbf{Var}' \setminus \mathbf{Var}\}$.
下证 Ξ 是 **QS**-一致的. 若不然存在有穷的 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$，$\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Psi$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Lambda$，据句法紧致性有 $\Gamma_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \psi_1, \ldots, \psi_n \vdash_{\mathbf{QS}} \bot$，则

$$\vdash_{\mathbf{QS}} \bigwedge \Gamma_0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i \to \neg \bigwedge_{j=1}^{n} \psi_j$$

反复使用 UD 和 UG 得

$$\vdash_{\mathbf{QS}} \forall z_1 \ldots \forall z_m \bigwedge \Gamma_0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \forall z_1 \ldots \forall z_m \alpha_i \to \forall z_1 \ldots \forall z_m \neg \bigwedge_{j=1}^{n} \psi_j$$

对所有 $1 \leqslant i \leqslant m$，由于 $\alpha_i := \forall x\phi \to \phi(z_i/x)$，由 $\mathrm{UI}^{\circ}, \mathrm{UG}, \mathrm{PM}$ 知，$\vdash_{\mathbf{QS}} \forall z_1 \ldots \forall z_m \alpha_i$，而 z_i 均是新变元，故不在 Γ_0 中出现，再由 VQ 得

刻画定理

$$\vdash_{\mathbf{QS}} \bigwedge \Gamma_0 \wedge \to \forall z_1 \ldots \forall z_m \neg \bigwedge_{j=1}^{n} \psi_j$$

由于 y_j 均是新变元，故不在 Γ_0 中出现，据 UI°、UG、VQ 和 PM 得

$$\vdash_{\mathbf{QS}} \bigwedge \Gamma_0 \wedge \to \forall z_1 \ldots \forall z_m \forall y_1 \ldots \forall y_n \neg \bigwedge_{j=1}^{n} \psi_j$$

即 $\Gamma \vdash_{\mathbf{QS}} \forall z_1 \ldots \forall z_m \forall y_1 \ldots \forall y_n \neg \bigwedge_{j=1}^{n} \psi_j$. 又因为已证
$\vdash_{\mathbf{QS}} \neg \forall y_1 \ldots \forall y_n \neg \bigwedge_{j=1}^{n} \psi_j$，于是有 $\Gamma \vdash_{\mathbf{QS}} \forall z_1 \ldots \forall z_m \bot$，再由 VQ，
$\Gamma \vdash_{\mathbf{QS}} \bot$，这与 Γ 是 **QS**-一致的矛盾！
因此 Ξ 是 **QS**-一致的，由林登鲍姆引理，Ξ 可以扩充为 **QS**-极大一致集 Δ，此时 Δ 是 $(\mathcal{L}_{\Box}^{1=})'$ 中关于 $\mathbf{Var}' \setminus \mathbf{Var}$ 的 **QS**-亨金集. ■

刻画定理

先定义一个二元关系 $\sim_\Gamma$:

$$x \sim_\Gamma y :\Longleftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{QS}} x \equiv y$$

容易证明这是一个等价关系.

定义 (QS-典范模型)

$\star$ $\mathscr{W}^{\mathbf{QS}} := \{(\Delta, \mathbf{V}) \mid \Delta$ 是 $(\mathcal{L}_\Box^{1=})' \supseteq \mathcal{L}_\Box^{1=}$ 中关于 $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Var}'$ 的 **QS**-亨金集 $\}$;
$\star$ $\mathscr{R}^{\mathbf{QS}}(\Delta_1, \mathbf{V}_1)(\Delta_2, \mathbf{V}_2)$,当且仅当,对所有 $\Box\varphi \in \Delta_1$ 有 $\varphi \in \Delta_2$;
$\star$ $\mathscr{D}^{\mathbf{QS}} = \bigcup_{(\Delta,\mathbf{V}) \in \mathscr{W}^{\mathbf{QS}}} \{[x]_{\sim_\Delta} \mid x \in \bigcup\{\mathbf{Var}' \mid (\mathcal{L}_\Box^{1=})' \supseteq \mathcal{L}_\Box^{1=}\}\}$;
$\star$ $\mathscr{A}^{\mathbf{QS}}((\Delta, \mathbf{V})) = \{[x]_{\sim_\Delta} \mid x \in \mathbf{V}\}$;
$\star$ $\mathscr{I}^{\mathbf{QS}}((\Delta, \mathbf{V}), P)[x_1]_{\sim_{\Delta_1}} \ldots [x_n]_{\sim_{\Delta_n}}$,当且仅当,$\Delta_1 = \cdots = \Delta_n = \Delta$,且 $\Delta \vdash_{\mathbf{QS}} Px_1 \ldots x_n$.
称 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}} = \{\mathscr{W}^{\mathbf{QS}}, \mathscr{R}^{\mathbf{QS}}, \mathscr{D}^{\mathbf{QS}}, \mathscr{A}^{\mathbf{QS}}, \mathscr{I}^{\mathbf{QS}}\}$ 为 **QS**-典范模型.

刻画定理

定义 (QS-典范指派)

给定 $(\Delta, \mathbf{V}) \in \mathscr{W}^{\mathbf{QS}}$，称 $\mathfrak{v}_{\Delta}^{\mathbf{QS}} : \bigcup\{\mathbf{Var}' \mid (\mathcal{L}_{\Box}^{1=})' \supseteq \mathcal{L}_{\Box}^{1=}\} \to \mathscr{D}^{\mathbf{QS}}$，$x \mapsto [x]_{\sim_\Delta}$ 为 **QS-Δ-**典范指派.

引理

任给 $(\Delta_1, \mathbf{V}_1), (\Delta_2, \mathbf{V}_2) \in \mathscr{W}^{\mathbf{QS}}$，若 $\mathscr{R}^{\mathbf{QS}}(\Delta_1, \mathbf{V}_1)(\Delta_2, \mathbf{V}_2)$，则对任意 $x \in \bigcup\{\mathbf{Var}' \mid (\mathcal{L}_{\Box}^{1=})' \supseteq \mathcal{L}_{\Box}^{1=}\}$，$\mathfrak{v}_{\Delta_1}^{\mathbf{QS}}(x) = \mathfrak{v}_{\Delta_2}^{\mathbf{QS}}(x)$.

证明： 只需证 $[x]_{\sim_{\Delta_1}} = [x]_{\sim_{\Delta_2}}$. 若 $y \in [x]_{\sim_{\Delta_1}}$，则 $\Delta_1 \vdash_{\mathbf{QS}} x \equiv y$，由于 Δ_1 极大一致，$x \equiv y \in \Delta_1$，据 NI，$\Box x \equiv y \in \Delta_1$，而 $\mathscr{R}^{\mathbf{QS}}(\Delta_1, \mathbf{V}_1)(\Delta_2, \mathbf{V}_2)$，所以 $x \equiv y \in \Delta_2$，因此 $y \in [x]_{\sim_{\Delta_2}}$，从而 $[x]_{\sim_{\Delta_1}} \subseteq [x]_{\sim_{\Delta_2}}$. 若 $y \notin [x]_{\sim_{\Delta_1}}$，据 ND 同理可证，$y \notin [x]_{\sim_{\Delta_2}}$，从而 $[x]_{\sim_{\Delta_1}} \supseteq [x]_{\sim_{\Delta_2}}$. ■

刻画定理

定理 (QS-亨金定理)

任给 $(\Delta, \mathbf{V}) \in \mathscr{W}^{\mathbf{QS}}$，设 $\Delta \subseteq \mathrm{FL}((\mathcal{L}_{\Box}^{1=})')$，则任给 $\varphi \in \mathrm{FL}((\mathcal{L}_{\Box}^{1=})')$，有

$$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}_{\Delta}^{\mathbf{QS}}, (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash \varphi \iff \Delta \vdash_{\mathbf{QS}} \varphi.$$

证明： 施归纳于 φ 的复杂度.

$\star$ $\varphi = Px_1 \ldots x_n$ 时，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}_{\Delta}^{\mathbf{QS}}, (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash Px_1 \ldots x_n$，当且仅当，
$(\mathfrak{v}_{\Delta}^{\mathbf{QS}}(x_1), \ldots, \mathfrak{v}_{\Delta}^{\mathbf{QS}}(x_n)) \in \mathscr{I}^{\mathbf{QS}}((\Delta, \mathbf{V}), P)$，当且仅当，
$\mathscr{I}^{\mathbf{QS}}((\Delta, \mathbf{V}), P)[x_1]_{\sim_\Delta} \ldots [x_n]_{\sim_\Delta}$，当且仅当，$\Delta \vdash_{\mathbf{QS}} Px_1 \ldots x_n$.

$\star$ $\varphi = x \equiv y$ 时，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}_{\Delta}^{\mathbf{QS}}, (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash x \equiv y$，当且仅当，
$\mathfrak{v}_{\Delta}^{\mathbf{QS}}(x) \equiv \mathfrak{v}_{\Delta}^{\mathbf{QS}}(y)$，当且仅当，$[x]_{\sim_\Delta} = [y]_{\sim_\Delta}$，当且仅当，$x \sim_\Delta y$，当且仅当，$\Delta \vdash_{\mathbf{QS}} x \equiv y$.

$\star$ $\varphi =$ 布尔公式时，据归纳假设和极大一致集性质易证.

刻画定理

$\star$ $\varphi = \forall x\psi$ 时，
$(\Rightarrow)$ 若 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}, (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash \forall x\psi$，任给 $y \in \mathbf{V}$，则 $[y]_{\sim_\Delta} \in \mathscr{A}^{\mathbf{QS}}((\Delta, \mathbf{V}))$，故 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}[[y]_{\sim_\Delta}/x], (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash \psi$，由于 $\mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}(y) = [y]_{\sim_\Delta}$，据替换引理，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}, (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash \psi(y/x)$，由归纳假设，$\Delta \vdash_{\mathbf{QS}} \psi(y/x)$，而 Δ 关于 $\mathbf{V}$ 包含证据，所以 $\Delta \vdash_{\mathbf{QS}} \forall x\psi$.
$(\Leftarrow)$ 若 $\Delta \vdash_{\mathbf{QS}} \forall x\psi$，由于 Δ 关于 $\mathbf{V}$ 包含实例，故对所有 $y \in \mathbf{V}$，$\Delta \vdash_{\mathbf{QS}} \psi(y/x)$，由归纳假设，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}, (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash \psi(y/x)$，由于 $\mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}(y) = [y]_{\sim_\Delta}$，据替换引理，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}[[y]_{\sim_\Delta}/x], (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash \psi$，由 y 的任意性，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}, (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash \forall x\psi$.

$\star$ $\varphi = \Box\psi$ 时，
$(\Leftarrow)$ 若 $\Delta \vdash_{\mathbf{QS}} \Box\psi$，则 $\Box\psi \in \Delta$，则对任意 $(\Delta^*, \mathbf{V}^*) \in \mathscr{R}^{\mathbf{QS}}((\Delta, \mathbf{V}))$，有 $\psi \in \Delta^*$，则 $\Delta^* \vdash_{\mathbf{QS}} \psi$，由归纳假设，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta^*}, (\Delta^*, \mathbf{V}^*) \Vdash \psi$，由 $(\Delta^*, \mathbf{V}^*)$ 的任意性，以及 $\mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta} = \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta^*}$，有 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}, (\Delta, \mathbf{V}) \Vdash \Box\psi$.

刻画定理

$(\Rightarrow)$ 若 $\Delta \nvdash_{\mathbf{QS}} \Box\psi$，则 $\Box\psi \notin \Delta$，考虑公式集 $\Theta = \{\delta \mid \Box\delta \in \Delta\} \cup \{\neg\psi\}$，$\Theta$ 是 **QS**-一致的，若不然则存在 $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Theta$，使得 $\vdash_{\mathbf{QS}} \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n \to \psi$，进而 $\vdash_{\mathbf{QS}} \Box\delta_1 \wedge \ldots \wedge \Box\delta_n \to \Box\psi$，因为 $\Box\delta_1, \ldots, \Box\delta_n \in \Delta$，所以 $\Box\psi \in \Delta$，矛盾！由 **QS**-林登鲍姆-亨金引理，Θ 可以在 $(\mathcal{L}^{1=}_{\Box})'' \supseteq (\mathcal{L}^{1=}_{\Box})'$ 中能扩充为关于 $\mathbf{V}^* \subseteq \mathbf{Var}''$ 的 **QS**-亨金集 Δ^*，显然 $\Delta^* \nvdash_{\mathbf{QS}} \psi$，由归纳假设，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta^*}, (\Delta^*, \mathbf{V}^*) \nVdash \psi$，而据 **QS**-典范关系定义有 $\mathscr{R}^{\mathbf{QS}}(\Delta, \mathbf{V})(\Delta^*, \mathbf{V}^*)$，则 $\mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta} = \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta^*}$，从而 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}}_{\Delta}, (\Delta, \mathbf{V}) \nVdash \Box\psi$. ■

定理 (QS 的刻画定理)

设框架类 $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ 满足 $\vDash_{\mathcal{F}_{\mathbf{S}}} = \vdash_{\mathbf{S}}$，若 $\mathfrak{F}^{\mathbf{QS}} \in \mathcal{F}_{\mathbf{S}}$，则 $\vdash_{\mathbf{QS}} = \vDash_{\mathcal{F}_{\mathbf{S}}}$.

巴坎公式

“某物必然存在”有两种涵义：一是“某物存在”这句话是必然的；二是指某物具有“必然存在”这一性质. 经院哲学家对此作了区分，称前者为从言必然性，后者为从物必然性.

定义 (从物模态公式、从言模态公式)

称 φ 为从物模态公式，如果 φ 中有变元自由出现在模态词的辖域内；否则称 φ 为从言模态公式.

巴坎公式和其逆建立了某类从言模态公式和从物模态公式之间的联系.

BF $\quad \forall x\Box\varphi \to \Box\forall x\varphi \qquad\qquad$ CBF $\quad \Box\forall x\varphi \to \forall x\Box\varphi$

命题

$\mathrm{BF}, \mathrm{CBF}$ 相对于 $\mathcal{K}$ 都是不有效的.

由完全性 $\mathrm{BF}, \mathrm{CBF}$ 都不是 **QK** 的内定理.

巴坎公式

那么应该满足什么样的条件才能使 BF, CBF 有效呢？

命题

任给骨架 $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A} \rangle$.
$\mathfrak{S} \Vdash$ CBF，当且仅当，对任意 $w, u \in \mathscr{W}$，若 $\mathscr{R}wu$，则 $\mathscr{A}(w) \subseteq \mathscr{A}(u)$（此时称 $\mathfrak{S}$ 是扩张的）；
$\mathfrak{S} \Vdash$ BF，当且仅当，对任意 $w, u \in \mathscr{W}$，若 $\mathscr{R}wu$，则 $\mathscr{A}(w) \supseteq \mathscr{A}(u)$（此时称 $\mathfrak{S}$ 是收缩的）.

证明： $(\Leftarrow)$ 给定扩张骨架 $\mathfrak{S}$，任给基于它的指派点模型 $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \rangle$，设 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \Box\forall x\varphi$. 则对任意 $u \in \mathscr{R}(w)$，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, u \Vdash \forall x\varphi$，且 $\mathscr{A}(w) \subseteq \mathscr{A}(u)$. 则对任意 $\mathrm{d} \in \mathscr{A}(w)$，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/x], u \Vdash \varphi$. 由 u 的任意性，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/x], w \Vdash \Box\varphi$，再由 d 的任意性，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \forall x\Box\varphi$.
$(\Rightarrow)$ 给定骨架 $\mathfrak{S}$，设 $\mathfrak{S} \Vdash$ CBF. 假设 $\mathfrak{S}$ 不是扩张骨架，则存在 $w, u \in \mathscr{W}$，使得 $\mathscr{R}wu$，且存在 $\mathrm{d} \in \mathscr{A}(w)$ 但 $\mathrm{d} \notin \mathscr{A}(u)$. 对所有 $v \in \mathscr{W}$，令 $\mathscr{I}(v, P) = \mathscr{A}(v)$. 则 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \Box\forall xPx$，但 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \nVdash \forall x\Box Px$. 矛盾！

($\Leftarrow$) 给定收缩骨架 $\mathfrak{S}$，任给基于它的指派点模型 $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{v},w\rangle$，设 $\mathfrak{M},\mathfrak{v},w\Vdash\forall x\Box\varphi$. 则对任意 $\mathrm{d}\in\mathscr{A}(w)$，$\mathfrak{M},\mathfrak{v}[\mathrm{d}/x],w\Vdash\Box\varphi$. 则对任意 $u\in\mathscr{R}(w)$，$\mathfrak{M},\mathfrak{v},u\Vdash\varphi$，且 $\mathscr{A}(w)\supseteq\mathscr{A}(u)$. 因此由 d 的任意性，$\mathfrak{M},\mathfrak{v},u\Vdash\forall x\varphi$，再由 u 的任意性，$\mathfrak{M},\mathfrak{v}[\mathrm{d}/x],w\Vdash\Box\forall x\varphi$.

($\Rightarrow$) 给定骨架 $\mathfrak{S}$，设 $\mathfrak{S}\Vdash\mathrm{BF}$. 假设 $\mathfrak{S}$ 不是收缩骨架，则存在 $w,u\in\mathscr{W}$，使得 $\mathscr{R}wu$，且存在 $\mathrm{d}\in\mathscr{A}(u)$ 但 $\mathrm{d}\notin\mathscr{A}(w)$. 对所有 $v\in\mathscr{W}$，令 $\mathscr{I}(v,P)=\mathscr{D}$. 则 $\mathfrak{M},\mathfrak{v},w\Vdash\forall x\Box Px$，但 $\mathfrak{M},\mathfrak{v},w\nVdash\Box\forall xPx$. 矛盾！ ■

则 $\mathfrak{S}\Vdash\mathrm{BF}\wedge\mathrm{CBF}$，当且仅当，对任意 $w,u\in\mathscr{W}$，若 $\mathscr{R}wu$，则 $\mathscr{A}(w)=\mathscr{A}(u)$. 此时我们称 $\mathfrak{S}$ 是局部常域骨架. 据此我们可以通过巴坎公式及其逆建立起变域语义与常域语义的联系，详细略.

巴坎公式

命题

若 S 有 B 公理，则 $\vdash_{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}} \mathrm{BF}$.

证明： (1) $\Box\forall x(\forall x\Box\varphi \to \Box\varphi)$ $\quad \mathrm{UI}^{\circ}, \mathrm{RN}$

(2) $\forall x\Box(\forall x\Box\varphi \to \Box\varphi)$ $\quad (1), \mathrm{CBF}, \mathrm{MP}$

(3) $\forall x\Box(\forall x\Box\varphi \to \Box\varphi) \to \forall x(\Diamond\forall x\Box\varphi \to \Diamond\Box\varphi)$ $\quad \mathrm{ML}, \mathrm{UG}, \mathrm{UD}, \mathrm{MP}$

(4) $\forall x(\Diamond\forall x\Box\varphi \to \Diamond\Box\varphi)$ $\quad (2), (3), \mathrm{MP}$

(5) $\forall x(\Diamond\Box\varphi \to \varphi)$ $\quad \mathrm{B}, \mathrm{UG}$

(6) $\forall x\Diamond\forall x\Box\varphi \to \forall x\varphi$ $\quad (4), \mathrm{UD}, \mathrm{MP}, (5), \mathrm{UD}, \mathrm{MP}, \mathrm{PL}$

(7) $\Diamond\forall x\Box\varphi \to \forall x\varphi$ $\quad (6), \mathrm{VQ}, \mathrm{PL}$

(8) $\Box\Diamond\forall x\Box\varphi \to \Box\forall x\varphi$ $\quad (7), \mathrm{RN}, \mathrm{K}, \mathrm{MP}$

(9) $\forall x\Box\varphi \to \Box\forall x\varphi$ $\quad (8), \mathrm{B}, \mathrm{MP}$ $\quad \blacksquare$

By the way，如果从语义角度看，这个命题是显然的.

巴坎公式

在证明 $\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}$ 和 $\mathbf{QS}\oplus\mathrm{BF}$ 的完全性时，我们需要下面这个命题.

命题

$\vdash_{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}} \exists y\ y\equiv x\to\Box\exists y\ y\equiv x$ $\qquad$ $\vdash_{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{BF}} \Diamond\exists y\ y\equiv x\to\exists y\ y\equiv x$

证明： (1) $\forall x(\forall y\neg y\equiv x\to\neg x\equiv x)$ $\quad$ FUI

(2) $\forall x(x\equiv x\to\exists y\ y\equiv x)$ $\quad$ (1), PL, ∃-定义

(3) $\forall x\ x\equiv x$ $\quad$ ID, UG

(4) $\Box\forall x\exists y\ y\equiv x$ $\quad$ (2), UD, MP, (3), MP, RN

(5) $\forall x\Box\exists y\ y\equiv x$ $\quad$ (4), CBF, MP

(6) $\mathrm{E}!x\to(\forall x\Box\exists y\ y\to\Box\exists y\ y\equiv x)$ $\quad$ FUI

(7) $\exists y\ y\equiv x\to\Box\exists y\ y\equiv x$ $\quad$ (6), PL, (5), MP, E!-定义

(1) $\forall y\ x\not\equiv y\to\forall y\Box x\not\equiv y$ $\quad$ ND, UG, UD, MP

(2) $\forall y\ x\not\equiv y\to\Box\forall y\ x\not\equiv y$ $\quad$ (1), BF, PL

(3) $\Diamond\exists y\ x\equiv y\to\exists y\ x\equiv y$ $\quad$ (2), 逆否 $\quad$ ■

事实上，$\mathfrak{S}\Vdash\mathrm{CBF}\iff\mathfrak{S}\Vdash\mathrm{E}!x\to\Box\mathrm{E}!x$，$\mathfrak{S}\Vdash\mathrm{BF}\iff\mathfrak{S}\Vdash\Diamond\mathrm{E}!x\to\mathrm{E}!x$.

巴坎公式

定理 ($\mathbf{QS} \oplus$ CBF 和 $\mathbf{QS} \oplus$ BF 的刻画定理)

设框架类 $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ 满足 $\vDash_{\mathcal{F}_{\mathbf{S}}} = \vdash_{\mathbf{S}}$，$\mathcal{S}_{\mathbf{S},\mathrm{CBF}}$ 和 $\mathcal{S}_{\mathbf{S},\mathrm{BF}}$ 分别是基于 $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ 的所有扩张骨架和收缩骨架的类. 若 $\mathfrak{F}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}, \mathfrak{F}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{BF}} \in \mathcal{F}_{\mathbf{S}}$，则 $\vdash_{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}} = \vDash_{\mathcal{S}_{\mathbf{S},\mathrm{CBF}}}$，$\vdash_{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{BF}} = \vDash_{\mathcal{S}_{\mathbf{S},\mathrm{BF}}}$.

证明： 可靠性易证. 完全性只需证 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}, \mathfrak{M}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{BF}}$ 分别是扩张和收缩的. 任给 $(\Delta_1, \mathbf{V}_1), (\Delta_2, \mathbf{V}_2) \in \mathscr{W}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}$，设 $\mathscr{R}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}(\Delta_1, \mathbf{V}_1)(\Delta_2, \mathbf{V}_2)$. 任给 $[x]_{\sim_{\Delta_1}} \in \mathscr{A}((\Delta_1, \mathbf{V}_1))$，由于 $\mathfrak{v}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}_{\Delta_1}(x) = [x]_{\sim_{\Delta_1}} \in \mathscr{A}((\Delta_1, \mathbf{V}_1))$，则 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}_{\Delta_1}, (\Delta_1, \mathbf{V}_1) \Vdash \mathrm{E}!x$，则 $\Delta_1 \vdash_{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}} \mathrm{E}!x$，又 $\vdash_{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}} \mathrm{E}!x \to \Box\mathrm{E}!x$，故有 $\vdash_{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}} \Box\mathrm{E}!x$，则 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}_{\Delta_1}, (\Delta_1, \mathbf{V}_1) \Vdash \Box\mathrm{E}!x$，由于 $\mathscr{R}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}(\Delta_1, \mathbf{V}_1)(\Delta_2, \mathbf{V}_2)$，有 $\mathfrak{v}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}_{\Delta_1} = \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}_{\Delta_2}$，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}, \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}_{\Delta_1}, (\Delta_2, \mathbf{V}_2) \Vdash \mathrm{E}!x$，则 $[x]_{\sim_{\Delta_1}} = \mathfrak{v}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}_{\Delta_2}(x) \in \mathscr{A}((\Delta_2, \mathbf{V}_2))$. 因此 $\mathscr{A}((\Delta_1, \mathbf{V}_1)) \subseteq \mathscr{A}((\Delta_2, \mathbf{V}_2))$，从而 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{CBF}}$ 是扩张模型.

运用 $\vdash_{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{BF}} \Diamond\mathrm{E}!x \to \mathrm{E}!x$，同理可证 $\mathfrak{M}^{\mathbf{QS}\oplus\mathrm{BF}}$ 是收缩模型. ■

巴坎公式

定理 ($\mathbf{QS4.1} \oplus \mathrm{BF} \oplus \mathrm{CBF}$ 的不完全性)

令 $\mathcal{S}$ 是基于自反、传递、终结框架的所有局部常域骨架的类，$\mathbf{M} = \mathbf{QS4.1} \oplus \mathrm{BF} \oplus \mathrm{CBF}$，则 $\vDash_{\mathcal{S}} \not\subseteq \vdash_{\mathbf{M}}$.

证明： 令 $\phi = \Box\exists x Px \to \Diamond\exists x\Box Px$，证明 $\vDash_{\mathcal{S}} \phi$，但 $\nvdash_{\mathbf{M}} \phi$.

任给基于 $\mathcal{S}$ 的指派点模型 $\langle\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w\rangle$，设 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \Box\exists x Px$ ①，但 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \Diamond\exists x\Box Px$ ②. 由于 $\mathscr{R}$ 具有终结性，所以必存在 $u \in \mathscr{R}(w)$ 使得 u 是终点. 由①知 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, u \Vdash \exists x Px$ ③，则存在 $\mathrm{d} \in \mathscr{A}(u)$，使得 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/x], u \Vdash \exists x Px$ ④. 由②知 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, u \nVdash \exists x\Box Px$ ⑤，由于 $\mathrm{d} \in \mathscr{A}(u)$，故有 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/x], u \nVdash \Box Px$ ⑥，则存在 $v \in \mathscr{R}(u)$，而 u 是终点，所以有 $u = v$，使得 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/x], u \nVdash Px$ ⑦. 于是④⑦矛盾! 再由 $\langle\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w\rangle$ 的任意性，有 $\vDash_{\mathcal{S}} \phi$.

巴坎公式

要证 $\nvdash_{\mathbf{M}} \phi$，只需证存在公式集 Φ，使得 $\mathrm{Th}(\mathbf{M}) \subseteq \Phi$ 但 $\phi \notin \Phi$.

令 $\Phi = \{\varphi \mid \mathfrak{N} \Vdash \varphi\}$，其中 $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \leqslant, \mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{I} \rangle$，对任意 $n \in \mathbb{N}$，$\mathscr{I}(n, P) = \{n\}$，且对任意谓词符 $Q \neq P$，$\mathscr{I}(n, Q) = \varnothing$.

因为对任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}[n/x], n \Vdash Px$，从而 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, n \Vdash \exists x Px$，又 $\{m \mid 0 \leqslant m\} = \mathbb{N}$，所以 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, 0 \Vdash \Box \exists x Px$. 对任意 $m, n \in \mathbb{N}$，若 $m \neq n$，则 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}[m/x], n \Vdash \neg Px$，由自反性 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}[m/x], n \Vdash \Diamond \neg Px$；若 $m = n$，则 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}[m/x], n+1 \Vdash \neg Px$，而 $n \leqslant n+1$，故 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}[m/x], n \Vdash \Diamond \neg Px$. 因此 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, n \Vdash \forall x \Diamond \neg Px$，从而 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, 0 \Vdash \Box \forall x \Diamond \neg Px$，即 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, 0 \nVdash \Diamond \exists x \Box Px$. 所以 $\mathfrak{N} \nVdash \phi$，即 $\phi \notin \Phi$.

要证 $\mathrm{Th}(\mathbf{M}) \subseteq \Phi$，只需证 $\mathbf{M}$ 的公理属于 Φ，规则保持属于 Φ 这个性质. 唯一不平凡情况的只有 $\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi \in \Phi$，其余都是显然的.

巴坎公式

为此需要证明**引理**：任给公式 φ，对任意指派 $\mathfrak{v}$，及自然数 $m \leqslant n$，若对所有 φ 中的自由变元 x，都有 $\mathfrak{v}(x) < m$，则

$$\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, n \Vdash \varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{N}, \mathfrak{v}, m \Vdash \varphi.$$

待证

任给公式 φ，及 $\mathfrak{N}$ 上的指派 $\mathfrak{v}$ 和世界 n. 设 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, n \Vdash \Box\Diamond\varphi$，考虑 $m \geqslant n$，且满足对 φ 中所有自由变元 x 有 $m > \mathfrak{v}(x)$，则 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, m \Vdash \Diamond\varphi$，进而存在 $k \geqslant m$，使得 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, k \Vdash \varphi$. 由引理，对所有 $l \geqslant k$，都有 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, l \Vdash \varphi$，因此 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, k \Vdash \Box\varphi$，而由传递性有 $k \geqslant n$，因此 $\mathfrak{N}, \mathfrak{v}, n \Vdash \Diamond\Box\varphi$. ■

更复杂的语言

仅用变元表示个体，而将常元和函数符划归于谓词符，在数学上是足够的，但在哲学上却不够恰当. 并且变元是严格指示词，我们需要引入其他符号来表示非严格指示词.

考虑“当今法国国王可能是秃头”和“可能地，当今法国国王是秃头”两个句子，它俩的涵义完全不同，但形式化后都写作 $\Diamond B\iota x.Fx$，无法区分是从言模态还是从物模态，因此需要引入抽象谓词（λ 表达式）.

定义 (复杂语言的合式公式)

同时相互递归定义语言 $\mathcal{L}^{1=}_{\Box\lambda\iota}$ 的项和合式公式如下：

$$\mathrm{Tm}(\mathcal{L}^{1=}_{\Box\lambda\iota}) \ni t ::= x_i \mid c_i \mid f_i^{\,j} t_1 \dots t_j \mid \iota x_i.\varphi$$

$$\mathrm{FL}(\mathcal{L}^{1=}_{\Box\lambda\iota}) \ni \varphi ::= P_i^j x_1 \dots x_j \mid x_i \equiv x_j \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \to \varphi_2) \mid \Box\varphi \mid \forall x_i \varphi \mid (\lambda x_i.\varphi)t$$

※ 替换的定义将变得复杂许多.

更复杂的语言

下面我们建立语义学.

定义 (模型)

仍称四元组 $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A} \rangle$ 为骨架，定义不变. 再加上解释映射 $\mathscr{I}$ 即为模型，此时 $\mathscr{I}$ 是可能世界集和非逻辑符号集上的二元映射，满足:

- ⋆ 对任意 n 元谓词符 P，$\mathscr{I}(w, P) \subseteq D^n$;
- ⋆ 对任意 n 元函数符 f，$\mathscr{I}(w, f)$ 是 D^n 到 D 的部分函数，即 $\mathrm{dom}(\mathscr{I}(w, f)) \subseteq D^n$;
- ⋆ 对任意个体常元 c，要么 $\mathscr{I}(w, c) \in D$，要么 $\mathscr{I}(w, c)$ 无定义.

变元指派的定义不变，因此仍是严格指示词.

之所以会出现 $\mathscr{I}(w, c)$ 无定义的情况，是因为我们我们的语言中存在大量无指称的空词项，比如“孙悟空”. 相应地，我们就需要把函数符解释成部分函数而非全函数，因为诸如“父亲（孙悟空）”是无指称的.

定义 (项的解释、可满足关系)

给定指派点模型 $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \rangle$，同时相互递归定义项 t 在其下的解释 $t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$，和公式 φ 被其满足即 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \varphi$ 如下：

- ⋆ $x^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$ 必有定义，且 $x^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w} = \mathfrak{v}(x)$；
- ⋆ $c^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$ 有定义当且仅当 $\mathscr{I}(w, c)$ 有定义，且在有定义时二者相等；
- ⋆ 当 ${t_1}^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}, \ldots, {t_n}^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$ 都有定义，且 $({t_1}^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}, \ldots, {t_n}^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}) \in \mathrm{dom}(\mathscr{I}(w, f))$ 时，$(ft_1 \ldots t_n)^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$ 有定义，且等于 $\mathscr{I}(w, f)({t_1}^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}, \ldots, {t_n}^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w})$，否则无定义；
- ⋆ 当存在唯一的 $\mathrm{d} \in \mathscr{D}$，使得 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/x], w \Vdash \psi$ 时，$(\iota x.\psi)^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$ 有定义，且等于 $\mathfrak{v}[\mathrm{d}/x](x)$，否则无定义；
- ⋆ φ 是 $Px_1 \ldots x_n$，$x \equiv y$，$\neg\psi$，$\psi_1 \to \psi_2$，$\Box\psi$，$\forall x \psi$ 时定义不变；
- ⋆ $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash (\lambda x.\psi)t$，当且仅当，$t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$ 有定义，且 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}/x], w \Vdash \psi$.

有效性、语义后承的定义不变.

更复杂的语言

定义一些缩写：

$\star$ $Pt_1 \dots t_n := (\lambda x_1 \dots x_n.Px_1 \dots x_n)t_1 \dots t_n$

$:=(\lambda x_1.(\dots(\lambda x_n.Px_1 \dots x_n)t_n)\dots)t_1$

$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash Pt_1 \dots t_n \iff (t_1^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}, \dots, t_n{}^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}) \in \mathscr{I}(w, P)$

$\star$ $t \approx s := (\lambda xy.x \equiv y)ts$， x, y 不在 t, s 中出现

$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash t \approx s \iff t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w} = s^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$

$\star$ $\mathrm{E}!t := (\lambda x.\exists y\ y \equiv x)t$

$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \mathrm{E}!t \iff t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w} \in \mathscr{A}(w)$

$\star$ $\mathrm{D}t := (\lambda x.x \equiv x)t$

$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \mathrm{D}t \iff t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$ 有定义

非严格指示词指称同一个对象是偶然的，但所指称对象的自我等同性是必然的.

命题

$\nvDash_K t \approx s \to \Box t \approx s$　　　　$\vDash_K t \approx s \to (\lambda xy.\Box x \equiv y)ts$

证明： 构造反模型 $\mathfrak{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A}, \mathscr{I} \rangle$，其中 $\mathscr{W} = \{w, u\}$，$\mathscr{R} = \{(w, u)\}$，$\mathscr{D} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$，$\mathscr{A}(w) = \mathscr{A}(u) = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$，$\mathscr{I}(w, c_1) = \mathscr{I}(w, c_2) = \mathscr{I}(u, c_1) = \{\mathrm{a}\}$，$\mathscr{I}(u, c_2) = \{\mathrm{b}\}$. 任给指派 $\mathfrak{v}$，则 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash c_1 \approx c_2$，但是 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, u \nVdash c_1 \approx c_2$，从而 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash \Box c_1 \approx c_2$.

任给 $\mathfrak{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A}, \mathscr{I} \rangle$，及其上的指派 $\mathfrak{v}$ 和世界 w. 若 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash t \approx s$，则 $t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w} = s^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$，所以对任意 $u \in \mathscr{R}(w)$，有 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}/x][s^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}/y], u \Vdash x \equiv y$，从而 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}/x][s^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}/y], w \Vdash \Box x \equiv y$，$\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}/x], w \Vdash (\lambda y.\Box x \equiv y)s$，进而 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash (\lambda x.(\lambda y.\Box x \equiv y)s)t$. ∎

更复杂的语言

下面这个命题揭示了摹状词实质.

命题

$\vDash_K t \approx \iota x.\varphi \to (\lambda x.\varphi)t$

$\vDash_K t \approx \iota x.\varphi \to ((\lambda x.\varphi)s \to s \approx t)$

证明： 任给 $\mathfrak{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{A}, \mathscr{I} \rangle$，及其上的指派 $\mathfrak{v}$ 和世界 w. 若 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash t \approx \iota x.\varphi$，则 $t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w} = (\iota x.\varphi)^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$. 由于 $(\iota x.\varphi)^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$ 有定义，所以存在唯一的 $\mathrm{d} \in \mathscr{D}$，使得 $(\iota x.\varphi)^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w} = \mathrm{d}$，且 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[\mathrm{d}/x], w \Vdash \varphi$，即 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}/x], w \Vdash \varphi$，因此 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash (\lambda x.\varphi)t$.
若还有 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash (\lambda x.\varphi)s$，则 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}[s^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}/x], w \Vdash \varphi$，由唯一性知 $s^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w} = \mathrm{d} = t^{\mathfrak{M},\mathfrak{v},w}$，所以 $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}, w \Vdash t \approx s$. ■

更复杂的语言

目前相对于上述语义完全的演算系统有表列系统，见 M.Fitting & R.L.Mendelsohn(1998).

据消息人士透露，已经有学者构造出了含摹状词的一阶模态矢列系统，但尚未发表.

目前似乎还没有公理系统. 由于表列系统与语义过于接近，故其对公理系统的构造没有什么启发作用.

要构造公理系统，似乎需要添加公理 $t \approx \iota x.\varphi \to (\lambda x.\varphi)t$, $t \approx \iota x.\varphi \to ((\lambda x.\varphi)s \to s \approx t)$，以处理摹状词. 但更为关键的是构造关于 λ 表达式的公理和规则. 可能的有 $(\lambda x.\varphi \to \psi)t \to ((\lambda x.\varphi)t \to (\lambda x.\psi)t)$, $(\lambda x.\neg\varphi)t \to \neg(\lambda x.\varphi)t$, $\dfrac{\varphi \to \psi}{(\lambda x.\varphi)t \to (\lambda x.\psi)t}$. 复杂的是我们需要什么公理去处理形如 $(\lambda x.\forall y\varphi)t$, $(\lambda x.\Box\varphi)t$ 的公式?

参考文献

[1] 文学锋. 模态逻辑教程 [M]. 北京: 科学出版社 , 2020
[2] 周北海. 模态逻辑导论 [M]. 北京: 北京大学出版社 , 1997
[3] Hughes, G. & Cresswell, M. *A New Introduction to Modal Logic.* Routledge, 1996
[4] Fitting, M. & Mendelsohn, R.L. *First – Order Modal Logic.* Springer, 1998