罗素的分支类型论

刘力恺

2021 年 3 月

数理逻辑的开端

数理逻辑无非是形式逻辑的精确和完备的表述，它有两个完全不同的方面：一方面，它是数学的一部分，处理着类、关系、符号组合等等，以代替数、函数、几何图形等等；另一方面，它是一门先于所有其他科学的科学，这门科学包含构成所有科学的基础的思想和原理. 正是在第二种意义上，莱布尼茨首先在他的《普遍语言》中设想数理逻辑将要构成它的中心部分. 但是在他死后几乎两个世纪之久，他的对于出现在精确科学中的那种推理来说真正充分的逻辑演算思想，才被弗雷格和皮亚诺付诸实现（至少在某种形式上，如果不是莱布尼茨所想的全部的话）. 弗雷格的主要兴趣在于思维的分析，并且首先用它的演算从纯粹逻辑去导出算术. 皮亚诺的兴趣则更多地在于它在数学中的应用，并且他创造了一个优美的和灵活的符号体系，它允许把甚至是最为复杂的数学定理以完全精确和常常是很简洁的方式用单一的公式来表达.

罗素对数理逻辑的贡献

（接上页）罗素是沿着弗雷格和皮亚诺这条思想路线开始他的工作的. 弗雷格通过他对证明的艰苦分析，仅仅获得整数序列的最初等的性质，皮亚诺则完成了用新符号体系表示的数学定理的大汇集，但是没有证明. 只有在《数学原理》中，才充分利用了新的方法从很少的逻辑概念和公理中真实地导出数学的大部分. 此外，这门年轻科学由于一个新工具即抽象的关系理论而更加丰富了. 关系演算在此之前已经被皮尔士和施罗德所发展了，但那仅在某些限制之下，而且太类似于数的代数了. 在《数学原理》中，不仅康托尔的集合论，而且普通算术和度量理论也都是根据这抽象关系的观点来处理的.

——哥德尔《罗素的数理逻辑》(1944)

1. 分支类型论提出的背景
   - 弗雷格算术
   - 简单类型论
   - 无类理论
2. 什么是分支类型论
   - 分支类型论的核心思想
   - 有争议的公理
   - 分支类型层谱
3. 类型论能否实现逻辑主义纲领

弗雷格理论的基本概念

函数 $f(\cdot) \rightsquigarrow$函项（function）$\phi(\cdot)$；
自变量 $\rightsquigarrow$主目（arguments）；
函数值 $f(\vec{x}) \rightsquigarrow$函项值（value）$\phi(\vec{x})$.

不是函项的东西称为对象（object）；以对象为主目的函项称为一阶函项；以一阶函项为主目的函项称为二阶函项.

值为真值的一元函项称为概念（concept），多元函项则称关系（relation）.（这个定义加每个概念都有外延蕴涵着完整的概括公理.）

设 $\phi(\cdot)$ 是值为真值的函项，该函项的外延（extension）定义为

$$\widehat{\vec{x}}\phi(\vec{x}) =_{\mathrm{df}} \{\vec{x} \mid \phi(\vec{x}) = \mathrm{T}\}$$

语句（sentence）的涵义（sense）是思想（thought）、意谓（significance）真值.

弗雷格的二阶演算

弗雷格《算术基本规律》（1893, 1903）系统

Ia $a \to (b \to a)$

Ib $a \to a$

IIa $(\forall \mathfrak{a}) f(\mathfrak{a}) \to f(a)$

IIb $(\forall \mathfrak{f}) M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \to M_\beta(f(\beta))$

III $(a = b) \to (\forall \mathfrak{f})(\mathfrak{f}(a) \to \mathfrak{f}(b))$

IV $\neg(a \leftrightarrow \neg b) \to (a \leftrightarrow b)$

V $(\acute{\varepsilon} f(\varepsilon) = \acute{\alpha} g(\alpha)) \leftrightarrow (\forall \mathfrak{a})(f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a}))$

VI $a = \backslash \acute{\varepsilon}(a = \varepsilon)$

前件交换规则、假言易位规则、前件合并规则、全称概括规则、假言三段论规则、二难推理规则、代入规则、约束变元易字规则

罗素悖论

罗素版本：将属于关系定义为

$$(\cdot) \in (:) =_{\text{df}} (\exists X)((:) = \hat{z}X(z) \wedge X(\cdot))$$

由基本规律 V 可证定理 1

$$\vdash (\forall X)(\forall x)(x \in \hat{z}X(z) \leftrightarrow Xx)$$

由此可以得到

$$\vdash \hat{z}(z \notin z) \in \hat{z}(z \notin z) \leftrightarrow \hat{z}(z \notin z) \notin \hat{z}(z \notin z)$$

弗雷格版本：考虑一阶概念

$$R(\cdot) =_{\text{df}} (\exists X)((\cdot) = \hat{y}X(y) \wedge \neg X(\cdot))$$

由基本规律 V 可得

$$\vdash R(\hat{x}R(x)) \leftrightarrow \neg R(\hat{x}R(x))$$

悖论产生的原因

错误的公理在于假定了对于每一命题函项存在着满足它的那类对象，或者说每一命题函项都“作为一个单独的实体”而存在；后者指可以与变目分离的某事物（想法是命题函项从原始给出的命题抽象而得），也是不同于表达命题函项的符号组合的某事物；因而人们可以称它为由命题函项定义的概念. 这概念的存在已足以构成悖论——在它们的“内涵”形式之下，其中“不适用于自身”的概念取代了罗素的悖论类.

——哥德尔《罗素的数理逻辑》(1944)

根本原因：康托尔对角线定理表明，概念严格多于对象，但概念与概念的外延一一对应，而概念的外延是对象.

弗雷格失败的解决方案：把基本规律 V 修改为

$$(\acute{\varepsilon}f(\varepsilon) = \acute{\alpha}g(\alpha)) \leftrightarrow (\forall \mathfrak{a})((\mathfrak{a} \neq \acute{\varepsilon}f(\varepsilon) \wedge \mathfrak{a} \neq \acute{\alpha}g(\alpha)) \rightarrow (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a})))$$

命题与命题函项

一个命题可以定义为：当我们正确地相信或错误地相信时，我们所相信的东西.……一个信念的真假取决于这个信念指称的事实.

——罗素《论命题：命题是什么和命题怎样具有意义》(1919)

我们用“命题”这个词主要地指一些文字或者其他符号组合成的一种形式，这种形式所表达的或者是真或者是假.……一个命题函项即是其值为命题的函项.

——罗素《数理哲学导论》(1919)

我们用“命题函项”指包含一个变元 x，并且一旦赋给 x 值就表达一个命题的东西. 也就是说，它与命题唯一不同的地方在于其任意性：它包含一个未被赋值的变元.

——怀特海、罗素《数学原理》(卷 1)(1910)

类型

每个命题函项 $\phi\hat{x}$，除有真值域之外，还有意义域，即当 $\phi(x)$ 是一个完全的命题（无论真还是假）时，x 位于的那个域. 这是类型论的第一个要点；第二个要点是意义域形成类型，即如果 x 属于 $\phi\hat{x}$ 的意义域，那么有一个对象类，称为x 的类型，其中所有的元素也必须属于 $\phi\hat{x}$ 的意义域，无论 ϕ 如何变化；并且意义域要么是一个单一类型，要么是一些类型的总和.

——罗素《数学的原则》(1903)

类型的层级

⋆ 类的类型

类型 0：个体；类型 1：个体类；类型 2：个体类的类 $\cdots$

- $x \in y$ 有意义，仅当 x 的类型比 y 的类型低一级.
- 不允许有混合类.

⋆ 关系的类型

个体的类型是 0，

如果 $X_1, \ldots, X_n$ 的类型分别是 $t_1, \ldots, t_n$，那么关系 $P(X_1, \ldots, X_n)$ 的类型是 $(t_1, \ldots, t_n)$.

- 事实上关系的类型可以归约为类的类型. 例如 $P(x, Y)$ 总能被替换为 $\exists! xXx \wedge \forall x(Xx \to P(x, Y))$，它确定了关系 $Q(X, Y)$. 而关系的元数没有本质影响. 于是类型 $(t_1, \ldots, t_n)$ 可以归约为 $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}(t_i)$.

⋆ 数的类型

- 数的定义与弗雷格的基本相同：$|x| =_{\text{df}} \{y \mid y \approx x\}$.
- 类型不明、混合类/从类型 2 开始每层都可以定义自然数/无穷公理/空类和 0 的定义问题

柯匹对简单类型论的形式化 I

形式系统

P1. $\varphi \vee \varphi \to \psi$

P2. $\varphi \to \varphi \vee \psi$

P3. $\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$

P4. $(\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to (\varphi \vee \chi))$

P5. $(\forall F^t)\varphi \to \varphi(G^t/F^t)$

P6. $(\forall F_1^t)(\forall F_2^t)((F_1^t \leftrightarrow F_2^t) \to (F_1^t = F_2^t))$

P7. $(\forall F^{((0))})(N^{(((0)))}(F^{((0))}) \to (\exists G^{(0)})(F^{((0))}(G^{(0)})))$

P8. 选择公理

MP. 从 φ 和 $\varphi \to \psi$ 得到 ψ

Gen. 从 $\varphi \to \psi$ 得到 $\varphi \to (\forall F)\psi$，$F$ 不在 φ 中出现

柯匹对简单类型论的形式化 II

必要定义

$$F_1^t = F_2^t =_{\text{df}} (\forall G^{(t)})(G^{(t)}(F_1^t) \leftrightarrow G^{(t)}(F_2^t))$$
$$F_1 \leftrightarrow F_2 =_{\text{df}} (\forall G_1, \ldots, G_n)(F_1(G_1, \ldots, G_n) \leftrightarrow F_2(G_1, \ldots, G_n))$$

$$0(F^{(0)}) =_{\text{df}} (\forall G^0)\neg F^{(0)}(G^0)$$
$$n(F^{(0)}) =_{\text{df}} (\exists G_1^0, \ldots, G_n^0)(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n-1} F^{(0)}(G_i^0) \wedge \bigwedge_{i\neq j} G_i^0 \neq G_j^0$$
$$\wedge(\forall G_n^0)(F^{(0)}(G_n^0) \rightarrow \textstyle\bigvee_{i=1}^{n-1} G_n^0 = G_i^0))$$

$$n^+(F^{(0)}) =_{\text{df}} (\exists G^{(0)})(n(G^{(0)}) \wedge (\exists H^0)(\neg G^{(0)}(H^0) \wedge$$
$$(\forall K^0)(F^{(0)}(K^0) \leftrightarrow G^{(0)}(K^0) \vee H^0 = K^0)))$$

$$N(G^{((0))}) =_{\text{df}} (\forall F^{(((0)))})(F^{(((0)))}(0) \wedge (\forall m)(F^{(((0)))}(m)$$
$$\rightarrow F^{(((0)))}(m^+)) \rightarrow F^{(((0)))}(G^{((0))}))$$

命题悖论

考虑一个命题类

$$W=\{q_M \mid M \text{ 是一个命题类 }, q_M \notin M, \\ q_M \text{ 是命题“} M \text{ 中的每个命题都真”} \}.$$

考虑命题 p：“W 中的每个命题都真”，则

$$p \in W\text{，当且仅当，}p \notin W.$$

- 罗素曾尝试划分命题的类型，但没有成功.
- 这个悖论涉及真和假，实际是语义悖论，事实上拉姆塞证明简单类型论已经完全能解决语形悖论.

摹状词理论

为了解决非存在之谜、排中律失效、同一替换失效三大问题，罗素提出摹状词理论. 他认为像“金山”“当今法国国王”“《威弗利》的作者”这些通过述知的指谓短语都不是专名，而是作为不完全符号的摹状词.

我们用“不完全”符号指那些单独拿出来没有意义，而只有在具体语境中才能被定义的符号.例如，在普通数学中，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 和 $\int_b^a$ 就是不完全符号：在我们有所指谓之前，必须先提供一些东西. 这样的符号具有的是“使用中的定义”. 因此如果我们定义

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

我们定义了 ∇^2 的使用，但 ∇^2 本身仍然没有意义. 这就把这种符号同一般意义上称为专名的东西区分开来：例如，“苏格拉底”代表一个确定的人，其意义来自于自身，而不需要任何语境.

——怀特海、罗素《数学原理》（卷 1）（1910）

摹状词在使用中的定义

$\mathrm{E}!((\imath x)\phi(x))$ 定义为 $(\exists y)(\forall x)(\phi(x) \equiv x = y)$

$f((\imath x)\phi(x))$ 定义为 $(\exists y)((\forall x)(\phi(x) \equiv x = y) \wedge f(y))$

$a = (\imath x)\phi(x)$ 定义为 $(\exists y)((\forall x)(\phi(x) \equiv x = y) \wedge a = y)$

$\sim \mathrm{E}!((\imath x)\phi(x))$ 定义为 $\sim (\exists y)(\forall x)(\phi(x) \equiv x = y)$

$[(\imath x)\phi(x)] \sim \psi((\imath x)\phi(x))$ 定义为 $(\exists y)((\forall x)(\phi(x) \equiv x = y) \wedge \sim \psi(y))$

$\sim [(\imath x)\phi(x)]\psi((\imath x)\phi(x))$ 定义为 $\sim (\exists y)((\forall x)(\phi(x) \equiv x = y) \wedge \psi(y))$

$[(\imath x)\phi(x)]\psi((\imath x)\phi(x)) \supset p$ 定义为 $(\exists y)((\forall x)(\phi(x) \equiv x = y) \wedge \psi(y)) \supset p$

$[(\imath x)\phi(x)](\psi((\imath x)\phi(x)) \supset p)$ 定义为 $(\exists y)((\forall x)(\phi(x) \equiv x = y) \wedge \psi(y) \supset p)$

这些符号的引入不是通过明确的定义，而是通过对如何把包含它们的语句翻译成不包含它们的语句进行描述的规则．但是为了确知（或对什么样的表达式）这种翻译是可能的而且是唯一地确定的，并确知（或在什么范围内）推理规则也适用于新的表达式，必须对所有可能的表达式有一个概观，而这只有通过句法的考虑才能提供．

——哥德尔《罗素的数理逻辑》(1944)

摹状词理论带来的启示

在任何句子中，一个单一的语词，或者一个单一的短语，当它从语境中被分离出来时，它往往就失去了意义. 在这种情况下，如果一个语词或短语被错误地当作拥有一个独立意义，我们称之为“虚假抽象”悖论和矛盾就是这么来的.……我所提倡的理论是类、关系、数，以及数学处理的几乎所有东西，都是虚假抽象.

——罗素《论超穷数和序型理论的某些困难》(1906)

解悖的三种方案

- 曲折理论（The Zigzag Theory）：当命题函项相当简单时，它们可以确定类，若是它们复杂深奥，则不能. 如果一个命题函项能确定类，那么该函项的否定也能确定类；换言之，一个类的补也是类. 如果命题函项 $\phi\hat{x}$ 不能确定类，那么对任意类 u，都存在 x 使得，$x \in u$ 且 $\phi(x)$ 假，或 $x \in -u$ 且 $\phi(x)$ 真.
- 限制大小理论（The Theory of Limitation of Size）：不存在拥有全部实体的大全类. 一个类的补一定不是类.
- 无类理论（The No Classes Theory）：驱逐类和关系，它们不是真实的对象，只是逻辑的假定和形式的符号. 任何关于命题函项的陈述都应被视为关于其函项值陈述的缩写.

哥德尔的评论

一般地不承认类或概念的存在后，还需要确定在哪些进一步的假设（关于命题函项的）下，这些实体确实存在。罗素指出两个可能方向，人们可以据此去寻求这样的一种判据，他把它们分别称为曲折理论和限制大小理论，或许把它们称为内涵和外延理论更能表明它们的特征. 第二个理论要使一个类或概念的存在依赖于命题函项的外延（要求它不太大），第一个理论则依赖于它的内容或意义（要求某种“简单性”，它的精确表述将是问题所在）.……

就类来说，后来由策梅洛及其他人发展的公理集合论可被看作这种思想（限制大小理论）的深入展开.……

最近建立了一个逻辑系统，它也具有这个方案（曲折理论）的某些本质特性，那便是蒯因系统. 此外，沿着这些方向也未必没有其他有趣的可能性.

罗素后来关于悖论的解决方面的工作，并没有沿着上面提到的他自己指出的两个方向去做，而主要地是基于一种更为激进的思想，“无类理论”，按照这个理论，类或概念从不作为实在的对象而存在，并且含有这些词项的语句，仅在它们能被解释成一种关于其他事物的“说话方式”的范围内才是有意义的.

——哥德尔《罗素的数理逻辑》(1944)

替换理论

$p/(a_1,\ldots,a_n);(x_1,\ldots,x_n)!q$ 表示用 x_i 替换 p 中的 a_i 后得到 q. 这样的 q 可以表示为 $p/(a_1,\ldots,a_n);(x_1,\ldots,x_n)$.
$p/(a_1,\ldots,a_n)$ 可以表示关系的外延，

$$(x_1,\ldots,x_n)\in p/(a_1,\ldots,a_n)=_{\text{df}}\sim\sim p/(a_1,\ldots,a_n);(x_1,\ldots,x_n).$$

因为 $x_1,\ldots,x_n$ 满足 $p/(a_1,\ldots,a_n)$ 关系，意味着用 x_i 替换 p 中的 a_i 后得到的结果是真的. 特别地 p/a 可以表示类. 为了定义数，还必须考虑类的类，

$$r/b\in q/(p,a)=_{\text{df}}(\forall s)(\forall c)(r/b=s/c\supset q/(p,a);(r,b)=q/(p,a);(s,c))$$

其中$x=y=_{\text{df}}x/x;y!x$.

替换悖论

令命题 p_0 为

$$(\exists p)(\exists a)(a_0 = p/a; b!q \wedge (\forall r)(p/a; a_0!r \supset\sim r))$$

再考虑命题 s:

$$(\exists p)(\exists a)(p_0/a_0; b!q = p/a; b!q \wedge (\forall r)(p/a; (p_0/a_0; b!q)!r \supset\sim r))$$

可以证明

$$\vdash s \equiv\sim s$$

回避这个怪物的唯一方式就是针对命题创造一个类型学说，以至于 $p_0/a_0; b!q, a, b$ 在类型上都低于 p, q.

——罗素《论替换》(1906)

禁止恶性循环原则

理查德悖论：

令所有可通过有限多的法语单词定义的十进制小数组成的类为 E. 显然 E 的基数是 $\aleph_0$，因此可以良序化. 闭区间 $[0,1]$ 中的十进制小数 N 定义如下：对所有自然数 n，如果 E 中的第 n 个数小数点后第 n 个数字是 p，那么 N 的小数点后第 n 个数字是 $p+1$（若 $p=9$ 则为 0）. 显然 N 既属于 E 又不属于 E.

庞加莱提出禁止恶性循环原则解决悖论，罗素采纳之，表述如下：

问题中的恶性循环（vicious circle）是由于假设对象的聚合可能包含只能通过整个聚合定义的成员.

——怀特海、罗素《数学原理》（卷 1）（1910）

“凡涉及一个聚合的全部元素者，它一定不是这一聚合中的一个元素”；或者相反：“如果假定某个聚合有一个总体，且这个总体有由这个总体唯一可定义的元素，那么所说的聚合就没有总体.”

——罗素《以类型论为基础的数理逻辑》（1908）

真值分阶

如果 $\phi(a)$ 是真的，那么这样的真称为一阶真；
如果 $\phi\hat{x}$ 的每个值都是一阶真的，那么 $(\forall x)\phi(x)$ 是二阶真的；
$\vdots$
如果 p 是 n 阶真的，那么 $\sim p$ 是 n 阶假的；
如果 p, q 的真值是 n 阶的，那么 $p \vee q$ 的真值也是 n 阶的.

∘解决说谎者悖论：
“$(p)(p$ 是假的$)$” 是真的，前一个假是一阶假，后一个真是二阶真，因此没有悖论，也不违背恶性循环原则.

∘塔斯基的语言分层理论首次启发而来.

命题函项分阶

一阶母式（first order matrix）

$\mu^1(\vec{x}) ::= A^1(\vec{x}) \mid \sim \mu^1(\vec{x}) \mid (\mu^1(\vec{x}) \vee \mu^1(\vec{x}))$

一阶公式（first order formula）

$\varphi^1(\vec{x}) ::= \mu^1(\vec{x}) \mid (\forall x_i)\varphi^1(\vec{x}) \mid \sim \varphi^1(\vec{x}) \mid (\varphi^1(\vec{x}) \vee \varphi^1(\vec{x}))$

二阶母式（second order matrix）

$\mu^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) ::= A^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) \mid \sim \mu^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) \mid (\mu^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) \vee \mu^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}))$

二阶公式（second order formula）

$$\begin{aligned}\varphi^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) ::= {} & \mu^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) \mid (\forall \varphi^1_i)\varphi^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) \mid (\forall y_j)\varphi^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) \mid \\ & \sim \varphi^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) \mid (\varphi^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}) \vee \varphi^2(\overrightarrow{\varphi^1\hat{x}}, \vec{y}))\end{aligned}$$

$\vdots$

n 阶开公式称为n 阶函项（nth order function）.

例如，$(\exists y)(\forall z)\chi(x, y, z)$ 是主目为 x 的一阶函项；

$(\exists y)\Phi(\phi\hat{x}, y) \vee (\forall\psi)\Psi(\psi\hat{z}, w)$ 是主目为 $\phi\hat{x}, w$ 的二阶函项.

类型论的初始命题

(1) 由真命题蕴涵的命题是真的.
(2) $\vdash p \vee p \supset p$
(3) $\vdash q \supset p \vee q$
(4) $\vdash p \vee q \supset q \vee p$
(5) $\vdash p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)$（贝奈斯证明不独立）
(6) $\vdash (q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$
(7) $(\forall x)\phi(x) \supset \phi(y)$
(8) 如果 $\phi(y)$ 是真的，那么 $(\forall x)\phi(x)$ 是真的.
(9) $(\forall x)\phi(x) \supset \phi(a)$（罗素认为可删除）
(10) $(\forall x)(p \vee \phi(x)) \supset (p \vee (\forall x)\phi(x))$
(11) 如果不论 x，$f(\phi(x))$ 为真，并且不论 y，$F(\phi(y))$ 为真时，那么不论 x，$f(\phi(x)) \wedge F(\phi(x))$ 为真.
(12) 对任意 x，如果 $\phi(x) \wedge (\phi(x) \supset \psi(x))$ 为真，那么 $\psi(x)$ 也真.

$*$注记：这是《以类型论为基础的数理逻辑》中的系统，在《数学原理》中有更细致的表述. 但这个系统是不严格的，特别是没有区分清楚公理和推理规则，也没有代入规则，所以哥德尔说这相比于弗雷格是一种倒退. 第一个精确的狭谓词演算系统是由希尔伯特和阿克曼在《数理逻辑基础》（1928）中给出的.

分支类型论的困难

归纳原理：$\forall\phi((\phi 0 \wedge \forall x(\phi x \to \phi x^{+})) \to \forall y \phi y)$
确界原理：$\forall\phi((\exists x \phi x \wedge \exists y \forall z(\phi z \to z \leqslant y))$
$\to \exists y(\forall z(\phi z \to z \leqslant y) \wedge \forall x(x < y \to \exists z(\phi z \wedge x < z))))$

给定 a，无论它是个体还是函项，设其是 n 阶的. 一般地，我们不能说所有 a-函项如何如何，因为这是恶性循环的. 只能说所有第 $n+m$ 阶的 a-函项如何如何.

这意味着我们发展不出自然数和实数理论. 甚至连等同都无法定义，因为莱布尼茨同一不可分辨原理也存在同样的问题，它说 $\forall\phi(\phi x \to \phi y)$ 为真时，x 与 y 同一.

还原公理

直谓性（predicative）：给定 $a_1, \ldots, a_n$，它们是个体或函项，设它们阶的最大值为 k. 令 F 是以它们为主目的函项，若 F 是 $k+1$ 阶函项，则称其是直谓的，记作 $F!(a_1, \ldots, a_n)$.

还原公理（axiom of reducibility）：

$$(\exists F)(\forall \vec{a})(\Phi(\vec{a}) \equiv F!(\vec{a}))$$

还原公理的合理性辩护：

∘函项 ⇄ 类 ⇄ 直谓函项

∘把全称量词和存在量词转为合取和析取.（例：拿破仑具有成为将军的一切品质.）

有了还原公理便可以定义“等同”：

$$x = y =_{\mathrm{df}} (\forall \phi)(\phi!(x) \supset \phi!(y))$$

*哥德尔认为还原公理的作用本质上相当于策梅洛的分离公理.

类理论的建构

包含一个函项 $\phi\hat{x}$ 的命题，……如果经过任何形式等价的函项替换后它的真值不变，我们称它为函项 $\phi\hat{x}$ 的一个外延函项.

——罗素《数理哲学导论》(1919)

$\phi\hat{x}$ 的外延函项的真值只依赖于 $\phi\hat{x}$ 的外延 $\hat{x}(\phi(x))$，即使 $\phi(x)$ 为真的那些变目的类. 我们给出如下定义：

$$f(\hat{z}(\psi(z))) =_{\mathrm{df}} (\exists\phi)((\forall x)(\phi!(x) \equiv \psi(x)) \wedge f(\phi!\hat{z})),$$

配合等同的定义可以证明

$$\vdash \hat{z}(\phi(z)) = \hat{z}(\psi(z)) \equiv (\forall x)(\phi(x) \equiv \psi(x)).$$

通过定义

$$x \in \phi!\hat{z} =_{\mathrm{df}} \phi!(x),$$

运用还原公理可证明

$$\vdash x \in \hat{z}(\psi(z)) \equiv \psi(x).$$

把一元变为多元，可以相应地构建关系理论.

类和关系理论中的基本定义

类的类:

$\mathrm{Cls} =_{\mathrm{df}} \hat{\alpha}((\exists\phi)(\alpha = \hat{z}(\phi!(z))))$.

包含关系:

$\alpha \subset \beta =_{\mathrm{df}} (\forall x)(\phi(x) \supset \psi(x))$

交、并、补运算:

$\alpha \cup \beta =_{\mathrm{df}} \hat{z}(z \in \alpha \vee z \in \beta)$

$\alpha \cap \beta =_{\mathrm{df}} \hat{z}(z \in \alpha \wedge z \in \beta)$

$-\alpha =_{\mathrm{df}} \hat{z}(\sim (z \in \alpha))$

$\alpha - \beta =_{\mathrm{df}} \alpha \cap -\beta$

全类和空类:

$\mathrm{V} =_{\mathrm{df}} \hat{z}(z = z)$

$\Lambda =_{\mathrm{df}} -\mathrm{V}$

摹状函项:

$R`y =_{\mathrm{df}} (\imath x)(xRy)$

单元类、幂类:

$\iota`\alpha =_{\mathrm{df}} \hat{y}(y = x)$

$\mathrm{Cl}`\alpha =_{\mathrm{df}} \hat{\beta}(\beta \subset \alpha)$

关系的类、关系的包含关系及运算可类似定义.

关系的逆、复合:

$\mathrm{Cnv} =_{\mathrm{df}} \hat{Q}\hat{P}((\forall x)(\forall y)xQy \equiv yPx)$

$\breve{P} =_{\mathrm{df}} \mathrm{Cnv}`P$

$R|S =_{\mathrm{df}} \hat{x}\hat{z}((\exists y)(xRy \wedge yRz))$

关系的值、域、像:

$\overrightarrow{R} =_{\mathrm{df}} \hat{\alpha}\hat{y}(\alpha = \hat{x}(xRy))$

$\overleftarrow{R} =_{\mathrm{df}} \hat{\beta}\hat{x}(\alpha = \hat{y}(xRy))$

$D =_{\mathrm{df}} \hat{\alpha}\hat{R}(\alpha = \hat{x}((\exists y)xRy))$

$\text{Ɑ} =_{\mathrm{df}} \hat{\beta}\hat{R}(\beta = \hat{y}((\exists x)xRy))$

$C =_{\mathrm{df}} \hat{\gamma}\hat{R}(\gamma = \hat{x}((\exists y)(xRy \vee yRx)))$

$R_{\in} =_{\mathrm{df}} \hat{\alpha}\hat{\beta}(\alpha = \hat{x}((\exists y)(y \in \beta \wedge xRy)))$

$R``\beta =_{\mathrm{df}} R_{\in}`\beta$

定义自然数

直观：一个自然数 n 就是所有 n 个个体组成的类的类.

先定义单个的自然数、然后定义后继运算和自然数类.

$$0 =_{\mathrm{df}} \iota`\Lambda$$
$$1 =_{\mathrm{df}} \hat{\alpha}((\exists x)(\alpha = \iota`x))$$
$$2 =_{\mathrm{df}} \hat{\alpha}((\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge \alpha = \iota`x \cup \iota`y))$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{Succ}`\alpha =_{\mathrm{df}} \hat{\beta}((\exists x)(x \in \beta \wedge \beta - \iota`x \in \alpha))$$
$$\mathbb{N} =_{\mathrm{df}} \hat{\alpha}((\forall \beta)(0 \in \beta \wedge (\forall \gamma)(\gamma \in \beta \supset \mathrm{Succ}`\gamma \in \beta) \supset \alpha \in \beta))$$

进而发展基数理论. 定义一一映射、等势关系、基数和基数类.

$$\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{I} =_{\mathrm{df}} \hat{R}((\forall x, x', y, y')(xRy \wedge x'Ry \wedge xRy' \supset x = x' \wedge y = y'))$$
$$\mathrm{Sim} =_{\mathrm{df}} \hat{\alpha}\hat{\beta}((\exists R)(R \in \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{I} \wedge \alpha = D`R \wedge \mathit{Cl}`R))$$
$$\mathrm{Nc} =_{\mathrm{df}} \overrightarrow{\mathrm{Sim}}$$
$$\mathrm{NC} =_{\mathrm{df}} \mathrm{Nc}``\mathrm{Cls}$$

无穷公理

戴德金-皮亚诺公理 4:

$$(\forall\alpha)(\forall\beta)(\alpha \in \mathbb{N} \wedge \beta \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{Succ}`\alpha = \mathrm{Succ}`\beta \supset \alpha = \beta)$$

假设宇宙中只有 3 个个体，则 $\Lambda = \mathrm{Succ}`4 = \mathrm{Succ}`5 = \cdots$，若该公理正确，则 $4 = 5 = \cdots$，矛盾！

为了解决这个问题，罗素引入了无穷公理（axiom of infinite）:

$$(\forall\alpha)(\alpha \in \mathbb{N} \supset (\exists\beta)(\beta \in \alpha))$$

即 $\Lambda \notin \mathbb{N}$.

这条公理事实上是对世界的断定，不是逻辑或数学公理. 在具体使用时，罗素也不把它当公理，而是处理成数学命题的前提条件.

乘法公理

事实上还有一条有争议的公理——乘法公理，罗素同样把它当前提条件而非公理.

首先定义互斥的类的类

$$\mathrm{Cls}^2\mathrm{excl} =_{\mathrm{df}} \hat{\kappa}((\forall\alpha)(\forall\beta)(\alpha \in \kappa \wedge \beta \in \kappa \wedge \alpha \neq \beta \supset \alpha \cap \beta = \Lambda))$$

再定义空类不是互斥的类的类中的元素

$$\mathrm{Cls\ ex}^2\mathrm{excl} =_{\mathrm{df}} \mathrm{Cls}^2\mathrm{excl} - \overleftarrow{\in}{}^{\text{‘}}\Lambda$$

进而可以写出乘法公理（multiplicative axiom）：

$$(\forall\kappa)(\kappa \in \mathrm{Cls\ ex}^2\mathrm{excl} \supset (\exists\mu)(\forall\alpha)(\alpha \in \kappa \supset \mu \cap \alpha = 1))$$

它与策梅洛的选择公理等价.

丘奇-柯匹解释

先划分类型，再在每个类型上划分层.

	Level 1	Level 2	Level 3	$\cdots$
Type 1	${}^1F^{\,1}$	${}^2F^{\,1}$	${}^3F^{\,1}$	$\cdots$
Type 2	${}^1F^{\,2}$	${}^2F^{\,2}$	${}^3F^{\,2}$	$\cdots$
Type 3	${}^1F^{\,3}$	${}^2F^{\,3}$	${}^3F^{\,3}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

还原公理：$(\exists^1 F^{\,n})(\forall G^{\,n-1})({}^mF^{\,n}(G^{\,n-1}) \leftrightarrow {}^1F^{\,n}(G^{\,n-1}))$

兰蒂尼解释

同时划分类型和层.

类型 0: 个体
类型 1: 类型 0 的 1 层函项
类型 2: 类型 0 的 2 层函项、类型 1 的 1 层函项
类型 3: 类型 0 的 3 层函项、类型 1 的 2 层函项、类型 2 的 1 层函项
⋮

*注记：n 阶函项的类型就是 n.

※ 还原公理说，对所有的函项，就其值而言，都等价于一个 1 层函项. 于是每个类型都只剩下 1 层函项，这实质上回到了简单类型论.

分支类型论与可构成集

可构成集无非是分支类型层谱的超穷扩充.

类型 $0 = L_0 = \omega$
类型 $1 = L_1 = \mathrm{Def}(L_0)$
类型 $2 = L_2 = \mathrm{Def}(L_1)$
$\vdots$
类型 $\omega = L_\omega = \bigcup_{n\in\omega} L_n$
(到这里出现了恶性循环，所以罗素只构造了有穷类型，哥德尔则构造继续下去)

类型 $\alpha = L_\alpha = \begin{cases} \mathrm{Def}(L_\beta), & \alpha = \beta^+ \\ \bigcup_{\beta\in\alpha} L_\beta, & \text{otherwise} \end{cases}$

可构成集的层级划分

先定义两个概念：

- 称 $A \subset L_\alpha$ 是 L_α 的 $\beta+1$ 层可构成子集，如果 $A \in L_{\alpha+\beta+1} \setminus L_{\alpha+\beta}$;
- 称可构成集 A 是 $\beta+1$ 层可构成的，如果存在存在最小序数 α 使得 $A \subset L_\alpha$，且 A 是 L_α 的 $\beta+1$ 层可构成子集.

于是我们可得如下结论：
A 是类型 n 的 $k+1$ 层函项确定的类，当且仅当，A 是 L_n 的 $k+1$ 层可构成子集.

于是还原公理可表述为：

- 对任意 $A \in \wp(L_n) \cap L_\omega$，$A$ 是 L_n 的 1 层可构成子集.
- 每个可构成集都是 1 层可构成的.

然而它们都是错误的！比如取 $n=1$，显然 $|L_1| = 2^{\aleph_0}$，取它的一个不可数子集 A，然而由于一阶公式的基数是 $\aleph_0$，因此 A 不是 L_1 的 1 层可构成子集.

超穷还原公理

超穷弱还原公理：

$$\text{假设 } \mathbf{V} = \mathbf{L}\text{，如果 } A \subset L_\alpha\text{，那么 } A \in L_{|\alpha|^+}.$$

注意到，这是证明广义连续统假设相对于 **ZFC** 一致的关键引理.

因为它相当于说 $\wp(L_\alpha) \subseteq L_{|\alpha|^+}$，则 $2^{|L_\alpha|} \leqslant |L_{|\alpha|^+}|$. 当 α 是超穷数时，由于 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ 蕴涵选择公理，于是有 $|L_\alpha| = |\alpha|$，从而 $2^{|L_\alpha|} = 2^{|\alpha|} \leqslant |L_{|\alpha|^+}| = |\alpha|^+$. 设 $|\alpha| = \aleph_\beta$，即得 $2^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_{\beta+1}$，而 $\geqslant$ 方向由康托尔定理保证.

哥德尔据此说明柏拉图主义比构造主义能得到更丰富的成果.

什么是逻辑主义

罗素曾对逻辑与数学的关系作出这样的比喻：

逻辑是年轻时期的数学，数学是成年时期的逻辑.

——罗素《数理哲学导论》(1919)

卡尔纳普对弗雷格-罗素的逻辑主义纲领有过精确的表述：
(1) 数学概念能通过明确的定义从逻辑概念中导出；
(2) 数学定理能通过纯粹的逻辑演绎从逻辑公理中推导出来.

——卡尔纳普《数学的逻辑主义基础》(1930)

事实上还存在一个由来已久的弱逻辑主义纲领：

数学定理是先天分析判断.

“如果-那么”主义

无穷公理和乘法公理被认为是非逻辑公理，因为它们断定了某物的存在性，而逻辑不具备这样的能力.

罗素采用“如果-那么”主义（if-then-ism）解决该问题，即把 $\mathrm{Inf}, \mathrm{Mul} \vdash p$ 转成 $\vdash \mathrm{Inf} \wedge \mathrm{Mul} \supset p$.

该方法可以解决乘法公理的问题，因为它符合当今的数学实践，如果一个数学定理的证明依赖于选择公理，数学家将会对此做特别的标注.

但是无穷公理是对世界的断定，本身不是逻辑或数学命题，而是形而上学命题，因此不宜作为数学定理的前提条件. 此外无穷公理极可能与经验世界不符，如果把它当前提将无法解释数学定理的可应用性.

分支类型论的两难困境 I

还原公理显然不能令人满意，不少人认为它只在有穷情形下成立，就算它是真的，也只是偶然真而非逻辑真，即便是罗素自己，也只是出于一种实用主义的态度接受它.

(1) 坚持直谓主义，则没有经典数学.

如果放弃还原公理，又坚守禁止恶性循环原则，将得不到完整的经典数学，这是罗素不能放弃它的原因.

在《数学原理》第二版导言中，罗素采纳了维特根斯坦的建议，放弃还原公理，采用外延原则：命题函项就是真值函项，包含一个命题函项的任何陈述的真假，完全有赖于这个函项的外延，即使该函项为真的取值范围. 外延原则可以保留数学归纳法，但实数理论将完全垮台. 此外外延原则的正确性也存疑，函项“A 相信 $\widehat{p}$”大概不是外延的.

分支类型论的两难困境 II

(2) 放弃直谓主义，则没有无类理论.

还有一条路是放弃禁止恶性循环原则，即放弃直谓主义. 拉姆塞证明非直谓简单类型论已经能解决所有语形悖论，因此可以实现逻辑主义纲领. 哥德尔认为直谓主义无法得到经典数学这一事实，不是说明经典数学为假，而是恰恰说明禁止恶性循环原则为假. 事实上循环并非都是恶性的，只有否定自指才是恶性的.

但是放弃直谓主义将导致无类理论的垮台，罗素不可能接受. 因为如果允许非直谓定义，那么命题函项就是换了种说法的类，类就不是说话方式而是实在的. 然而根据康托尔定理，类不可能是对象. 受维特根斯坦影响，罗素的形而上学观是所谓逻辑原子主义，维特根斯坦说 “世界是事实的总和，而非事物的总和”，又根据语言和世界同构知，世界是许多具有性质和关系的事物组成的. 因而殊相是原子事实中的诸关系项; 共相则是关系，对应于语言中的函项. 可以看到类是本体论赘物，没有容身之地.

柏拉图主义的进路

非直谓定义要想合理，必须抛弃构造主义，承认实在论.

必定清楚地存在一个定义（即构造的摹状），它并不提到被定义的对象所属的总体，因为一个事物的构造决不可能建立在被构造事物本身所属的事物总体之上. 但是，如果问题是关于独立于我们的构造而存在的对象的话，那么存在着只包含只有通过提及总体才能予以描述（即唯一地予以刻划）的成员的总体，便没有丝毫荒谬之处（参阅拉姆塞，1926a:338 或 1931:1）.

——哥德尔《罗素的数理逻辑》(1944)

贝奈斯对数学柏拉图主义的分类：

- 最弱柏拉图主义：承认自然数总体、允许排中律、禁止非直谓定义；
- 狭义柏拉图主义：承认自然数序列总体、允许非直谓定义；
- 绝对柏拉图主义：承认数学世界的存在.

联姻柏拉图主义的益处

联姻柏拉图主义，能解决逻辑主义面临的某些困难.

- 无穷公理成为对数学世界合理且自明的形而上学断言.
- 合法使用非直谓定义，从而剔除还原公理.
- 有力回应贝纳塞拉夫问题.
- 减轻不完全定理造成的破坏.

柏拉图主义下的逻辑主义纲领：

在字面上完全依赖逻辑去发现数学真理.

“神学”数学的认识论困境

柏拉图主义的一大困难是，既然理念世界和经验世界是完全隔绝的，那么经验世界中的人如何能认识理念？这一困难实质上与唯理论的困难一致.

柏拉图主张灵魂回忆说. 笛卡尔则认为那种清楚明白的真实无误观念乃是上帝赋予的. 诸如此类的学说便是充满神学色彩的天赋观念论.

莱布尼茨虽然也承认有天赋观念，但他认为这种观念不是直接呈现的而是潜在的，心灵像一块有纹路的大理石，这似乎暗示了人具有某种先天的认知结构. 康德则明确提出感性纯直观和知性范畴就是认知的先天结构，它们使先天综合判断成为可能.

哥德尔认为我们通过对概念的直觉能力来认识数学，这种直觉是比康德的具体直观和布劳威尔的二一性直觉更强的抽象直觉. 我们通过感官获得感觉材料（第一类材料），而通过抽象直觉获得抽象元素（第二类材料）. 但抽象直觉是什么哥德尔说不清楚，并试图在胡塞尔那找答案.

面对永远不可完全但永远可更完全的数学，哥德尔虽然主张我们必须不断从直觉之泉汲取养料，但他仍旧认为数学真理是分析的而非综合的，因为它的真取决于命题中所含概念的意义.

直谓主义数学

有没有既坚持直谓主义又保留大量经典数学的中间道路呢？这便是王浩想要发展的直谓主义数学. 王浩的核心想法是放宽罗素对直谓性的要求，使某些非直谓定义仍旧符合直谓主义精神.

至于直谓性问题，王浩认为不能把它看成仅仅是对约束变元的一种限制，这种限制只在引进新对象时是必要的，但如果对象不是新的，对它的“非直谓”定义就只是对已存在的东西的描述，描述中即使假设了这个对象本身的存在也不构成恶性循环. 如自然数集 $\mathbb{N}$ 的归纳定义虽然形式上是非直谓的，但定义中的递归过程已使我们确实意识到 $\mathbb{N}$ 的存在，这种意识不依赖于最后一步把 $\mathbb{N}$ 作为某种最小集合非直谓地确定的方式. 因而 $\mathbb{N}$ 不是新的，它的形式上非直谓的归纳定义也是直谓地可接受的. 既然几乎所有的直谓理论都接受了 $\mathbb{N}$，那么直谓主义者就没有理由排斥广义归纳定义，即把归纳定义用于其他的递归构造过程而得到构造出的对象全体的集合（王浩 1959；1974）.

——邢滔滔《一种集合分层及其哲学意蕴》(2000)

主要参考文献

[1] 保罗・贝纳塞拉夫, 希拉里・普特南. 数学哲学 [M]. 朱水林, 应制夷, 凌康源, 张玉纲译. 商务印书馆,2003
[2] K.C.Klement.*Russell's Logicism*[A].Bloomsbury,2019
[3] 林静霞. 罗素类型论研究 [D]. 厦门大学,2017
[4] 刘靖贤. 概括公理与新弗雷格主义 [D]. 北京大学,2013
[5] 刘晓力. 理性的生命——哥德尔思想研究 [M]. 湖南教育出版社,2000
[6] B.Russell.*Principles of Mathematics*[M].Routledge,2010
[7] B.Russell.*On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*[A].George Allen and Unwin Ltd,1906
[8] 伯特兰・罗素. 数理哲学导论 [M]. 晏成书译. 商务印书馆,1982
[9] 伯特兰・罗素. 我的哲学发展 [M]. 温锡增译. 商务印书馆,2009

主要参考文献

[10] 伯特兰・罗素. 逻辑与知识 [M]. 苑莉均译. 商务印书馆,2017

[11] A.N.Whitehead, B.Russell.*Principia Mathematica*[M]. Cambridge,1910-1913

[12] A.N.Whitehead, B.Russell.*Principia Mathematica to* $*$ *56*[M].Cambridge,1962

[13] 斯图尔特・夏皮罗. 数学哲学：对数学的思考 [M]. 郝兆宽, 杨睿之译. 上海: 复旦大学出版社,2010

[14] 邢滔滔. 一种集合分层及其哲学意蕴 [J]. 中山大学学报论丛（社会科学版）,2000

[15] 杨睿之. 作为哲学的数理逻辑 [M]. 复旦大学出版社,2016

[16] 叶峰. 二十世纪数学哲学：一个自然主义者的评述 [M]. 北京大学出版社,2010

[17] 张家龙. 数理逻辑发展史：从莱布尼茨到哥德尔 [M]. 社会科学文献出版社,1993

[18] 郑伟平. 罗素的替代理论 [J]. 逻辑学研究,2016