Gentzen’s Consistency Proof

刘力恺

2023年4月18日

Contents

一致性问题的缘起

Hilbert第二问题（1900巴黎国际数学大会）：

算术公理的一致性(Widerspruchsfreiheit)

一致性问题是Hilbert学派（形式主义/有穷主义/演绎主义）关注的核心问题，这与该学派所持的公理观和所设计的数学基础建构方案有关。而【逻辑主义/柏拉图主义】和直觉主义均不关心这一问题。

Hilbert学派的主要对手是以Brouwer为代表的直觉主义。Hilbert学派拟通过一致性证明捍卫被直觉主义质疑的经典数学（特别是集合论）的合法性。1920年代Weyl“叛变”到直觉主义阵营，迫使Hilbert学派加快了解决一致性问题、重建数学基础的进度。

最具代表性的一手文献：

- Hilbert 1899《几何基础》：初等几何基础问题的彻底解决。
- Hilbert 1925《论无限》：Hilbert计划的纲要。
- Hilbert & Ackermann 1928《理论逻辑基础》：Hilbert学派撰写的数理逻辑教材。
- Bernays 1930《数学哲学与Hilbert的证明论》：Hilbert计划的哲学辩护。
- Hilbert & Bernays 1934,1939《数学基础》：Hilbert学派的集大成之作。

其他一手文献收录于以下论文集：

- van Heijenoort编纂的《从Frege到Gödel》
- Ewald编纂的《从Kant到Hilbert》
- Mancousu编纂的《从Brouwer到Hilbert》

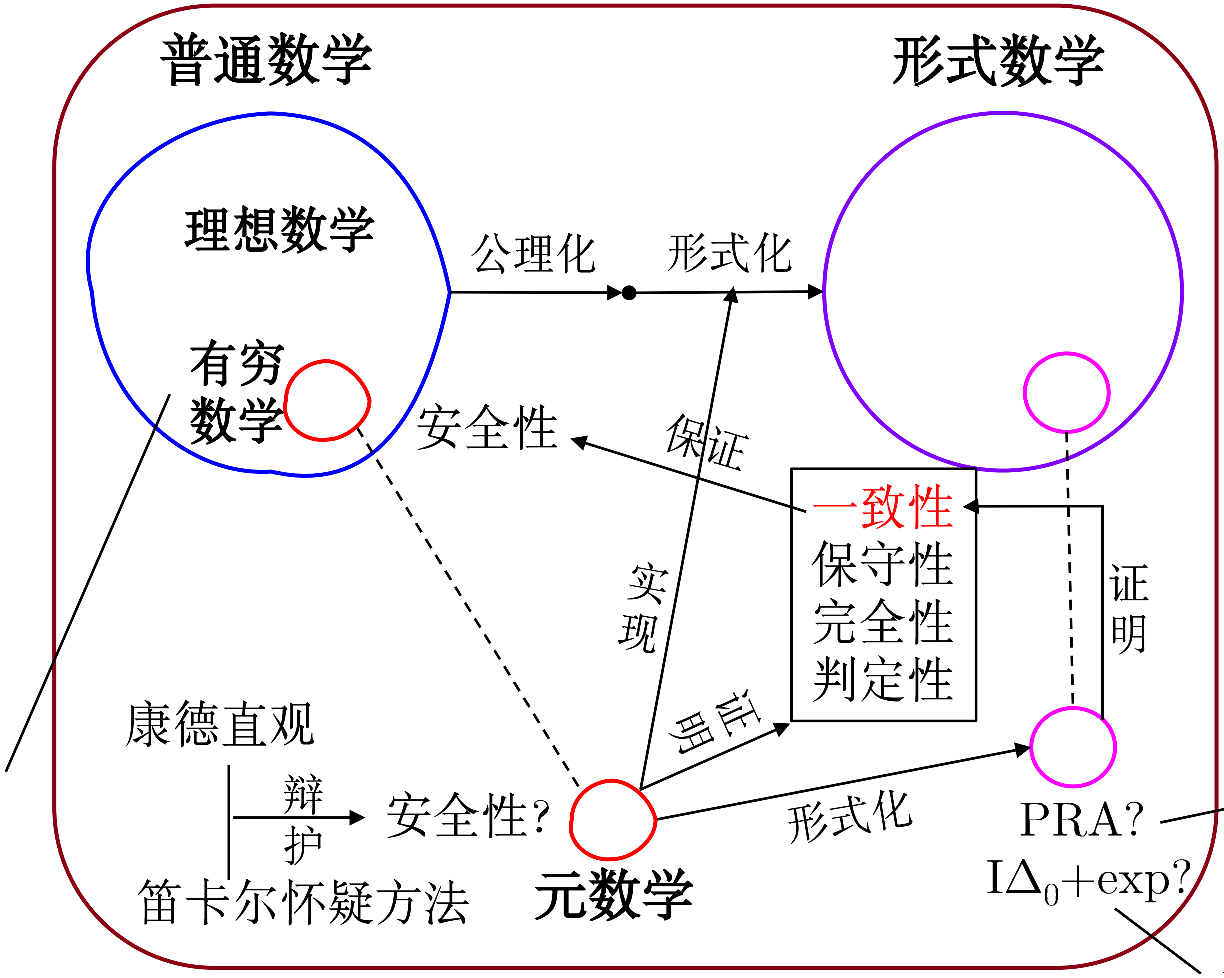
Hilbert计划的图景

David Hilbert, 1862–1943

哥廷根数学学派

第五任掌门人

研究“纸面”上的
竖杠符号的学问



PRA是非逻辑符号为0、后继函数符、所有原始递归函数的符号的无量词理论，非逻辑公理为后继公理和每一原始递归函数的定义方程，非逻辑规则为归纳规则。

原始递归算术——有穷主义
（Tait1981）

基本函数算术——严格有穷主义

Hilbert计划的初步进展

ε-演算

经典蕴涵和否定的公理、等词公理、MP 规则、

Hilbert 超穷公理：$\varphi(x) \to \varphi(\varepsilon_x \varphi(x))$、

替换规则：$\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(t)}$。

Hilbert-Bernays 第一 ε-定理

设公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 是无量词和 ε 符号。

若 Γ 在 ε-演算中能推导出 φ，

则推导过程可以不使用 Hilbert 超穷公理、

不替换入带 ε 的项。

推论：设有一种方法可以唯一确定原子语句的真值。如果理论的公理不含量词和 ε，并且其每个替换实例都可验证为真，那么理论可证的每个无变元公式都是真的，从而理论是一致的。

推论：初等几何是一致的。

- Ackermann 1924 Begründung des “tertium non datur” mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit
  用有穷方法和到ω^{ω^ω}的超穷归纳法证明了二阶原始递归算术的一致性。
- von Neumann 1927 Zur Hilbertschen Beweistheorie
  用严格有穷方法证明了后继函数的一阶理论的一致性。

两人的证明都涉及**ε-替换方法**，该方法可与Gentzen**切割消除方法**比肩。

可参考Zach的博士论文(2001)

Hilbert’s Finitism: Historical, Philosophical, and Metamathematical Perspectives

以及Bellotti 2016 Von Neumann’s Consistency Proof

Gödel定理的影响

Gödel完全性定理（1929/1930）：

每个狭义谓词演算的可数公式集，要么$\aleph_0$-可满足，要么有一个逻辑积可驳的有穷子集。

在RCA_0中等价于弱König引理

Gödel第一不完全定理（Gödel 1931, Rosser 1936）：

对任何包含 Robison 理论 R 的递归可公理化理论 T，如果 T 是一致的，那么存在 Π^0_1 语句 γ，使得 $\mathrm{T} \nvdash \gamma$ 且 $\mathrm{T} \nvdash \neg\gamma$。

Gödel第二不完全定理（Bernays 1939）：

对任何包含 PRA 的递归可公理化理论 T，$\mathrm{T} \vdash \mathrm{Con}_\mathrm{T} \to \neg\Box_\mathrm{T}\mathrm{Con}_\mathrm{T}$。

一致性：$\mathrm{T} \nvdash 0 = 1$

保守性：$\mathrm{T} \supseteq \mathrm{PRA}$，对所有 $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PRA}}$，$\mathrm{T} \vdash \varphi \Longrightarrow \mathrm{PRA} \vdash \varphi$

完全性：
- T 一致 $\Longrightarrow$T 有模型
- $\mathrm{T} \vdash \varphi$ 或 $\mathrm{T} \vdash \neg\varphi$
- 标准模型 $\mathcal{M} \models \varphi \Longrightarrow \mathrm{T} \vdash \varphi$

判定性：$\{\sharp\varphi \mid \mathrm{T} \vdash \varphi\}$ 是递归集

✗

Note. 一致性与保守性的关系：

$\mathrm{T} \supseteq \mathrm{PRA}$，对所有 $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PRA}}$，

$\mathrm{T} \vdash \varphi \Longrightarrow \mathrm{PRA}, \mathrm{Con}_\mathrm{T} \vdash \varphi$

扩张有穷主义

Gödel*1938a Lecture at Zilsel's

4. *How then shall we extend?* (Extension is necessary.) Three ways are known up to now:

1. Higher types of functions (functions of functions of numbers, etc.).
2. The modal-logical route (introduction of an absurdity applied to universal sentences and a ⟦notion of⟧ "consequence").
3. Transfinite induction, that is, inference by induction is added for certain concretely defined ordinal numbers of the second number class.

扩张有穷主义I：高类型泛函

Gödel 1958/1972 On an Extension of Finitary Mathematics which has not yet been Used

Gödel构造了一个自然数上可计算有穷类型泛函的无量词理论𝕋

As far as axioms and rules of inference for this concept are concerned, no others are needed except the following: (1) axioms for the two-valued propositional calculus applied to equations between terms of equal type, (2) the axioms of equality,[7] i.e., $x = x$ and $x = y . \supset . t(x) = t(y)$ for variables x, y and terms t of any type, (3) the third and fourth Peano axioms, i.e., $x + 1 \neq 0$, $x + 1 = y + 1 . \supset . x = y$, (4) the rule of substitution of terms of equal type for free variables (bound variables do not occur in the system), (5) rules which permit the definition of a function by an equality with a term constructed from variables and previously defined functions or by primitive recursion with respect to a number variable, (6) the usual version of the inference of complete induction with respect to a number variable.

0 是类型；每一自然数都属于类型 **0**；

若 $\tau_1, \ldots, \tau_n, \sigma$ 是类型，则 $(\tau_1, \ldots, \tau_n, \sigma)$ 是类型；每一自变量类型分别为 $\tau_1, \ldots, \tau_n$、因变量类型为 σ 的 n 元泛函都属于类型 $(\tau_1, \ldots, \tau_n, \sigma)$。

可参考Avigad & Feferman 1998 Gödel’s Functional Interpretation，载Buss编纂的《证明论手册》。

扩张有穷主义I：高类型泛函

辩证法翻译

The correspondence of F' to F is defined by induction on the number k of logical operators contained in F. The precautions to be taken in the choice of the symbols for the bound variables and the heuristic grounds for point 5 of the definition are given below the following formulas.

I. Let $F' = F$ for $k = 0$.

II. Suppose

$$F' = (\exists y)(z)A(y,z,x)$$

and

$$G' = (\exists v)(w)B(v,w,u)$$

have already been defined; then, *per definitionem*, we set:

1. $(F \wedge G)' = (\exists yv)(zw)[A(y,z,x) \wedge B(v,w,u)]$.
2. $(F \vee G)' = (\exists yvt)(zw)[t = 0 \wedge A(y,z,x) \,.\vee.\, t = 1 \wedge B(v,w,u)]$.
3. $[(s)F]' = (\exists Y)(sz)A(Y(s),z,x)$.
4. $[(\exists s)F]' = (\exists sy)(z)A(y,z,x)$, where s is a number variable contained in x.
5. $(F \supset G)' = (\exists VZ)(yw)[A(y,Z(yw),x) \supset B(V(y),w,u)]$, which, by the definition of negation given on page 280 below, implies:
6. $(\neg F)' = (\exists \overline{Z})(y)\neg A(y,\overline{Z}(y),x)$.

对任意一阶算术公式 φ，都有 $\varphi' = \exists y\forall z\varphi^*(y,z,x)$，并且

$$\text{若 HA} \vdash \varphi\text{，则存在项 } t \text{ 使得 } \mathbb{T} \vdash \varphi^*(t,z,x)\text{。}$$

又有

$$\mathrm{PA} \vdash \varphi \Longleftrightarrow \mathrm{HA} \vdash \mathrm{g}(\varphi),$$

其中 g 是 Gödel-Gentzen 双否定翻译。

因此，

$$\mathbb{T} \nvdash 0 = 1 \Longrightarrow \mathrm{HA} \nvdash 0 = 1 \Longrightarrow \mathrm{PA} \nvdash 0 = 1\text{。}$$

问题在于我们只对类型0（自然数）和类型1（一般递归函数）有明确的直观（分别是Kant式的具体直观和图灵机），对其他有穷类型则需要用Gödel所谓抽象直观来把握。

扩张有穷主义II：模态路线

Solovay 1976　Provability Interpretations of Modal Logic

Solovay第一算术完全定理：

$\vdash_{\mathrm{GL}} \varphi$，当且仅当，对任意算术实现 $*$，$\mathrm{T} \vdash \varphi^*$，

其中 T 是包含 $\mathrm{I}\Delta_0 + \exp$ 且 Σ_1-可靠的递归可公理化理论。

Solovay第二算术完全定理：

$\vdash_{\mathrm{GLt}} \varphi$，当且仅当，对任意算术实现 $*$，自然数标准模型 $\mathcal{N} \models \varphi^*$。

Solovay定理的证明需要用到有关Solovay函数的极限的PA不可证的真命题。

算术实现 $*$ 是模态命题公式到一阶算术语句间的映射，且满足：

$\perp^* = 0 = 1$，$(\varphi \supset \psi)^* = \varphi^* \supset \psi^*$，$(\Box\varphi)^* = \mathrm{Bew}(\ulcorner \varphi^* \urcorner)$。

GL = 重言式 + K 公理 + Löb 公理 + 分离规则 + 必然化规则

GLt = GL 内定理 +T 公理 + 分离规则

可参考康宏逵《模态、自指和哥德尔定理》，这是《可能世界的逻辑》一书的代序。

第一定理将T的一致性归结为GL的一致性，GL一致性可用absurd型删模态法或利用矢列演算（见Preliminaries）证明。

$\vdash_{\mathrm{GLt}} \neg\Box\perp$ 成立，由第二定理有 $\mathcal{N} \models \mathrm{Con}_{\mathrm{T}}$。

事实上，一致性与Π_1-反射原理等价。

扩张有穷主义III：超穷归纳

Gentzen 1936　The Consistency of Elementary Number Theory

Gentzen 1938　New Version of the Consistency Proof for Elementary Number Theory

按现代证明论的分析，Gentzen 实质上证明了

$$\mathrm{PRA},\ \mathrm{PR\text{-}TI}(\varepsilon_0) \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}},$$

其中 $\mathrm{PR\text{-}TI}(\varepsilon_0)$ 是模式

$$(\forall x \in \hat{\varepsilon}_0)((\forall y \prec x)Py \supset Px) \supset (\forall x \in \hat{\varepsilon}_0)Px,$$

对所有原始递归谓词 P 而言。$\hat{\varepsilon}_0$ 是所有 $< \varepsilon_0$ 的序数的编码的集合，$\hat{\varepsilon}_0$ 及其上的序关系 $\prec$ 都是原始递归的，且 $(\hat{\varepsilon}_0, \prec) \cong (\varepsilon_0, \in)$。

$$\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \cdots\} = \min\{\xi \mid \omega^\xi = \xi\} = \lim_{n\to\infty} \omega_n(1)$$

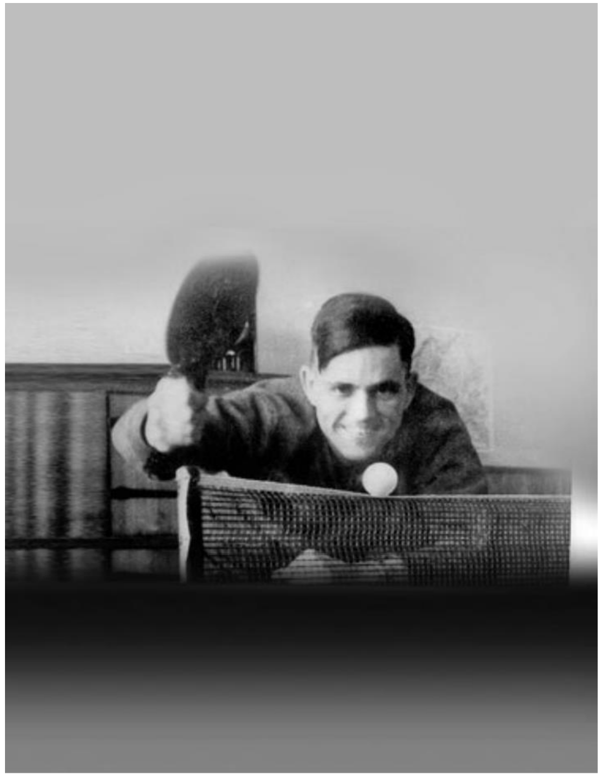
$$\omega_0(\alpha) = \alpha,\ \ \omega_{n+1}(\alpha) = \omega^{\omega_n(\alpha)}$$

我们能通过某种直观
把握到ε_0的超穷归纳吗？

到ε_0的递归的有效性显然不是直接显明的，这不像ω^2的情形。也就是说，我们不能一眼就把握住存在于下降序列中这种结构可能性，因此不存在有关每个这样的序列的终止的直接具体知识。更进一步，这种Hilbert意义上的具体知识也不能通过序数从小到大的逐步跃迁来实现，因为像$\alpha\to\alpha^2$这样具体显明的步骤太小了，以致于它们必须重复ε_0次才能到达ε_0。

—— Gödel 1972

Gentzen其人



Gerhard Gentzen, 1909–1945

德国逻辑学家

- 1933年Gentzen获哥廷根大学博士学位，其博士论文以《逻辑演绎研究》为名于1935年正式发表，论文导师为Weyl；在博士论文中Gentzen发明了直觉主义逻辑和经典逻辑的自然演绎的演算和矢列演算。
- 1934—1943年Gentzen在哥廷根大学担任Hilbert的助手，在此期间Gentzen证明了Peano算术的一致性。

- Gentzen是自Aristotle和Frege以来对证明的本性做出过最深刻研究的逻辑学家。
- Gödel曾称Gentzen是比自己更好的逻辑学家。

——*Gentzen's Centenary*

Contents

Gentzen's NLK

Gentzen 1936证明了基于半自然演绎半矢列演算（后承演算）NLK的Peano算术的一致性。但这个证明因使用了Brouwer的Fan定理而遭到质疑。

5.23. 定义基础矢列

基础逻辑矢列形如 $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$；

基础数学矢列形如 $\to \mathfrak{E}$，$\mathfrak{E}$ 是数学公理。

5.24. Definition of a *structural transformation*:

The following kinds of transformation of a sequent are called *structural transformations* (because they affect only the structure of a sequent, independently of the meaning of the individual formulae):

5.241. *Interchange* of two antecedent formulae;

5.242. *Omission* of an antecedent formula identical with another antecedent formula;

5.243. *Adjunction* of an arbitrary formula to the antecedent formulae;

5.244. Replacement of a *bound variable* within a formula throughout the scope of a ∀- or ∃-symbol by another bound variable not yet occurring in the formula.

Gentzen's NLK

Now *the individual rules of inference*:

5.251. *&-introduction*: from the sequents $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$ and $\Delta \rightarrow \mathfrak{B}$ follows the sequent $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$.

&-elimination: from $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ follows the $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$ or $\Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$.

$\vee$-*introduction*: from $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$ follows $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ or $\Gamma \rightarrow \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

$\vee$-*elimination*: from $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{A}, \Delta \rightarrow \mathfrak{C}$ and $\mathfrak{B}, \Theta \rightarrow \mathfrak{C}$ follows $\Gamma, \Delta, \Theta \rightarrow \mathfrak{C}$.

$\forall$-*introduction*: from $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ follows $\Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, provided that the free variable $\mathfrak{a}$ does not occur in Γ and $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

$\forall$-*elimination*: from $\Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ follows $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$.

$\exists$-*introduction*: from $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ follows $\Gamma \rightarrow \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

$\exists$-*elimination*: from $\Gamma \rightarrow \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ and $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \rightarrow \mathfrak{C}$ follows $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{C}$, provided that the free variable $\mathfrak{a}$ does not occur in Γ, Δ, $\mathfrak{C}$ and $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

$\supset$-*introduction*: from $\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$ follows $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

$\supset$-*elimination*: from $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$ and $\Delta \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ follows $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{B}$.

5.252. '*Reductio*': from $\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{A}, \Delta \rightarrow \neg \mathfrak{B}$ follows $\Gamma, \Delta \rightarrow \neg \mathfrak{A}$.

'*Elimination of the double negation*': from $\Gamma \rightarrow \neg\neg \mathfrak{A}$ follows $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$.

5.253. '*Complete Induction*': from $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(1)$ and $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ follows $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$, provided that the free variable $\mathfrak{a}$ does not occur in $\Gamma, \Delta, \mathfrak{F}(1)$ and $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$.

Gentzen's LK

Gentzen 1938证明了基于矢列演算LK的Peano算术的一致性。

1.31. Schemata for *structural inference figures*:

Thinning:
$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}$$

Contraction:
$$\frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}$$

Interchange:
$$\frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Lambda}$$

Cut:
$$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}.$$

1.32. Schemata for *operational inference figures*:

$$\&: \begin{cases} \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \qquad \dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \end{cases}$$

$$\vee: \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \end{cases}$$

$$\forall: \begin{cases} \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{a})}{\Gamma \to \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})} \qquad \dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{t}), \Gamma \to \Theta}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Gamma \to \Theta} \end{cases}$$

$$\exists: \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Gamma \to \Theta}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Gamma \to \Theta} \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{t})}{\Gamma \to \Theta, \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})} \end{cases}$$

$$\neg: \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg \mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}. \end{cases}$$

$$\supset: \begin{cases} \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}} \end{cases}$$

Gentzen's LK

1.33. Schema for *CJ – inference figures* (the formal counterparts of complete inductions):

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{a}')}{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{t})}.$$

1.4. '*Basic sequents*'.

We shall distinguish *basic 'logical'* and '*mathematical' sequents*.

A *basic logical sequent* is a sequent of the form $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, where an arbitrary formula may stand for $\mathfrak{D}$.

A *basic mathematical sequent* is a sequent consisting entirely of prime formulae and becoming a 'true' sequent with every arbitrary substitution of numerical terms for possible occurrences of free variables.

Note. GL的矢列演算为LK加上如下规则：

$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma, \Box\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}}{\Box\Gamma \to \Box\mathfrak{G}}(GL)$$

—— Sambin & Valentini 1982

一个**推导**$\mathcal{D}$是一棵以单个矢列作为节点的有穷树，该树的叶都是基础矢列，其余节点则由它上方的节点通过规则得到。

它的根称为**尾矢列**。

$\mathcal{D}$的**高度**是指它的极大分枝的最大长度。

称一个推导是**正则**的，如果推导中的每一特征变元恰好只是某一个$(\forall R)$或$(\exists L)$或(CJ)规则的特征变元，并且只出现在这些规则上方。

命题：每个推导都能变换为一个尾矢列相同的正则推导。

如果一个正则推导的尾矢列不含自由变元，那么把推导中不是特征变元的自由变元全部替换为1后得到的推导与原推导具有相同的尾矢列。

Gentzen's Hauptsatz

HAUPTSATZ: Every *LJ*- or *LK*-derivation can be transformed into an *LJ*- or *LK*-derivation with the same endsequent and in which the inference figure called a 'cut' does not occur.（切割消除定理）

Gentzen 1935证明：与切割规则等价的混合规则是可消除的。

$$\frac{\Gamma \to \Theta \qquad \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}(Mix)$$

其中一个确定的公式 $\mathfrak{M}$ 在 Θ, Δ 中都至少出现一次，

Θ^*, Δ^* 是删除 Θ, Δ 中的所有 $\mathfrak{M}$ 得到的。

证明：任给一正则推导，选取推导中应用了(*Mix*)的最高节点，对以该节点的左、右前提为尾矢列的两子推导的高度之和（称为混合高度）作归纳，对混合公式$\mathfrak{M}$的复杂度作子归纳。将混合的应用上移以降低混合高度，或降低混合公式的复杂度，直至消除混合的使用。不断重复此消除过程。

详细证明可参考马明辉《结构证明论》，pp.61-74, 177-180.

推论：LK具有子公式（忽略变元替换）性质；一阶逻辑是一致的。

Ordinal Notation

序数记号（ordinal notation）就是给序数统一命名/表示的符号系统。

如ω-数、ε-数、Veblen函数、各种序数坍塌函数等等……

Cantor 正则形式（1897）：每个可数序数 α 都可以唯一表示为

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot \kappa_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot \kappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau} \cdot \kappa_\tau,$$

其中 $\Omega > \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_\tau \geqslant 0$，$0 < \kappa_0, \kappa_1, \cdots, \kappa_\tau, \tau + 1 < \omega$。

如果 α 是非 ε-数，那么 $\alpha > \alpha_0$。

据此所有 $< \varepsilon_0$ 的序数都可以只通过符号 $0, \omega, +$ 和上标按 Cantor 正则形式命名（由于系数都是有穷数，故乘法可以还原为加法）。

定义编码函数 $\overline{\cdot} : \varepsilon_0 \to \omega$：

$$\overline{\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ p_1^{\overline{\alpha_1}+1} \cdots p_n^{\overline{\alpha_n}+1}, & \alpha =_{CNF} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n} \end{cases}$$

定义 $\overline{\alpha} \prec \overline{\beta}$:iff $\alpha < \beta$，$\overline{\alpha} \hat{+} \overline{\beta} := \overline{\alpha + \beta}$，$\overline{\alpha} \,\hat{\cdot}\, \overline{\beta} := \overline{\alpha \cdot \beta}$，$\hat{\omega}^{\overline{\alpha}} := \overline{\omega^{\alpha}}$。

Contents

Gentzen总结的证明思路

- 任意推导的一致性被归约为所有更简单推导的一致性。这是通过为任意矛盾推导——即以空矢列作为尾矢列的推导——定义一个清楚明白的归约步骤做到的；这一步骤将这个矛盾推导变换为具有相同尾矢列的更简单推导。
- 然后让每个推导都关联上一个超穷序数，并证明在归约步中，我们所关心的矛盾推导被转换为一个关联更小序数的推导。……
- 由此所有推导的一致性都显然地通过超穷归纳得到。……超穷归纳推理需要通过无争议的构造性的推理形式单独辩护。

—— Gentzen 1938

简单推导

定义：称一个推导是**简单的**，如果它不含自由变元、只涉及原子公式、只使用结构规则且切割公式是原子的。

称一个只含原子公式的矢列是**“真”**的，如果该矢列前件中至少有一个等式不成立或后件中至少有一个等式成立，成立即等式左右两边指称相同。

引理：所有简单推导中的矢列都是“真”的。

证明：只需证初始矢列都“真”，推理规则保“真”。

推论：不存在尾矢列为空矢列的简单推导。

接下来要将任意尾矢列只涉及原子语句的推导变换为一个尾矢列相同的简单推导。从而任意尾矢列为空矢列的推导也都能变换为一个简单推导。

本节详细证明均参见Mancousu et al. An Introduction to Proof Theory. Chapter7, 9.

指派序数记号

对一给定推导$\mathcal{D}$中的每一矢列S指派一序数记号ord(S,$\mathcal{D}$)：

(1) 若 S 是基础矢列，则 $\mathrm{ord}(S,\mathcal{D})=\omega^0$；

(2) 若 S 是前提为 S' 的某不是切割规则的结构规则的结论，则

$$\mathrm{ord}(S,\mathcal{D})=\mathrm{ord}(S',\mathcal{D});$$

(3) 若 S 是前提为 S' 的某运算规则的结论，则

$$\mathrm{ord}(S,\mathcal{D})=\mathrm{ord}(S',\mathcal{D})+1;$$

(4) 若 S 是前提为 S',S'' 的某运算规则的结论，则

$$\mathrm{ord}(S,\mathcal{D})=\mathrm{ord}(S',\mathcal{D})\ \#\ \mathrm{ord}(S'',\mathcal{D});$$

\# 表示序数的自然求和。

(5) 若 S 是前提为 S',S'' 的切割规则的结论，则

$$\mathrm{ord}(S,\mathcal{D})=\omega_{k-l}(\mathrm{ord}(S',\mathcal{D})\ \#\ \mathrm{ord}(S'',\mathcal{D})),$$

其中 k 是 S',S'' 在 $\mathcal{D}$ 中的层级，l 是 S 在 $\mathcal{D}$ 中的层级；

(6) 若 S 是前提为 S' 的归纳规则的结论，则

$$\mathrm{ord}(S,\mathcal{D})=\omega_{k-l}(\omega^{\alpha_1+1}),$$

其中 $\mathrm{ord}(S',\mathcal{D})=_{CNF}\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_n}$，
k 是 S' 在 $\mathcal{D}$ 中的层级，l 是 S 在 $\mathcal{D}$ 中的层级。

矢列S在推导$\mathcal{D}$中的**层级**是指出现在S下方的切割公式和归纳公式的复杂度的最大值。

指派序数记号

把指派给推导$\mathcal{D}$的尾矢列S的序数记号ord(S,$\mathcal{D}$)当作指派给推导$\mathcal{D}$的序数记号ord($\mathcal{D}$)。

命题：设$\mathcal{D}$是只涉及原子语句的推导。

$\mathrm{ord}(\mathcal{D}) \prec \omega^{\omega^0}$，当且仅当，$\mathcal{D}$是简单推导。

引理：已知 $\mathcal{D} = \begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ S \quad \mathcal{D}_2 \\ \mathcal{D}_3 \\ S_0 \end{array}$ $\quad \mathcal{D}' = \begin{array}{c} \mathcal{D}'_1 \\ S \quad \mathcal{D}_2 \\ \mathcal{D}_3 \\ S_0 \end{array}$

若 $\mathrm{ord}(S,\mathcal{D}') \prec \mathrm{ord}(S,\mathcal{D})$，

且 $\mathcal{D}_3$ 中没有使用过归纳规则，

则 $\mathrm{ord}(\mathcal{D}') \prec \mathrm{ord}(\mathcal{D})$。

证明：施归纳于$\mathcal{D}_3$的高度n。

n=0时，S=S_0，trivil。

n>0时，设S是规则R的前提。以 R是切割规则为例。

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2^\circ \\ \dfrac{\alpha, k\ S \qquad S'\ \beta}{\omega_{k-l}(\alpha \# \beta), l\ S''}(Cut) \\ \mathcal{D}_3^\circ \\ S_0 \end{array} \qquad \mathcal{D}' = \begin{array}{c} \mathcal{D}'_1 \quad \mathcal{D}_2^\circ \\ \dfrac{\alpha', k\ S \qquad S'\ \beta}{\omega_{k-l}(\alpha' \# \beta), l\ S''}(Cut) \\ \mathcal{D}_3^\circ \\ S_0 \end{array}$$

由于$\alpha' \prec \alpha$，所以$\omega_{k\text{-}l}(\alpha' \# \beta) \prec \omega_{k\text{-}l}(\alpha \# \beta)$，

再由归纳假设，ord(S',$\mathcal{D}$) ≺ ord(S,$\mathcal{D}$)。

推导的尾部

定义：称一给定推导中的一个有穷公式序列是一个 **“从”**，如果该序列的每一项都是它前一项的后继，首项没有前驱，即是一个弱化公式或出现在基础矢列中，末项没有后继，即是一个切割公式或出现在尾矢列中。定义从略

称一个从是**隐式**的，如果它的末项是一个切割公式。

称一个规则是隐式的，如果它的主公式属于某个隐式从。

Note. 从的作用是记录一个公式在推导中的历史 。

尾矢列只涉及原子语句的推导中的运算规则都是隐式的。

定义：一个推导的**尾部**是满足如下条件的最小部分：

- 尾矢列在其中；
- 如果一个规则的结论在其中，那么它的前提也在其中，除非该规则是隐式的运算规则。

Note. 尾部就是推导中从尾矢列到边界规则（即应用得最低的、主公式之后会因切割规则的使用而消失在推导中的运算规则）的结论的那些部分。

示例：

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A}\to}\,(\neg L)}{\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B}}\,(WR)
      \qquad
      \dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}{\neg\mathfrak{B},\mathfrak{B}\to}\,(\neg L)
    }{\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A},\mathfrak{B}\to}\,(Cut)
  }{\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A},\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}\,(WR)
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}}\,(\wedge L)}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}}\,(\vee R)
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}\,(\wedge L)}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}}\,(\vee R)
  }{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\to(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C})\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})}\,(\wedge R)
}{\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A},\mathfrak{B}\to(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C})\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})}\,(Cut)
$$

消除尾部中的完全归纳规则

当进行一个“合适的”归纳推理时，可以使用切割规则(*Cut*)来代替完全归纳规则(*CJ*)的使用。

$\mathfrak{F}$(t)中的t是闭项，为了方便，
不妨设t中也不含加号和乘号。

$$\alpha =_{CNF} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}, k$$

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{a}')}{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n})}\ \omega_{k-l}(\omega^{\alpha_1+1}), l$$

$$\Longrightarrow$$

$$\cfrac{\alpha, k\ \ \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(1') \qquad \overset{\alpha, k}{\mathfrak{F}(1'), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(1'')}}{\alpha \# \alpha, k\ \ \mathfrak{F}(1), \Gamma, \Gamma \to \Theta, \Theta, \mathfrak{F}(1'')}\ \text{cut}$$

$$\frac{\alpha \# \alpha, k\ \ \mathfrak{F}(1), \Gamma, \Gamma \to \Theta, \Theta, \mathfrak{F}(1'')}{\alpha \# \alpha, k\ \ \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(1'')}\ \text{possibly several interchanges and contractions}$$

$$\frac{\alpha \# \alpha, k\ \ \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(1'') \qquad \alpha, k\ \ \mathfrak{F}(1''), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(1''')}{\alpha \# \alpha \# \alpha, k\ \ \mathfrak{F}(1), \Gamma, \Gamma \to \Theta, \Theta, \mathfrak{F}(1''')}\ \text{cut}$$

$$\frac{\alpha \# \alpha \# \alpha, k\ \ \mathfrak{F}(1), \Gamma, \Gamma \to \Theta, \Theta, \mathfrak{F}(1''')}{\alpha \# \alpha \# \alpha, k\ \ \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(1''')}\ \text{possibly several interchanges and contractions}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\qquad\qquad}{\omega_{k-l}(\alpha \# \cdots \# \alpha), l\ \ \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(n)}\ .\quad \text{etc.}$$

$$\boxed{\omega_{k-l}(\alpha \# \cdots \# \alpha) \prec \omega_{k-l}(\omega^{\alpha_1+1})}$$

引理：如果推导$\mathcal{D}$的尾部除归纳规则的特征变元外没有自由变元，则存在一个尾矢列与$\mathcal{D}$相同、尾部没有使用过归纳规则的推导$\mathcal{D}^*$、且$\mathrm{ord}(\mathcal{D}^*) \prec \mathrm{ord}(\mathcal{D})$。

消除尾部中的弱化规则

引理： 如果推导$\mathcal{D}$的尾部没有自由变元、没有使用过归纳规则，则存在一个推导$\mathcal{D}^*$满足：

$\mathcal{D}^*$的尾部没有使用过弱化规则

$\mathcal{D}^*$的尾矢列是$\mathcal{D}$的尾矢列的子矢列

$\mathcal{D}^*$中的矢列S^*与$\mathcal{D}$中的矢列S一一对应，并<u>假装</u> S^*的层级与S的相同，且在<u>假装</u>的情况下ord(S^*,$\mathcal{D}^*$) $\preccurlyeq$ ord(S,$\mathcal{D}$)。

Note. 尾矢列只涉及原子语句的推导的尾部没有运算规则只有结构规则。

证明： 施归纳于推导的高度。

当$\mathcal{D}$的最后一步使用了弱化、收缩和交换规则时，证明是容易的。

只考虑最后一步使用了切割规则的情况。

$$\mathcal{D}: \quad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}\ {\scriptstyle \alpha_1, k} \qquad {\scriptstyle \alpha_2, k}\ \overset{\mathcal{D}_2}{\mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ (Cut) \qquad {\scriptstyle \omega_{k-l}(\alpha_1 \# \alpha_2), l}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\mathcal{D}_1^*}{\Gamma^* \to \Theta^*, \mathfrak{D}}\ {\scriptstyle \alpha_1^*, k} \quad \text{或} \quad \overset{\mathcal{D}_1^*}{\Gamma^* \to \Theta^*} \\[2ex] \overset{\mathcal{D}_2^*}{\mathfrak{D}, \Delta^* \to \Lambda^*}\ {\scriptstyle \alpha_2^*, k} \quad \text{或} \quad \overset{\mathcal{D}_2^*}{\Delta^* \to \Lambda^*} \end{array} \right.$$

据归纳假设，$\alpha_1^* \preccurlyeq \alpha_1$，$\alpha_2^* \preccurlyeq \alpha_2$，$\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2^*$ 中均未使用弱化规则。

$$\mathcal{D}^*: \quad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_1^*}{\Gamma^* \to \Theta^*, \mathfrak{D}}\ {\scriptstyle \alpha_1^*, k} \qquad {\scriptstyle \alpha_2^*, k}\ \overset{\mathcal{D}_2^*}{\mathfrak{D}, \Delta^* \to \Lambda^*}}{\Gamma^*, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda^*}\ (Cut) \qquad {\scriptstyle \omega_{k-l}(\alpha_1^* \# \alpha_2^*), l}$$

$$\boxed{\alpha_1^*,\ \alpha_2^*,\ \omega_{k-l}(\alpha_1^* \# \alpha_2^*) \preccurlyeq \omega_{k-l}(\alpha_1 \# \alpha_2)}$$

消除尾部中的合适切割

引理：令推导$\mathcal{D}$的尾部没有使用过归纳规则和弱化规则， 推导$\mathcal{D}^*$是移除了$\mathcal{D}$中应用得最高的合适切割得到的，则$\mathrm{ord}(\mathcal{D}^*) \prec \mathrm{ord}(\mathcal{D})$。

合适切割的切割公式不是原子的，并且前提中的两个切割公式都是应用得最低的隐式运算规则的后裔。（换言之两切割公式都分别有一个祖先，这两个祖先均是边界规则的主公式）

证明: 以应用得最高的合适切割的切割公式是$\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$的情形为例。

Case1

$$\mathcal{D}_1 \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{D}_2$$

$$\beta_1 \ \frac{\Gamma' \to \Theta', \mathfrak{F}(\mathfrak{a})}{\Gamma' \to \Theta', \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})}(\forall R)\ \beta_1+1 \qquad \frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Delta' \to \Lambda'}{\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta' \to \Lambda'}(\forall L)\ \begin{matrix}\beta_2 \\ \beta_2+1\end{matrix}$$

$$\mathcal{D}_1' \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{D}_2'$$

$$\mathcal{D}: \ \frac{\alpha_1, k\ \Gamma \to \Theta, \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \qquad \alpha_2, k\ \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta \to \Lambda}{\omega_{k-l}(\alpha_1 \# \alpha_2), l\ \ \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}(Cut)$$

$$\mathcal{D}_3$$

$$\Phi \to \Psi$$

Case2

$$\mathcal{D}_1 \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{D}_2$$

$$\beta_1 \ \frac{\Gamma' \to \Theta', \mathfrak{F}(\mathfrak{a})}{\Gamma' \to \Theta', \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})}(\forall R) \qquad \frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Delta' \to \Lambda'}{\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta' \to \Lambda'}(\forall L)\ \begin{matrix}\beta_2 \\ \beta_2+1\end{matrix}$$

$$\beta_1+1 \qquad \mathcal{D}_1' \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{D}_2'$$

$$\mathcal{D}: \ \frac{\alpha_1, k\ \Gamma \to \Theta, \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \qquad \alpha_2, k\ \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta \to \Lambda}{\alpha_1 \# \alpha_2, k\ \ \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}(Cut)$$

$$\mathcal{E}_1 \qquad\qquad \mathcal{E}_2$$

$$\frac{\gamma_1, k\ \Xi_1 \to \Upsilon_1, \mathfrak{E} \qquad \mathfrak{E}, \Xi_2 \to \Upsilon_2\ \gamma_2, k}{\omega_{k-l}(\gamma_1 \# \gamma_2), l\ \ \Xi_1, \Xi_2 \to \Upsilon_1, \Upsilon_2}(Cut)$$

$$\mathcal{E}_3$$

$$\Phi \to \Psi$$

消除尾部中的复杂切割

Case1

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1(\mathfrak{n}/\mathfrak{a})\\ \beta_1\ \Gamma' \to \Theta', \mathfrak{F}(\mathfrak{n})\end{array}}{\beta_1\ \Gamma' \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta'}}{\beta_1\ \Gamma' \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta', \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})}(WR)}{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1''\\ \alpha_1', k\ \ \Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta, \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\end{array}}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \beta_2\ \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Delta' \to \Lambda'\end{array}}{\beta_2+1\ \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta' \to \Lambda'}(\forall L)}{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2'\\ \alpha_2, k\ \ \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta \to \Lambda\end{array}}
$$

$$
\dfrac{\alpha_1', k\ \ \Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta, \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \qquad \alpha_2, k\ \ \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta \to \Lambda}{\dfrac{\omega^{\alpha_1'\#\alpha_2}, k-1\ \ \Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta, \Lambda}{\omega^{\alpha_1'\#\alpha_2}, k-1\ \ \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda, \mathfrak{F}(\mathfrak{n})}}(Cut)
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \beta_1\ \Gamma' \to \Theta', \mathfrak{F}(\mathfrak{a})\end{array}}{\beta_1+1\ \Gamma' \to \Theta', \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})}(\forall R)}{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ \alpha_1, k\ \Gamma \to \Theta, \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\end{array}}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \beta_2\ \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Delta' \to \Lambda'\end{array}}{\beta_2\ \Delta', \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Lambda'}}{\beta_2\ \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta', \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Lambda'}(WL)}{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2''\\ \alpha_2', k\ \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Lambda\end{array}}
$$

$$
\dfrac{\alpha_1, k\ \Gamma \to \Theta, \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \qquad \alpha_2', k\ \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Lambda}{\dfrac{\omega^{\alpha_1\#\alpha_2'}, k-1\ \ \Gamma, \Delta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Theta, \Lambda}{\omega^{\alpha_1\#\alpha_2'}, k-1\ \ \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}}(Cut)
$$

$$
\dfrac{\omega^{\alpha_1'\#\alpha_2}, k-1\ \ \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \qquad \omega^{\alpha_1\#\alpha_2'}, k-1\ \ \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}{\dfrac{\omega_{k-1-l}(\omega^{\alpha_1'\#\alpha_2} \# \omega^{\alpha_1\#\alpha_2'}), l\ \ \Gamma, \Delta, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda, \Theta, \Lambda}{\begin{array}{c}\omega_{k-1-l}(\omega^{\alpha_1'\#\alpha_2} \# \omega^{\alpha_1\#\alpha_2'}), l\ \ \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda\\ \mathcal{D}_3\\ \Phi \to \Psi\end{array}}}(Cut)
$$

$\omega_{k-1-l}(\omega^{\alpha_1'\#\alpha_2} \# \omega^{\alpha_1\#\alpha_2'}) \prec \omega_{k-l}(\alpha_1 \# \alpha_2)$

since $\alpha_1' \prec \alpha_1$ and $\alpha_2' \prec \alpha_2$

消除尾部中的复杂切割

Case2

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1(\mathfrak{n}/\mathfrak{a})\\ \beta_1\ \Gamma' \to \Theta', \mathfrak{F}(\mathfrak{n})\end{array}}{\beta_1\ \Gamma' \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta'}}{\beta_1\ \Gamma' \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta', \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})}(WR)
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \beta_2\ \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Delta' \to \Lambda'\end{array}}{\beta_2+1\ \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta' \to \Lambda'}(\forall L)
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \beta_1\ \Gamma' \to \Theta', \mathfrak{F}(\mathfrak{a})\end{array}}{\beta_1+1\ \Gamma' \to \Theta', \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})}(\forall R)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \beta_2\ \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Delta' \to \Lambda'\end{array}}{\beta_2\ \Delta', \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Lambda'}}{\beta_2\ \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta', \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Lambda'}(WL)
$$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1''\\ \alpha_1', k\ \ \Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta, \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2'\\ \alpha_2, k\ \ \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta \to \Lambda\end{array}}{\alpha_1' \# \alpha_2, k\ \ \Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta, \Lambda}(Cut)
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ \alpha_1, k\ \Gamma \to \Theta, \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2''\\ \alpha_2', k\ \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Delta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Lambda\end{array}}{\alpha_1 \# \alpha_2', k\ \ \Gamma, \Delta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Theta, \Lambda}(Cut)
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{E}_1'\\ \gamma_1', k\ \Xi_1 \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Upsilon_1, \mathfrak{C}\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{E}_2\\ \mathfrak{C}, \Xi_2 \to \Upsilon_2\ \gamma_2, k\end{array}}{\omega_{k-j}(\gamma_1' \# \gamma_2), j\ \ \Xi_1, \Xi_2 \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Upsilon_1, \Upsilon_2}(Cut)}{\omega_{k-j}(\gamma_1' \# \gamma_2), j\ \ \Xi_1, \Xi_2 \to \Upsilon_1, \Upsilon_2, \mathfrak{F}(\mathfrak{n})}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{E}_1''\\ \gamma_1'', k\ \Xi_1, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Upsilon_1, \mathfrak{C}\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{E}_2\\ \mathfrak{C}, \Xi_2 \to \Upsilon_2\ \gamma_2, k\end{array}}{\omega_{k-j}(\gamma_1'' \# \gamma_2), j\ \ \Xi_1, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Xi_2 \to \Upsilon_1, \Upsilon_2}(Cut)}{\omega_{k-j}(\gamma_1'' \# \gamma_2), j\ \ \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Xi_1, \Xi_2 \to \Upsilon_1, \Upsilon_2}
}{\dfrac{\omega_{j-l}(\omega_{k-j}(\gamma_1' \# \gamma_2) \# \omega_{k-j}(\gamma_1'' \# \gamma_2)), l\ \ \Xi_1, \Xi_2, \Xi_1, \Xi_2 \to \Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_1, \Upsilon_2}{\omega_{j-l}(\omega_{k-j}(\gamma_1' \# \gamma_2) \# \omega_{k-j}(\gamma_1'' \# \gamma_2)), l\ \ \Xi_1, \Xi_2 \to \Upsilon_1, \Upsilon_2}}(Cut)
$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\omega_{j-l}(\omega_{k-j}(\gamma_1' \# \gamma_2) \# \omega_{k-j}(\gamma_1'' \# \gamma_2)) \prec \omega_{k-l}(\gamma_1 \# \gamma_2)\\ \text{since } l \leqslant j < k, \text{ and } \alpha_1' \prec \alpha_1\ \&\ \alpha_2' \prec \alpha_2 \text{ imply } \gamma_1 \prec \gamma_1', \gamma_1''.\end{array}}$$

$$\begin{array}{c}\mathcal{E}_3\\ \Phi \to \Psi\end{array}$$

Summary

为了将尾矢列只涉及原子语句的推导变换为一个尾矢列相同的简单推导，我们将反复使用以下三个针对的尾部的消除步骤：

- 选取尾部中应用得最低的归纳规则，将它替换为一系列切割规则。施归纳于尾部中归纳规则使用次数最多的那一枝中归纳规则的使用次数，重复此步骤，消除尾部中所有归纳规则。
- 然后施归纳于推导高度，消除尾部中所有弱化规则，以保证尾部中一定存在合适切割。
- 然后选取尾部中应用得最高的合适切割，将它变为三个切割，此时原本的边界规则会被弱化规则替换，从而升高了尾部的边界，进而可以再次重复这三个步骤，最终将尾部扩展至整个推导；另外这三个切割中应用得最低的那个的切割公式的复杂度会降低，最终随三个步骤的重复降至0（即原子公式的复杂度）；而另外两个切割最终会随弱化规则的消除而消除。

为了严格证明这三个步骤的重复使用确实会使推导变换为简单推导，我们引入序数记号来衡量推导的复杂程度，然后施超穷归纳于该复杂度完成证明。

变换的具体例子参见Mancousu et al. An Introduction to Proof Theory. Chapter7.10, 9.5.

半形式系统PA$^\omega$

是否有只通过切割消除来证明PA一致性的方法?

删除规则 (CJ)，并将 $(\forall R)$ 和 $(\exists L)$ 替换为两 ω-规则：

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(0) \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(1) \quad \cdots \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \quad \cdots}{\Gamma \to \Theta, \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})} \qquad \frac{\mathfrak{F}(0), \Gamma \to \Theta \quad \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Theta \quad \cdots \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Gamma \to \Theta \quad \cdots}{\exists \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Gamma \to \Theta}$$

嵌入定理： 若 $\mathrm{PA} \vdash \Gamma \to \Theta$，则存在 $m, k < \omega$ 使得 $\mathrm{PA}^\omega \vdash_k^{\omega+m} \Gamma \to \Theta$。

PA$^\omega$切割消除定理（Schütte 1951）：

若 $\mathrm{PA}^\omega \vdash_k^\alpha \Gamma \to \Theta$，则 $\mathrm{PA}^\omega \vdash_0^{\omega_k(\alpha)} \Gamma \to \Theta$。

其中α表示推导高度不超过α，k表示推导中切割公式复杂度均小于k。

证明： 类似Gentzen’s Hauptsatz。

Note. PA$^\omega$=Th($\mathcal{N}$).

Contents

到ε_0的超穷归纳是最经济的

Gentzen 1943 Provability and Nonprovability of Restricted Transfinite Induction in Elementary Number Theory

$\mathrm{Prog}(X) \ .\equiv:\ y \prec x \supset_y y \in X \ .\supset_x .\ x \in X$

$z \in J_X \ .\equiv:\ y \prec x \supset_y y \in X \ .\supset_x .\ y \prec x \hat{+} \hat{\omega}^z \supset_y y \in X$

引入缩写 $x \sqsubseteq X \ .\equiv.\ y \prec x \supset_y y \in X$

引理： $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prog}(X) \supset \mathrm{Prog}(J_X)$

证明： 假设有 $x \sqsubseteq X \supset_x x \in X$，

要证 $z \sqsubseteq J_X \ .\supset_z .\ x \sqsubseteq X \supset_x x \hat{+} \hat{\omega}^z \sqsubseteq X$。

任给 $z \sqsubseteq J_X$，$x \sqsubseteq X$，$y \prec x \hat{+} \hat{\omega}^z$。

$z = 0$ 时，$x \hat{+} \hat{\omega}^0 = x \sqsubseteq X$。

当 $z > 0$ 时，存在 $v \prec z$ 和 $n \in \mathbb{N}$，

使得 $y \prec x \hat{+} \underbrace{\hat{\omega}^v \hat{+} \cdots \hat{+} \hat{\omega}^v}_{n\text{个}\hat{\omega}^v}$。

施归纳于 n：$n = 0$ 时，$y \prec x \supset y \in X$，即 $x \sqsubseteq X$ 成立；

$n = m + 1$ 时，由归纳假设 $x \hat{+} \underbrace{\hat{\omega}^v \hat{+} \cdots \hat{+} \hat{\omega}^v}_{m\text{个}\hat{\omega}^v} \sqsubseteq X$，

又由 $v \prec z$ 且 $z \sqsubseteq J_X$ 有 $v \in J_X$，

因此 $x \hat{+} \underbrace{\hat{\omega}^v \hat{+} \cdots \hat{+} \hat{\omega}^v}_{n\text{个}\hat{\omega}^v} = x \hat{+} \underbrace{\hat{\omega}^v \hat{+} \cdots \hat{+} \hat{\omega}^v}_{m\text{个}\hat{\omega}^v} \hat{+} \hat{\omega}^v \sqsubseteq X$。

$\mathrm{TI}(\alpha) \ .\equiv:\ \mathrm{Prog}(X) \ .\supset .\ x \prec \overline{\alpha} \supset_x x \in X$

引理： 若 $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{TI}(\alpha)$，则 $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{TI}(\omega^\alpha)$

证明： 若 $\mathrm{TI}(\alpha)$，则 $\mathrm{Prog}(J_X) \supset \overline{\alpha} \sqsubseteq J_X$。

据 $\mathrm{Prog}(J_X)$ 的定义，$\mathrm{Prog}(J_X) \supset \overline{\alpha} \in J_X$。

而 $\overline{\alpha} \in J_X$ 等价于 $x \sqsubseteq X \supset_x x \hat{+} \hat{\omega}^{\overline{\alpha}} \sqsubseteq X$，

取 $x = 0$，则有 $\mathrm{Prog}(J_X) \supset \hat{\omega}^{\overline{\alpha}} \sqsubseteq X$。

再由引理得 $\mathrm{Prog}(X) \supset \hat{\omega}^{\overline{\alpha}} \sqsubseteq X$，即 $\mathrm{TI}(\omega^\alpha)$。

定理： 对任意$\alpha < \varepsilon_0$，都存在序型为α的原始递归可定义的良序$\prec$使得PA能证明$\prec$确实是良序。

证明： 显然 $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{TI}(0)$，施归纳于 n，

据引理证明 $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{TI}(\omega^{\omega_n(0)})$ 即可。

因此到任意$\alpha < \varepsilon_0$的（关于原始递归谓词的）超穷归纳在PA中都可证。结合不完全性定理，到ε_0的超穷归纳是能证明PA一致性的最小归纳法。

证明论序数

Gentzen的工作表明，序数和理论的一致性有着深刻联系。

考虑 $|\mathrm{T}|_{\mathrm{Con}} = \min\{\alpha < \omega_1^{CK} \mid \mathrm{PRA} + \mathrm{PR\text{-}TI}(\alpha) \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{T}}\}$

显然 $\mathrm{PRA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{T}} \supset \mathrm{Con}_{\mathrm{S}}$ 蕴涵 $|\mathrm{S}|_{\mathrm{Con}} \leqslant |\mathrm{T}|_{\mathrm{Con}}$

但是这种定义依赖于序数表示系统。于是我们考虑一种更鲁棒的定义方式：

将 $|\mathrm{T}| = \sup\{\mathrm{otype}((\mathbb{N}, \prec)) < \omega_1^{CK} \mid \mathrm{T} \vdash \mathrm{WO}(\prec)\}$ 称为理论T的证明论序数，

其中 $\mathrm{WO}(\prec)\ .\equiv ::\ \prec$ 是线序 $:.\ y \prec x \supset_y y \in X\ .\supset_x .\ x \in X\ \ :\supset_X:\ \ (x).\ x \in X$

显然$|\mathrm{T}| \leqslant |\mathrm{T}|_{\mathrm{Con}}$，并且可以证明$|\mathrm{S}| \leqslant |\mathrm{T}|$ 蕴涵 $\mathrm{PRA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{T}} \supset \mathrm{Con}_{\mathrm{S}}$ 。

Note.

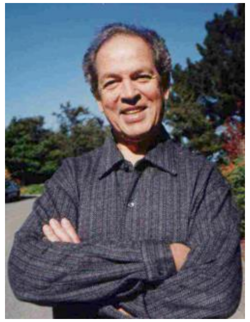
$|\mathrm{HA}| = |\mathrm{PA}| = |\mathrm{ACA}_0| = \varepsilon_0$

$|\mathrm{PRA}| = |\mathrm{I}\Sigma_1| = |\mathrm{RCA}_0| = |\mathrm{WKL}_0| = \omega^\omega$

$|\mathrm{PRA} + \mathrm{PR\text{-}TI}(\varepsilon_0)| = \varepsilon_0 + 1$

分析的一致性


Kurt Schütte
1909–1998


Solomon Feferman
1928–2016


竹内外史(Gaisi Takeuti)
1926–2017

直谓分析的澄清（Feferman 1964, Schütte 1965）

分支分析 (Ramified Analysis) 系统 RA^{∞}：

RA^{∞} = 逻辑和算术运算的公理 + 分支概括公理 +ω-规则 +

$$\text{infer } \varphi(X^{\alpha}) \text{ from } \varphi(X^{0}),\ldots,\varphi(X^{\beta}),\ldots \text{ for all } \beta<\alpha$$

超算术 (Hyperarithmetic) 系统 HC：

$\mathrm{HC}_0 = \Delta^1_1\text{-CR}$，$\mathrm{HC}_{\alpha+1} = \mathrm{HC}_{\alpha} + \forall x \mathrm{Bew}_{\mathrm{HC}_{\alpha}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \supset \forall x\varphi$，$\mathrm{HC}_{\delta} = \bigcup_{\alpha<\delta}\mathrm{HC}_{\alpha}$

定理： $\mathrm{Aut}(\mathrm{HC})=\mathrm{Aut}(\mathrm{RA}^{\infty})=\Gamma_0$

Note. $\mathrm{HC}_{\Gamma_0} = \Delta^1_1\text{-CR+Bar}$ 规则 $+\Pi^1_0$-超穷递归

ATR_0 可以证明论归约到 HC_{Γ_0}，且 $|\mathrm{ATR}_0|=\Gamma_0$

非直谓分析的第一步（Takeuti 1967）

用序数图(ordinal diagrams)方法分析了承认Π^1_1–概括的二阶算术

$$|\Pi^1_1\text{-CA}_0| = \theta_{\Omega_\omega}(0),\quad |\Pi^1_1\text{-CA}+\mathrm{BI}| = \theta_{\varepsilon_{\Omega_\omega+1}}(0)$$

Ordinal Analysis since 1970s

1977年，Buchholz引入了$\Omega_{\mu+1}$规则、Pohlers发明了局部直谓性方法，使序数分析进入了一个新时代。

序数分析主要活跃在如下六大领域：

- Subsystems of Second-Order Arithmetic
- Iterated Inductive Definition
- Kripke-Platek's Set Theory
- Aczel's Constructive Set Theory
- Martin-Löf's Intuitionistic Type Theory
- Feferman's Explicit Mathematics

近20年来，序数分析的主要进展与Mahlo基数有关。

序数分析的发展史可参考Rathjen 2006 The Art of Ordinal Analysis，
武汉大学哲学学院也在B站上传了该讲座的视频： https://b23.tv/qFooNFi

证明论：从入门到放弃

Gentzen. 1969. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Edited by Szabo. North-Holland Publishing Company.

Mancosu, Galvan, Zach. 2021. *An Introduction to Proof Theory*. Oxford University Press.

$\Downarrow$

Takeuti. 1987. *Proof Theory*. North-Holland Publishing Company.

Schütte. 1977. *Proof Theory*. Translated by Crossley. Springer-Verlag.

$\Downarrow$

Arai. 2020. *Ordinal Analysis with an Introduction to Proof Theory*. Springer.

Pohlers. 2009. *Proof Theory: The First Step into Impredicativity*. Springer-Verlag.

Thanks for Your Listening

Best Wishes for You

PEKING UNIVERSITY 1898 北京大學